УДК 517.982.2

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т)

АНАЛОГИ ПРОСТОРІВ ТИПУ S ЧАСТКОВО ПАРНИХ ФУНКЦІЙ

We construct analogs of S-type spaces whose elements are functions that are even in a part of components of their arguments. We obtain a formula that expresses a power of a Bessel operator via the corresponding powers of a differential operator. This formula enables us to establish a relation between these spaces in terms of the Fourier – Bessel transformation and to clarify some basic properties of typical operations on their elements.

Построены аналоги пространств типа S, элементы которых являются четными функциями относительно части компонент своих аргументов. Получена формула представления степени оператора Бесселя через соответствующие степени дифференциального оператора, позволяющая установить связь между этими пространствами в терминах преобразования Фурье – Бесселя и выяснить некоторые основные свойства типовых операций над их элементами.

Вступ. Простори типу S І. М. Гельфанда і Г. Є. Шилова [1] є природним середовищем дослідження задачі Коші як для класичних систем рівнянь із частинними похідними, так і для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь і систем із степеневими символами псевдодиференціювання. Використання цих просторів дозволило встановити коректну розв'язність задачі Коші для таких систем, істотно розширити клас початкових даних, з якими ця задача має гладкі розв'язки, описати максимальні класи розв'язків параболічних систем з характерними для фундаментального розв'язку властивостями тощо [2 – 6].

У цій статті проведено адаптацію просторів типу S до дослідження симетричних і частково симетричних процесів, математичний опис яких містить степені оператора Бесселя.

Простори $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ і $\left(\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}\right)'$. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1, \ldots, m\}$; $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{Z}^m_+$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}^1_+$; $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ — простір усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^m$ функцій; i — уявна одиниця, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$, $\|x\| := (x, x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$, якщо $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1} \ldots |z_m|^{l_m}$, $|z|^l_* := |z_1|^{l_1} + \ldots + |z_m|^{l_m}$, $|l|_* := |l_1| + \ldots + |l_m|$, якщо $z := (z_1, \ldots, z_m) \in \in \mathbb{C}^m$ і $l := (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{Z}^m_+$; запис $x \mho \xi$, де $\mho$ — деяке відношення, означає, що це відношення виконується для всіх відповідних координат точок $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^m$. Зафіксуємо довільно n з $\mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}$ та r-вимірний вектор ν', координати якого $\nu_j > -1/2, \quad j \in \mathbb{N}_r$, і покладемо $\mathbb{R}^n_{+,r} := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N}_r\}$. Крім цього, нехай $\xi' := (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $\xi'' := (\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n)$ для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$, тобто $\xi = (\xi'; \xi'')$. Ці позначення будемо використовувати і для інших аналогічних точок і векторів.

Нехай далі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ — сукупність усіх функцій $\check{\varphi}(x) := \varphi(x'^2; x'')$, $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для кожної з яких

$$\exists \{a_1, a_2, A_1, A_2, c\} \subset (0; +\infty) \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$\left| D^{q'}_{x'} \partial^{q''}_{x''} \check{\varphi}(x) \right| \leq c A_1^{|q'|_*} A_2^{|q''|_*} \frac{q^{q\vec{\beta}}}{\Gamma(\gamma' + q')} e^{-\left(a_1 |x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'} + a_2 |x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)}, \tag{1}$$

де

$$D_{x'}^{q'} := \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{x_j}\partial_{x_j}\right)^{q_j}, \qquad \partial_{x''}^{q''} := \prod_{j=r+1}^{n}\partial_{x_j}^{q_j},$$

$$\partial_{x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \Gamma(\gamma'+q') := \prod_{j=1}^{r}\Gamma(\gamma_j+q_j), \quad \gamma_j := \nu_j+\frac{1}{2}, \quad j\in\mathbb{N}_r,$$

а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція; $\vec{\alpha}$ і $\vec{\beta}$ — фіксовані n-вимірні вектори з додатними координатами такі, що $\vec{\alpha}'+\vec{\beta}'=\vec{2}'$, $\vec{\alpha}''+\vec{\beta}''\geq\vec{1}''$ $\big($тут $\vec{2}:=(2,\ldots,2)$, $\vec{1}:=(1,\ldots,1)$, а $1/\vec{\alpha}':=\vec{1}'/\vec{\alpha}'$ і $1/\vec{\alpha}'':=\vec{1}''/\vec{\alpha}''\big)$. Позначимо через $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta};\hat{A}_1,\hat{A}_2}_{\vec{\alpha};\hat{a}_1,\hat{a}_2}$, $\hat{a}_j>0$, $\hat{A}_j>0$, $j\in\mathbb{N}_2$, сукупність усіх функцій $\check{\varphi}$ з $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$, для яких нерівність (1) виконується при всіх $A_j\geq\hat{A}$ і $a_j\leq\hat{a}_j$. Якщо для $\check{\varphi}\in\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta};\hat{A}_1,\hat{A}_2}_{\vec{\alpha};\hat{a}_1,\hat{a}_2}$ покласти

$$\|\check{\varphi}\|_{\delta\rho} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n,q\in\mathbb{Z}_+^n}\left\{\frac{\left|D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}\check{\varphi}(x)\right|\Gamma(\gamma'+q')e^{(1-\rho)\left(a_1|x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'}+a_2|x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)}}{(\hat{A}_1+\delta)^{|q'|_*}(\hat{A}_2+\delta)^{|q''|_*}q^{q\vec{\beta}}}\right\},$$

$$\{\delta,\rho\}\subset\{1/j,\ j\geq 2\},$$

то, міркуючи, як у випадку просторів $S_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ [1], неважко переконатися, що з цією системою півнорм простір $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta};\hat{A}_1,\hat{A}_2}_{\vec{\alpha};\hat{a}_1,\hat{a}_2}$ є повним досконалим зліченно-нормованим, крім цього, $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}} = \bigcup\limits_{\hat{A}_j,\hat{a}_j^{-1}\geq 1}\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta};\hat{A}_1,\hat{A}_2}_{\vec{\alpha};\hat{a}_1,\hat{a}_2}$, причому послідовність $\{\check{\varphi}_j,\ j\geq 1\}\subset\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ збігається до $\check{\varphi}\in\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ у цьому просторі $\Big($позначатимемо $\check{\varphi}_j \xrightarrow[j\to\infty]{\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}} \check{\varphi}\Big)$ тоді і тільки тоді, коли:

а) послідовність є правильно збіжною на $\mathbb{R}^n$ (тобто для кожного $q\in\mathbb{Z}_+^n$ послідовність $D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}\check{\varphi}_j(x)$ збігається до $D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}\check{\varphi}(x)$ рівномірно щодо x на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$);

б) вона є обмеженою в $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$:

$$\exists\{a_1,a_2,A_1,A_2,c\}\subset(0;+\infty)\quad\forall q\in\mathbb{Z}_+^n\quad\forall x\in\mathbb{R}^n\quad\forall j\geq 1:$$

$$\left|D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}\check{\varphi}_j(x)\right|\leq c\frac{A_1^{|q'|_*}A_2^{|q''|_*}q^{q\vec{\beta}}}{\Gamma(\gamma'+q')}e^{-\left(a_1|x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'}+a_2|x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)}.$$

Безпосередньо переконуємось, що у просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ визначені й неперервні операції диференціювання $D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}$, $q\in\mathbb{Z}_+^n$, додавання та множення на функцію $\check{\mu}(x):=\mu(x'^2;x'')$, $\mu(\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, таку, що

$$\forall\delta\in(0;1)\quad\exists\{c_\delta,A_\delta\}\subset(0;+\infty)\quad\forall q\in\mathbb{Z}_+^n\quad\forall x\in\mathbb{R}^n:$$

$$\left|D_{x'}^{q'}\partial_{x''}^{q''}\check{\mu}(x)\right|\leq c_\delta\frac{A_\delta^{|q|_*}q^{q\vec{\beta}}}{\Gamma(\gamma'+q')}e^{\delta\left(|x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'}+|x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)} \tag{2}$$

(цю умову задовольняє, наприклад, кожен елемент з $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$). Звідси, враховуючи рівність

$$\partial_x^2\eta(x^2)=(D_x+x^2D_x^2)\eta(x^2)\qquad\big(\forall\eta(\cdot)\in C^\infty(\mathbb{R})\big),$$

як наслідок одержуємо, що комбінована операція диференціювання

$$B^{q'}_{\nu',x'}\partial^{q''}_{x''} := \left(\prod_{j=1}^{r} B^{q_j}_{\nu_j,x_j}\right)\partial^{q''}_{x''}, \quad q \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де $B_{\nu_j,x_j} := \partial^2_{x_j} + \dfrac{2\nu_j+1}{x_j}\partial_{x_j}$ — оператор Бесселя порядку ν_j, який діє за змінною x_j, також є визначеною і неперервною у просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$.

Через F_B і F_B^{-1} позначимо оператори прямого та оберненого перетворення Фур'є – Бесселя:

$$F_B[\check{\varphi}](\sigma) := \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \check{\varphi}(x)\left(\prod_{l=1}^{r} J_{\nu_l}(\sigma_l x_l)x_l^{2\nu_l+1}\right)e^{i(x'',\sigma'')}dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n_{+r},$$

$$F_B^{-1}[\check{\psi}](x) := c_{\nu'}\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \check{\psi}(\sigma)\left(\prod_{l=1}^{r} J_{\nu_l}(\sigma_l x_l)\sigma_l^{2\nu_l+1}\right)e^{-i(x'',\sigma'')}d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n_{+r}$$

$\Big($тут $c_{\nu'} := (2\pi)^{r-n}\prod_{j=1}^{r}\left(2^{2\nu_j}\Gamma^2(\nu_j+1)\right)^{-1}$, а $J_{\nu_l}(\cdot)$ — нормована функція Бесселя ν_l-го порядку$\Big)$.

Теорема 1. *Існують додатні сталі c_j і δ_j, $j \in \mathbb{N}_2$, такі, що для всіх $\{a_1, a_2\} \subset (0;1]$ і $\{A_1, A_2\} \subset [1;+\infty)$*

$$F_B\colon \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta};A_1,A_2}_{\vec{\alpha};a_1,a_2} \longrightarrow \overset{r}{S}{}^{\vec{\alpha};c_1a_1^{-\alpha_0},c_2a_2^{-\alpha_0}}_{\vec{\beta};\delta_1(a_1^{\alpha_0}A_1^{-1})^{\beta_0},\delta_2A_2^{-\beta_0}}, \qquad \alpha_0 := \max_{j\in\mathbb{N}_n}\alpha_j, \quad \beta_0 := \left(\min_{j\in\mathbb{N}_n}\beta_j\right)^{-1}.$$

Доведення. Насамперед зазначимо, що рівність [7]

$$J_p(\lambda\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2p}\theta\cos(\lambda\xi\sin\theta)d\theta, \qquad p > -\frac{1}{2}, \quad \{\lambda,\xi\} \subset [0;+\infty), \tag{3}$$

дозволяє продовжити $J_p(\cdot)$ парним способом на $\mathbb{R}$, причому це продовження є елементом простору $C^\infty(\mathbb{R})$. Тому функція $F_B[\check{\varphi}](\sigma)$ $\big(\forall\check{\varphi} \in \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}\big)$ також продовжується за змінною σ' на $\mathbb{R}^r$ парно і $F_B[\check{\varphi}](\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отже, $F_B[\check{\varphi}](\sigma) \equiv \psi(\sigma'^2;\sigma'')$, де $\psi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Використовуючи співвідношення [7]

$$\partial_\lambda J_p(\lambda\xi) = -\frac{1}{2}\lambda\xi^2\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+2)}J_{p+1}(\lambda\xi), \qquad B_{p,\xi}J_p(\lambda\xi) = -\lambda^2 J_p(\lambda\xi), \tag{4}$$

для всіх $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}^n_+$ і $\sigma_j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j \in \mathbb{N}_n$, одержуємо

$$D^{q'}_{\sigma'}\partial^{q''}_{\sigma''}F_B[\check{\varphi}](\sigma) = \left(\prod_{l=1}^{r}\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+1+q_l)}\right)\frac{(-1)^{|q'+k'|_*}i^{|q''+k''|_*}}{2^{|q'|_*}\sigma'^{2k'}\sigma''^{k''}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}}\check{\varphi}(x)x''^{q''}\times$$

$$\times\left(\prod_{l=1}^{r}B^{k_l}_{\nu_l+q_l,x_l}J_{\nu_l+q_l}(\sigma_l x_l)x_l^{2(\nu_l+q_l)+1}\right)\partial^{k''}_{x''}e^{i(x'',\sigma'')}dx.$$

Звідси шляхом інтегрування частинами отримуємо

$$\left|D_{\sigma'}^{q'}\partial_{\sigma''}^{q''}F_B[\check{\varphi}](\sigma)\right| \le \left(\prod_{l=1}^{r}\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+1+q_l)}\right)\left(|\sigma'^2|^{k'}|\sigma''|^{k''}\right)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}}\left|B_{\nu'+q',x'}^{k'}\partial_{x''}^{k''}\left(\check{\varphi}(x)x''^{q''}\right)\right| \times$$

$$\times\left(\prod_{l=1}^{r}\left|J_{\nu_l+q_l}(\sigma_l x_l)\right|x_l^{2(\nu_l+q_l)+1}\right)dx. \tag{5}$$

Далі, беручи до уваги зображення

$$B_{p,x}\eta(x^2) = 4(y\partial_y^2 + (p+1)\partial_y)\eta(y)\Big|_{y=x^2}, \qquad p > -\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

згідно з методом математичної індукції переконуємось у правильності рівності

$$B_{p,x}^k\eta(x^2) = 4^k\left(y^k\partial_y^{2k} + \sum_{j=1}^{k}C_k^j\left(\prod_{l=1}^{j}(p+1+k-l)\right)y^{k-j}\partial_y^{2k-j}\right)\eta(y)\Big|_{y=x^2},$$

$$p > -\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \eta(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

(тут C_k^j — біноміальний коефіцієнт), з якої, враховуючи, що

$$2\partial_y\eta(y)\Big|_{y=x^2} = D_x\eta(x^2), \tag{6}$$

приходимо до формули

$$B_{p,x}^k\eta(x^2) = \sum_{j=0}^{k}C_k^j 2^j\left(\prod_{l=1}^{j}(p+1+k-l)\right)x^{2(k-j)}D_x^{2k-j}\eta(x^2),$$

$$p > -\frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \eta(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$\Big($тут $\prod_{l=1}^{0}(p+1+k-l) := 1\Big)$.

Скористаємось цією формулою для оцінки виразу $\left|B_{\nu'+q',x'}^{k'}\partial_{x''}^{k''}\check{\varphi}(x)\right|$. Оскільки $\check{\varphi} \in {}^{r}S_{\vec{\alpha};a_1,a_2}^{\vec{\beta};A_1,A_2}$ і

$$\prod_{j=1}^{l}(p+q+1+k-j) \le \frac{\left(\left[p+\frac{3}{2}\right]+q+k\right)!}{\left(\left[p+\frac{3}{2}\right]+q+k-l\right)!} \le 2^{[p+3/2]+q+k}l!,$$

$$p > -\frac{1}{2}, \quad \{k,q\} \subset \mathbb{N}, \quad l \le k$$

(тут $[\cdot]$ — ціла частина числа), а також

$$\sup_{z>0}\left\{z^k e^{-z^{1/q}}\right\} = \left(\frac{q}{e}\right)^{kq}k^{kq}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad q > 0, \tag{7}$$

то

$$\left|B^{k'}_{\nu'+q',x'}\partial^{k''}_{x''}\check\varphi(x)\right| \le \prod_{j=1}^{r}\sum_{l_j=0}^{k_j} C^{l_j}_{k_j}2^{l_j}\left(\prod_{l_0=1}^{l_j}(\nu_j+q_j+1+k_j-l_0)\right)x_j^{2(k_j-l_j)}\left|D^{2k_j-l_j}_{x_j}\partial^{k''}_{x''}\check\varphi(x)\right| \le$$

$$\le c\left(2\left(\frac{2}{a_1}\right)^{|\vec\alpha'|_*}\right)^{|k'|_*} A_1^{|k'|_*}A_2^{|k''|_*}k''^{k''\vec\beta''}e^{-\left(\frac{a_1}{2}|x'^2|_*^{1/\vec\alpha'}+a_2|x''|_*^{1/\vec\alpha''}\right)}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{r}\sum_{l_j=0}^{k_j}C^{l_j}_{k_j}\left(\prod_{l_0=1}^{l_j}(\nu_j+q_j+1+k_j-l_0)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\Big(\Gamma\big(\gamma_j+1+2k_j-l_j\big)\Big)^{-1}(2k_j-l_j)^{\beta_j(2k_j-l_j)}\sup_{z_j>0}\left\{z_j^{k_j-l_j}e^{-z_j^{1/\alpha_j}}\right\}\right)\le$$

$$\le c_1\left(\left(c_{\vec\alpha'}\frac{2}{a_1}\right)^{|\vec\alpha'|_*}2^{2+2|\vec\beta'|_*}\right)^{|k'|_*}\times$$

$$\times A_1^{|k'|_*}A_2^{|k''|_*}2^{|q'|_*}k''^{k''\vec\beta''}e^{-\left(\frac{a_1}{2}|x'^2|_*^{1/\vec\alpha'}+a_2|x''|_*^{1/\vec\alpha''}\right)}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{r}\sum_{l_j=0}^{k_j}C^{l_j}_{k_j}k_j^{l_j+\beta(2k_j-l_j)+\alpha_j(k_j-l_j)}\times\Big(\Gamma\big(\gamma_j+1+2k_j-l_j\big)\Big)^{-1}\right),\qquad \{k,q\}\subset\mathbb{Z}^n_+,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

де $c_{\vec\alpha'} := \max\left\{1;|\vec\alpha'|_*/e\right\}$, а c_1 — додатна стала, не залежна від k, q і x. Звідси, використовуючи нерівності

$$\Gamma(\gamma+1+l)\ge l!\Gamma(\gamma+1),\qquad \gamma>0,\quad l\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\frac{1}{(2k-l)!}=\frac{(2k)!}{(2k-l)!l!}\frac{l!}{(2k)!}\le 2^{2k}\frac{k^l}{(2k)!},\qquad 0\le l\le k,\quad k\in\mathbb{N},$$

для всіх $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}^n_+$ і $x\in\mathbb{R}^n$ отримуємо оцінку

$$\left|B^{k'}_{\nu'+q',x'}\partial^{k''}_{x''}\check\varphi(x)\right|\le c_2 2^{|q'|_*}A_0^{|k'|_*}A_2^{|k''|_*}k^{k\vec\beta}e^{-\left(\frac{a_1}{2}|x'^2|_*^{1/\vec\alpha'}+a_2|x''|_*^{1/\vec\alpha''}\right)},$$
$$A_0 := A_1\Big(2c_{\vec\alpha'}a_1^{-1}\Big)^{|\vec\alpha'|_*}2^{5+2|\vec\beta'|_*},\tag{8}$$

в якій додатна стала c_2 не залежить від k, q та x (за умови, що $\vec\alpha'+\vec\beta'=\vec 2'$).

У свою чергу оцінка (8) забезпечує існування сталої $c>0$ такої, що

$$\left|B^{k'}_{\nu'+q',x'}\partial^{k''}_{x''}\big(\check\varphi(x)x''^{q''}\big)\right|\le$$

$$\leq c\left(2\left(2c_{\vec{\alpha}''}a_2^{-1}\right)^{|\vec{\alpha}''|_*}\right)^{|q''|_*} A_0^{|k'|_*}(2A_2)^{|k''|_*}k^{k\vec{\beta}}q''^{q''\vec{\alpha}''}e^{-\frac{1}{2}\left(a_1|x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'}+a_2|x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)}$$

$$\left(\forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\right)$$

при $\vec{\alpha}'+\vec{\beta}'=\vec{2}'$ і $\vec{\alpha}''+\vec{\beta}''\geq\vec{1}''$ $\left(\text{тут } c_{\vec{\alpha}''}:=\max\{1;|\vec{\alpha}''|_*/e\}\right)$. З огляду на оцінку

$$\left|J_{p+l}(\lambda\xi)\right|\leq c(p)\frac{\Gamma(p+l+1)}{\Gamma(p+l+1/2)},\qquad l\in\mathbb{Z}_+,\quad p>-\frac{1}{2},\quad \{\lambda,\xi\}\subset\mathbb{R}, \tag{9}$$

яка стає очевидною безпосередньо із зображення (3) (тут $c(p)$ — додатна величина, залежна лише від p), та на рівність

$$\inf_{l>0}\left\{\left(\frac{a}{z}\right)^l l^{lq}\right\}=e^{-\left((ae)^{-1}z\right)^{1/q}},\qquad \{a,q,z\}\subset(0;+\infty),$$

із (5) і (7) для всіх $\{q,k\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $\sigma_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j\in\mathbb{N}_n$, спочатку дістанемо

$$\left|D_{\sigma'}^{q'}\partial_{\sigma''}^{q''}F_B[\check{\varphi}](\sigma)\right|\leq c_1\frac{A_0^{|k'|_*}(2A_2)^{|k''|_*}k^{k\vec{\beta}}}{\Gamma(\gamma'+q')|\sigma'^2|^{k'}|\sigma''|^{k''}}2^{|q|_*}\left(2^2a_1^{-1}\right)^{|\vec{\alpha}'|_*|q'|_*}\left(2a_2^{-1}c_{\vec{\alpha}''}\right)^{|\vec{\alpha}''|_*|q''|_*}q^{q\vec{\alpha}}\times$$

$$\times\sup_{z'>\vec{0}'}\left\{|z'|^{\gamma'+q'}e^{-|z'|_*^{1/\vec{\alpha}'}}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}_{+,r}^n}e^{-\frac{1}{4}\left(a_1|x'^2|_*^{1/\vec{\alpha}'}+a_2|x''|_*^{1/\vec{\alpha}''}\right)}dx\leq$$

$$\leq c_2\frac{B_1^{|q'|_*}B_2^{|q''|_*}}{\Gamma(\gamma'+q')}q^{q\vec{\alpha}}\frac{A_0^{|k'|_*}(2A_2)^{|k''|_*}}{|\sigma'^2|^{k'}|\sigma''|^{k''}}k^{k\vec{\beta}},$$

$$B_1:=2(2^3ea_1^{-1}c_{\vec{\alpha}'})^{|\vec{\alpha}'|_*},\quad B_2:=2(2a_2^{-1}c_{\vec{\alpha}''})^{|\vec{\alpha}''|_*},$$

а відтак і

$$\left|D_{\sigma'}^{q'}\partial_{\sigma''}^{q''}F_B[\check{\varphi}](\sigma)\right|\leq c_2\frac{B_1^{|q'|_*}B_2^{|q''|_*}}{\Gamma(\gamma'+q')}q^{q\vec{\alpha}}\inf_{k'\in\mathbb{Z}_+^r}\left\{\frac{A_0^{|k'|_*}}{|\sigma'^2|^{k'}}k'^{k'\vec{\beta}'}\right\}\inf_{k''\in\mathbb{Z}_+^{n-r}}\left\{\frac{(2A_2)^{|k''|_*}}{|\sigma''|^{k''}}k''^{k''\vec{\beta}''}\right\}\leq$$

$$\leq c_2\frac{B_1^{|q'|_*}B_2^{|q''|_*}}{\Gamma(\gamma'+q')}q^{q\vec{\alpha}}e^{-\left((A_0e)^{-\beta_0}|\sigma'^2|_*^{1/\vec{\beta}'}+(2A_2e)^{-\beta_0}|\sigma''|_*^{1/\vec{\beta}''}\right)}.$$

Теорему доведено.

Враховуючи критерій збіжності у просторі $\overset{r}{S}{}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$ та властивість оборотності перетворення Фур'є – Бесселя, безпосередньо з теореми 1 одержуємо такий наслідок.

Наслідок. *Правильними є такі топологічні рівності*:

$$F_B\left[\overset{r}{S}{}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\right]=\overset{r}{S}{}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}},\qquad F_B^{-1}\left[\overset{r}{S}{}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}\right]=\overset{r}{S}{}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}.$$

При цьому оператори F_B і F_B^{-1} є неперервними та взаємно однозначними відображеннями в цих просторах.

Символом $T^h_{x,\nu'}$ позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, породжений комбінованою операцією диференціювання $B_{\nu',x'}\partial_{x''}$:

$$\bigl(T^h_{x,\nu'}\varphi\bigr)(x) := b_{\nu'} \int\limits_{[0;\pi]^r} \varphi\bigl(\eta^{h_1}_{x_1}(\xi_1), \ldots, \eta^{h_r}_{x_r}(\xi_r), \mu^{h_{r+1}}_{x_{r+1}}, \ldots, \mu^{h_n}_{x_n}\bigr) \left(\prod_{j=1}^{r} \sin^{2\nu_j} \xi_j\right) d\xi',$$

$$\{x, h\} \subset \mathbb{R}^n, \quad r \neq 0;$$

$$\bigl(T^h_{x,\nu'}\varphi\bigr)(x) := \varphi(x - h), \qquad \{x, h\} \subset \mathbb{R}^n, \quad r = 0,$$

де

$$\eta^{h_j}_{x_j}(\xi_j) := \sqrt{x_j^2 + h_j^2 - 2x_j h_j \cos \xi_j}, \qquad \mu^{h_j}_{x_j} := x_j - h_j, \quad b_{\nu'} := \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma\left(\gamma_j + \dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\Gamma(\gamma_j)},$$

а $[0;\pi]^r := [0;\pi] \times \ldots \times [0;\pi] \subset \mathbb{R}^r$.

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості $T^h_{x,\nu'}$.

Лема 1. *Оператор* $T^h_{x,\nu'}$ *є визначеним і неперервним у просторі* $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що при кожному фіксованому ξ з $\mathbb{R}^n$ функція

$$M_\xi(\sigma) := \left(\prod_{l=1}^{r} J_{\nu_l}(\sigma_l \xi_l)\right) e^{\pm i(\sigma'', \xi'')}, \qquad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

є мультиплікатором у кожному просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$. Справді, згідно із співвідношеннями (4) і (9) маємо

$$\left|D^{q'}_{\sigma'}\partial^{q''}_{\sigma''} M_\xi(\sigma)\right| \leq \left(\prod_{l=1}^{r} \frac{\Gamma(\nu_l + 1)}{\Gamma(\nu_l + 1 + q_l)} \bigl|J_{\nu_l + q_l}(\sigma_l \xi_l)\bigr|\right) |\xi'^2|^{q'} |\xi''|^{q''} \leq$$

$$\leq c \frac{|\xi'^2|^{q'} |\xi''|^{q''}}{\Gamma(\gamma' + q')}, \qquad q \in \mathbb{Z}^n_+, \quad \{\sigma, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Отже, для $M_\xi(\cdot),\ \xi \in \mathbb{R}^n$, виконується оцінка (2).

Використовуючи тепер властивості оператора $T^\xi_{x,\nu'}$ (див. [7]), одержуємо

$$F_B[T^\xi_{x,\nu'}\check{\varphi}](\cdot) = M_\xi(\cdot) F_B[\check{\varphi}](\cdot) \quad (\forall \varphi \in \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}). \tag{10}$$

Звідси на підставі наслідку приходимо до рівності

$$T^\xi_{x,\nu'}\check{\varphi}(x) = F_B^{-1}\bigl[M_\xi(\sigma) F_B[\check{\varphi}](\sigma)\bigr](x;\xi), \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

з якої і випливає твердження леми 1.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* φ *належить* $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ *і* $\check{\psi}_\xi(x) := T^\xi_{x,\nu'}\check{\varphi}(x),\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$. *Тоді для кожного* $k \in \mathbb{Z}^n_+$ *існує* $D^{k'}_{\xi'}\partial^{k''}_{\xi''}\check{\psi}_\xi(\cdot)$ *у розумінні топології простору* $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$.

Доведення. Спочатку доведемо існування похідної $D_{\xi_j}\check{\psi}_\xi(\cdot)$ за топологією $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$, тобто переконаємось у виконанні граничного співвідношення

$$\psi_\xi^{\Delta_j}(x) := \frac{2}{\Delta_j}\left\{T^{\widetilde{\xi+\Delta_j}}_{x,\nu'} - T^{\xi}_{x,\nu'}\right\}\check{\psi}_\xi(x) \xrightarrow[\Delta_j\to 0]{\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}} D_{\xi_j}\check{\psi}_\xi(x), \qquad j\in\mathbb{N}_r, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де $\widetilde{\xi+\Delta_j} := \left(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\sqrt{\xi_j^2+\Delta_j},\xi_{j+1},\ldots,\xi_n\right)$ (тут враховано рівність (6)). Для цього, з огляду на неперервність операторів F_B і F_B^{-1} (див. наслідок), достатньо довести, що

$$\Phi_\xi^{\Delta_j}(\cdot) := F_B\left[\psi_\xi^{\Delta_j}(x) - D_{\xi_j}\check{\psi}_\xi(x)\right](\cdot) \xrightarrow[\Delta_j\to 0]{\overset{r}{S}{}^{\vec{\alpha}}_{\vec{\beta}}} 0. \tag{11}$$

Згідно з критерієм збіжності у просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\alpha}}_{\vec{\beta}}$, співвідношення (11) виконуватиметься, якщо:

1) сім'я функцій $\Phi_\xi^{\Delta_j}(\cdot)$ правильно збігається на $\mathbb{R}^n$ при $\Delta_j\to 0$;

2) ця сім'я є обмеженою у просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec{\alpha}}_{\vec{\beta}}$ при досить малих $|\Delta_j|$.

Встановимо твердження 1. З огляду на рівність (10) одержуємо

$$F_B\left[\psi_\xi^{\Delta_j}(x)\right](\zeta) =$$

$$= 2\left\{\frac{J_{\nu_j}\left(\sqrt{z_j+\overline{\Delta}_j}\right) - J_{\nu_j}\left(\sqrt{z_j}\right)}{\overline{\Delta}_j}\right\}\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta), \qquad \overline{\Delta}_j := \zeta_j^2\Delta_j, \quad z_j := \xi_j^2\zeta_j^2, \quad \{\xi,\zeta\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta) := \zeta_j^2\left(\prod_{l=1}^{j-1}J_{\nu_l}(\xi_l\zeta_l)\right)\left(\prod_{l=r+1}^{n}J_{\nu_l}(\xi_l\zeta_l)\right)e^{i(\xi'',\zeta'')}F_B[\check{\varphi}](\zeta).$$

Звідси, використовуючи рівність

$$2\frac{J_p\left(\sqrt{z+\Delta}\,\right) - J_p\left(\sqrt{z}\,\right)}{\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+2)}J_{p+1}(\sqrt{z+\theta\Delta}),$$

$$\theta\in(0;1), \quad p > -\frac{1}{2}, \quad z\geq 0, \quad |\Delta|>0,$$

яку одержуємо безпосередньо з (4) і теореми Лагранжа „про скінченні прирости”, приходимо до зображення

$$F_B\left[\psi_\xi^{\Delta_j}(x)\right](\zeta) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\nu_j+1)}{\Gamma(\nu_j+2)}J_{\nu_j+1}\left(\sqrt{\xi_j^2+\theta_j\Delta_j}\zeta_j\right)\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta), \qquad \{\xi,\zeta\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \theta_j\in(0;1).$$

Аналогічним способом переконуємось у тому, що

$$F_B\left[D_{\xi_j}\check{\psi}_\xi(x)\right](\zeta) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\nu_j+1)}{\Gamma(\nu_j+2)}J_{\nu_j+1}\left(\sqrt{\xi_j^2}\zeta_j\right)\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta), \qquad \{\xi,\zeta\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Таким чином,

$$\Phi_\xi^{\Delta_j}(\zeta) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\nu_j+1)}{\Gamma(\nu_j+2)}\left(J_{\nu_j+1}\Big(\sqrt{\xi_j^2+\theta_j\Delta_j}\zeta_j\Big) - J_{\nu_j+1}\Big(\sqrt{\xi_j^2}\zeta_j\Big)\right)\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta) =$$

$$= \theta_j\Delta_j\frac{\Gamma(\nu_j+1)}{\Gamma(\nu_j+3)}J_{\nu_j+2}\left(\sqrt{\xi_j^2+\theta_j'\Delta_j}\zeta_j\right)\widetilde{M}'_\varphi(\xi;\zeta), \tag{13}$$

$$\widetilde{M}'_\varphi(\xi;\zeta) := \zeta_j^2\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta), \qquad \{\xi,\zeta\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \{\theta_j,\theta_j'\}\subset(0;1).$$

Враховуючи тепер належність $\widetilde{M}'_\varphi(\xi;\cdot)$ до простору $\overset{r}{S}{}^{\vec\alpha}_{\vec\beta}$, а також те, що

$$\left|D_{\zeta_j}^{k_j}J_{\nu_j+2}\Big(\sqrt{\xi_j^2+\theta_j'\Delta_j}\zeta_j\Big)\right| =$$

$$= \left|\Big(-\frac{1}{2}(\xi_j^2+\theta_j'\Delta_j)\Big)^{k_j}\frac{\Gamma(\nu_j+3)}{\Gamma(\nu_j+3+k_j)}J_{\nu_j+k_j+2}\Big(\sqrt{\xi_j^2+\theta_j'\Delta_j}\zeta_j\Big)\right| \le$$

$$\le c(\nu_j+2)\big(\xi_j^2+1\big)^{k_j}\frac{\Gamma(\nu_j+3)}{\Gamma(\nu_j+k_j+5/2)}, \qquad |\theta_j'\Delta_j|\le 1, \quad \{\xi_j,\zeta_j\}\subset\mathbb{R}, \quad k_j\in\mathbb{Z}_+ \tag{14}$$

(див. (4) і (9)), з (19) одержуємо твердження 1.

Твердження 2 стає очевидним, якщо зважити на зображення (13), належність $\widetilde{M}'_\varphi(\xi;\cdot)$ до $\overset{r}{S}{}^{\vec\alpha}_{\vec\beta}$ (при кожному фіксованому ξ з $\mathbb{R}^n$) та оцінку (14).

Отже, встановлено існування похідної $D_{\xi_j}\check\psi_\xi(\cdot)$ у сенсі топології простору $\overset{r}{S}{}^{\vec\alpha}_{\vec\beta}$.

Зазначимо, що у $\overset{r}{S}{}^{\vec\beta}_{\vec\alpha}$ визначено операцію $D_{\xi'}^{k'}\partial_{\xi''}^{k''}$, тому функція $\eta_\xi(\cdot) := D_{\xi_j}\check\psi(\cdot)$ є елементом простору $\overset{r}{S}{}^{\vec\beta}_{\vec\alpha}$; крім цього, безпосередньо з (12) знаходимо

$$\eta_\xi(x) = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\nu_j+1)}{\Gamma(\nu_j+2)}F_B^{-1}\left[J_{\nu_j+1}(\xi_j\zeta_j)\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta)\right](\xi;x), \qquad \{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n, \quad j\in\mathbb{N}_r.$$

Звідси приходимо до висновку, що для доведення існування похідної $D_{\xi_j}\partial_{\xi_l}\check\psi_\xi(\cdot)$ у розумінні збіжності у просторі $\overset{r}{S}{}^{\vec\beta}_{\vec\alpha}$ $\big($при $j\in\mathbb{N}_r,\ l\in\{r+1,\ldots,n\}\big)$ досить встановити граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta_l}\Big\{\eta_{\widetilde{\xi+\Delta_l}}(\cdot)-\eta_\xi(\cdot)\Big\} \xrightarrow[\Delta_l\to0]{\overset{r}{S}{}^{\vec\beta}_{\vec\alpha}} 0$$

(тут $\widetilde{\xi+\Delta_l} := (\xi_1,\ldots,\xi_{l-1},\xi_l+\Delta_l,\xi_{l+1},\ldots,\xi_n)$), яке, очевидно, рівносильне такому:

$$\frac{1}{\Delta_l}\Big\{e^{i\Delta_l\zeta_l}-1\Big\}J_{\nu_j+1}(\xi_j\zeta_j)\widetilde{M}_\varphi(\xi;\zeta) \xrightarrow[\Delta_l\to0]{\overset{r}{S}{}^{\vec\alpha}_{\vec\beta}} 0. \tag{15}$$

В тому, що співвідношення (15) справджується, переконуємось, як у випадку (11).

Продовжуючи цей процес за індукцією, приходимо до твердження леми 2.

Лему доведено.

Згортку двох функцій φ і ψ з простору $\overset{r}{S}{}^{\vec\beta}_{\vec\alpha}$ означимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \Big(T^{\xi}_{x,\nu'}\varphi(x)\Big)\psi(\xi)\Big(\prod_{j=1}^{r}\xi_j^{2\nu_j+1}\Big)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Традиційним способом переконуємось, що для зазначених функцій φ і ψ правильною є рівність

$$F_B\big[\varphi * \psi\big](\cdot) = F_B[\varphi](\cdot)F_B[\psi](\cdot).$$

Через $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}\,\prime}_{\vec{\alpha}}$ позначимо простір, топологічно спряжений з $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$; елементи цього простору називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки у $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ визначено неперервний оператор комбінованого зсуву $T^{\xi}_{x,\nu'}$ (див. лему 1), то згортку узагальненої функції $f \in \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}\,\prime}_{\vec{\alpha}}$ з елементом $\varphi \in \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \Big\langle f, T^{\xi}_{x,\nu'}\varphi(x)\Big\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Безпосередньо з леми 2 одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай f належить $\overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}\,\prime}_{\vec{\alpha}}$, тоді для кожного $\varphi \in \overset{r}{S}{}^{\vec{\beta}}_{\vec{\alpha}}$ відповідна згортка $(f *\ \varphi)(\cdot)$ належить $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.
4. *Кашпировский А. И.* Граничные значения некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.
5. *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
6. *Літовченко В. А.* Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних систем у просторах нескінченно диференційовних функцій: Автореф. дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2009. – 32 с.
7. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, вып. 2(242). – С. 102 – 143.

Одержано 13.04.11,
після доопрацювання — 05.02.13