УДК 517.51

А. П. Мусієнко, А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУМ ВАЛЛЕ ПУССЕНА НА МНОЖИНАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ*

For functions from the sets $C^{\psi}_{\beta}C$ and $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1 \leq s \leq \infty$ generated by sequences $\psi(k) > 0$ satisfying the d'Alembert condition $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$, we obtain asymptotically unimprovable estimates for the deviations of de la Vallée Poussin sums in the uniform metric in terms of the best approximations of the (ψ,β)-derivatives of functions of this sort by trigonometric polynomials in the metrics of the spaces L_s. It is proved that the obtained estimates are unimprovable in some important functional subsets of $C^{\psi}_{\beta}C$ та $C^{\psi}_{\beta}L_s$.

Для функций из множеств $C^{\psi}_{\beta}C$ и $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1 \leq s \leq \infty$, порождаемых последовательностями $\psi(k) > 0$, которые удовлетворяют условию Даламбера $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$, получены асимптотически неулучшаемые оценки уклонений в равномерной метрике сумм Валле Пуссена. Эти оценки выражаются через значения наилучших приближений (ψ,β)-производных таких функций тригонометрическими полиномами в метриках пространств L_s. Доказано, что полученные оценки остаются неулучшаемыми на некоторых важных функциональных подмножествах из $C^{\psi}_{\beta}C$ и $C^{\psi}_{\beta}L_s$.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій f з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_s — простір 2π-періодичних сумовних функцій з нормою

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^{2\pi} \big|f(t)\big|^s dt\right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\leq t\leq 2\pi} \big|f(t)\big|, & s = \infty. \end{cases}$$

У даній роботі розглядаються множини $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій, що введені О. І. Степанцем [1, 2] таким чином. Нехай f — 2π-періодична сумовна функція ($f \in L_1$) і

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то цю функцію називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β} [1, с. 25]. Множину всіх функцій f, які задовольняють таку умову, позначають через L^{ψ}_{β}. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і в той же час $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N} \subset L_1$, то записують $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

*Виконано за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект № GP/Ф36/068).

Якщо $F^{\psi}_{\beta} = f$, то функцію F називають (ψ,β)-інтегралом функції f, при цьому записують $F(x) = \mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(f;x)$. Покладемо $L^{\psi}_{\beta}\bigcap C = C^{\psi}_{\beta}$, $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}\bigcap C = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі роль $\mathfrak{N}$ відіграватимуть простори C чи L_s, $1\le s\le\infty$, або ж деякі їх підмножини.

В рамках роботи будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$, яка породжує класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, задовольняє умову $\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, тобто додатна і задовольняє рівність

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q. \tag{1}$$

В такому випадку будемо використовувати запис: $\psi\in\mathcal{D}_q$. Множини $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, складаються з 2π-періодичних функцій $f(x)$, які допускають регулярне продовження у смугу $|\mathrm{Im} z|\le \ln\dfrac{1}{q}$ комплексної площини.

Відомо [2, с. 136], що класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, складаються з функцій, які майже скрізь можна зобразити у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\Psi_{\beta}(t)dt, \qquad \varphi\in\mathfrak{N}, \quad \varphi\perp 1, \tag{2}$$

з ядром

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Якщо ж $f\in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, то рівність (2) виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

У випадку, коли

$$\psi(k) = e^{-\alpha k^r}, \qquad \alpha>0, \quad r>0, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

множини $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будемо позначати через $L^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ і $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ відповідно. Множини $C^{\alpha,r}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з узагальнених інтегралів Пуассона (див., наприклад, [3, с. 926]), тобто функцій вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{\alpha,r,\beta}(t)\,dt, \qquad \varphi\in\mathfrak{N}, \quad \varphi\perp 1, \quad a_0\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

де $P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$ — узагальнені ядра Пуассона з параметрами $\alpha>0$ $r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$. Функцію φ в рівності (4) будемо позначати через $f^{\alpha,r}_{\beta}$. Узагальнені інтеграли Пуассона (тобто функції f вигляду (4)) будемо позначати через $\mathcal{J}^{\alpha,r}_{\beta}(\varphi)$.

При $r=1$ ядра $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ є звичайними ядрами Пуассона з параметрами α і β, тобто $P_{\alpha,1,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k}\cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$, а інтеграли $\mathcal{J}^{\alpha,1}_{\beta}(\varphi)$ — звичайними інтегралами Пуассона функції $\varphi\in\mathfrak{N}$. Неважко переконатися, що при $r=1$ послідовність $\psi(k)$ вигляду (3) задовольняє умову $\mathcal{D}_q$, де $q=e^{-\alpha}$.

Одиничну кулю простору L_s, $1\le s\le\infty$, позначимо через $U_s\colon\ U_s = \big\{f\colon f\in L_s, \|f\|_s\le 1\big\}$. Для скорочення запису покладемо $C^{\psi}_{\beta}U_s = C^{\psi}_{\beta,s}$, $L^{\psi}_{\beta}U_s = L^{\psi}_{\beta,s}$.

Підпростір тригонометричних поліномів t_{m-1}, порядок яких не перевищує $m-1$, позначимо через $\mathcal{T}_{2m-1}$. Величина $E_m(f)_X = \inf_{t_{m-1}\in\mathcal{T}_{2m-1}} \|f - t_{m-1}\|_X$ є найкращим наближенням функції $f \in X \subset L_1$ у метриці простору X тригонометричними поліномами порядку $m-1$. Далі роль X відіграватимуть простори C або L_s, $1 \le s \le \infty$.

Якщо $f \in L_1$, то поліноми вигляду

$$V_{n,p}(f) = V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

де $S_k(f) = S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, а $p = p(n)$, $p \le n$, — певний натуральний параметр, називають сумами Валле Пуссена функції f. При $p = 1$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ є частинними сумами Фур'є $S_{n-1}(f)$ порядку $n-1$; якщо ж $p = n$, то суми $V_{n,p}(f)$ перетворюються у відомі суми Фейєра $\sigma_{n-1}(f)$ порядку $n-1$ $\sigma_{n-1}(f) = \sigma_{n-1}(f;x) = = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x)$.

Для сум Валле Пуссена має місце нерівність Лебега (див., наприклад, [4, с. 61])

$$\big\|f - V_{n,p}(f)\big\|_C \le \big(\|V_{n,p}\| + 1\big) E_{n-p+1}(f)_C, \tag{5}$$

де $\|V_{n,p}\| \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\|f\|_C\le 1} \|V_{n,p}(f;\cdot)\|_C$ — норма оператора $V_{n,p}$. При $p = 1$ формула (5) належить А. Лебегу [5]. Оцінки величин $\|V_{n,p}\|$ встановлювались у роботах Валле Пуссена [6], С. М. Нікольського [7], С. Б. Стєчкіна [8] та ін. Подальший розвиток вказаної тематики пов'язаний з дослідженнями О. Д. Габісонії [9], А. А. Захарова [10], С. Б. Стєчкіна [4] та ін. У цих роботах значення величин $\big\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\big\|_C$, де $\rho_{n,p}(f;x) \stackrel{\text{df}}{=} f(x) - V_{n,p}(f;x)$, оцінювались через найкращі наближення $E_m(f)_C$. Зазначимо, що остаточні порядкові результати в даному напрямі належать С. Б. Стєчкіну [4, с. 62], який довів, що для довільної функції $f \in C$ і будь-яких $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, виконується нерівність

$$\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\|_C \le A \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{n-p+k+1}(f)_C}{p+k}, \tag{6}$$

де A — деяка абсолютна стала. Ним же було доведено, що нерівність (6) є точною за порядком для досить широкої множини функціональних компактів. Дійсно, якщо $\varepsilon = \varepsilon_m$, $m \in \mathbb{N}$, — довільна монотонно незростаюча, нескінченно мала послідовність, а $C(\varepsilon)$ — множина функцій $\varphi \in C$, для яких $E_m(\varphi)_C \le \varepsilon_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$, то існують абсолютні сталі A_1 і A_2 такі, що для всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$,

$$A_1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-p+k+1}}{p+k} \le \sup_{f\in C(\varepsilon)} \big\|\rho_{n,p}(f;\cdot)\big\|_C \le A_2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-p+k+1}}{p+k}. \tag{7}$$

При $p = 1$ і $p = n$ співвідношення (7) доведено в роботах [11] і [12] відповідно.

Асимптотична поведінка величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; V_{n,p})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f - V_{n,p}(f)\|_X, \quad X \subset L_1, \tag{8}$$

на деяких важливих класах періодичних функцій $\mathfrak{N} \subset X$ при $X = C$ досліджувались у багатьох роботах (див., наприклад [13 – 16]). Детальніше ознайомитись з відомими результатами у даному напрямку та з історією питання можна, наприклад, у бібліографічних коментарях до монографій [2, 17, 19]. На класах $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ асимптотична поведінка величин (8) при $\psi \in \mathcal{D}_q$ досліджувалась у роботах [18 – 25]. Для класів $C^{\psi}_{\beta,s}$ при $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $1 \le s \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, найбільш завершені результати по дослідженню асимптотики величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; V_{n,p})$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, містяться в роботах [23, с. 1674; 25, с. 4], з яких, зокрема, випливає, що при $n - p \to \infty$ має місце рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; V_{n,p})_C = \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + \right.$$

$$\left. + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\right), \tag{9}$$

де $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$,

$$K_{q,p}(u) = 2^{-1/u}\left\| \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2} \right\|_u, \qquad 1 \le u \le \infty, \quad q \in (0,1), \quad p \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\sigma(u,p) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad u = 1 \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 2 & \text{при} \quad 1 < u \le \infty \quad \text{і} \quad p = 1, \\ 3 & \text{при} \quad 1 \le u \le \infty \quad \text{і} \quad p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, \end{cases} \tag{11}$$

$$\delta(s) = \begin{cases} 0, & s = 2, \\ 1, & s \in [1,\infty] \setminus \{2\}, \end{cases} \tag{12}$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(\psi) = \sup_{k \ge m}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|, \tag{13}$$

а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

У роботі [26] встановлено аналоги нерівностей Лебега для функцій f з $L^{\alpha,1}_{\beta}L_s$, $1 \le s \le \infty$, $\alpha > 0$, в яких оцінки відхилень $\big\|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\big\|_s$ виражалися через найкращі наближення функцій $f^{\alpha,1}_{\beta}$ у метриках просторів L_s. А саме, доведено, що для довільних $f \in L^{\alpha,1}_{\beta}L_s$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, має місце нерівність

$$\big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_s \le \left(\frac{8q^n}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^2 n}\right) E_n(f^{\alpha,1}_{\beta})_{L_s}, \tag{14}$$

де $q = e^{-\alpha}$,

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dv}{\sqrt{1-q^2\sin^2 v}}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по параметрах n, q, β, s, $f \in L_{\beta}^{\alpha,1} L_s$. При $s = 1, \infty$ доведено асимптотичну непокращуваність одержаних нерівностей. У [27] результати роботи [26] було узагальнено на випадок сум Валле Пуссена.

Дану роботу, яка є продовженням досліджень [26, 27], присвячено встановленню асимптотично непокращуваних аналогів нерівностей типу Лебега для сум $V_{n,p}(f)$ на множинах $C_{\beta}^{\psi} L_s$ при $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \leq s \leq \infty$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, *і* $1 \leq s \leq \infty$. *Тоді для довільної функції* $f \in C_{\beta}^{\psi} L_s$ *справджується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C \leq \frac{\psi(n-p+1)}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + \right.$$

$$\left. + O(1) \left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2} \min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\} \right) \right) E_{n-p+1}(f_{\beta}^{\psi})_{L_s}, \qquad (15)$$

в якій $s' = \dfrac{s}{s-1}$, *а* $K_{q,p}(s')$, $\sigma(s',p)$, $\delta(s)$ *і* ε_{n-p+1} *визначаються формулами* (10), (11), (12) *і* (13) *відповідно.*

При цьому для будь-якої функції $f \in C_{\beta}^{\psi} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$, *і довільних* $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, *у множині* $C_{\beta}^{\psi} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$, *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F_{\beta}^{\psi})_{L_s} = E_{n-p+1}(f_{\beta}^{\psi})_{L_s}$, *і для неї при* $n-p \to \infty$ *виконується рівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(F;x)\right\|_C = \frac{\psi(n-p+1)}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p} L(s') + \right.$$

$$\left. + O(1) \left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2} \min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\} \right) \right) E_{n-p+1}(F_{\beta}^{\psi})_{L_s}. \qquad (16)$$

У (15) *і* (16) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Із теореми 1 випливає, що нерівність (15) є асимптотично точною при $n-p \to \infty$ на всіх множинах $C_{\beta}^{\psi} L_s$ при довільних $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 \leq s \leq \infty$. Покажемо, що ця ж нерівність залишається асимптотично точною і на деяких важливих підмножинах із $C_{\beta}^{\psi} L_s$. Дійсно, розглядаючи точні верхні межі обох частин (15) по класах $C_{\beta,s}^{\psi}$, $1 \leq s \leq \infty$, і враховуючи, що $E_{n-p+1}(f_{\beta}^{\psi})_{L_s} \leq 1$, отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C_{\beta,s}^{\psi}; V_{n,p}\right)_C \leq \frac{\psi(n-p+1)}{p} \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}} K_{q,p}(s') + \right.$$

$$\left. + O(1) \left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2} \min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\} \right) \right). \qquad (17)$$

Співставляючи останнє співвідношення з асимптотичною рівністю (9), приходимо до висновку, що в (17) можна поставити знак рівності.

Важливими прикладами ядер Ψ_{β}, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову $\psi \in \mathcal{D}_q$, є полігармонічні ядра Пуассона (див. [29, с. 256, 257])

$$P_{q,\beta}(l,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_l(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad l \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

де

$$\psi_l(k) = q^k \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(1-q^2)^j}{j! 2^j} \prod_{\nu=0}^{j-1} (k + 2\nu)\right), \qquad q \in (0,1); \tag{19}$$

ядра Пуассона для рівняння теплопровідності (див. [30, с. 269])

$$\mathcal{P}_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{q^k + q^{-k}} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}; \tag{20}$$

ядра Неймана (див. [2, с. 361])

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{21}$$

та ін.

Для величин ε_m вигляду (13), що породжуються послідовностями $\psi(k) = \psi_l(k)$ ядер $P_{q,\beta}(l,t)$, при $l = 1$ справджується тотожність

$$\varepsilon_m \equiv 0, \tag{22}$$

а при $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, як доведено в [31, с. 108] (див. також [32, с. 180]), виконується нерівність

$$\varepsilon_m(l) \le \frac{(2l-3)q}{m}, \qquad m \in \mathbb{N}; \tag{23}$$

для ε_m, породжених послідовностями $\psi(k) = \dfrac{2}{q^k + q^{-k}}$ ядер $\mathcal{P}_{q,\beta}(t)$, справджується оцінка

$$\varepsilon_m = \sup_{k \ge m} \frac{q^{2k+1}(1-q^2)}{1 + q^{2(k+1)}} = \frac{q^{2m+1}(1-q^2)}{1 + q^{2(m+1)}} < q^{2m+1}; \tag{24}$$

для ε_m, що породжуються послідовностями $\psi(k) = \dfrac{q^k}{k}$ ядер $N_{q,\beta}(t)$, легко довести рівність

$$\varepsilon_m = \sup_{k \ge m} \frac{q}{k+1} = \frac{q}{m+1}. \tag{25}$$

Із теореми 1 і формул (22) – (25) отримуємо наступні твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай множини $C^{\psi}_{\beta} L_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, породжуються коефіцієнтами $\psi(k) = \psi_l(k)$ ядер $P_{q,\beta}(l,t)$, $l \in \mathbb{N}$, вигляду* (18)*. Тоді для довільних $f \in C^{\psi}_{\beta} L_s$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, виконується нерівність*

$$\left\| \rho_{n,p}(f;x) \right\|_C \le \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(1 + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{(1-q^2)^j}{j! 2^j} \prod_{\nu=0}^{j-1} (k + 2\nu)\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{lq}{(n-p+1)(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}, \tag{26}$$

де $s'=\dfrac{s}{s-1}$, *а* $K_{q,p}(s')$, $\sigma(s',p)$ *і* $\delta(s)$ *визначаються формулами* (10), (11) *і* (12) *відповідно.*

При цьому для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1\le s\le\infty$, *і довільних* n, $p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, *у множині* $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1\le s\le\infty$, *знайдеться функція* $F(x)=F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}=$ $=E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}$, *і для неї при* $n-p\to\infty$ *виконується рівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(F;x)\right\|_C=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(1+\sum_{j=1}^{l-1}\frac{(1-q^2)^j}{j!2^j}\prod_{\nu=0}^{j-1}(k+2\nu)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{lq}{(n-p+1)(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}. \tag{27}$$

У (26) *і* (27) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Наслідок 2. *Нехай множини* $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\le s\le\infty$, *породжуються коефіцієнтами* $\psi(k)=\dfrac{2}{q^k+q^{-k}}$ *ядер* $\mathcal{P}_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (20). *Тоді для довільних* $f\in C^{\psi}_{\beta}L_s$, n, $p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, *справджується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C\le$$

$$\le\frac{2q^{n-p+1}}{(1+q^{2(n-p+1)})p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s')+O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{q^{2(n-p)+3}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}, \tag{28}$$

де $s'=\dfrac{s}{s-1}$, *а* $K_{q,p}(s')$, $\sigma(s',p)$ *і* $\delta(s)$ *визначаються формулами* (10), (11) *і* (12) *відповідно.*

При цьому для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1\le s\le\infty$, *і довільних* n, $p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, *у множині* $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1\le s\le\infty$, *знайдеться функція* $F(x)=F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}=$ $=E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}$, *і для неї при* $n-p\to\infty$ *виконується рівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(F;x)\right\|_C=$$

$$= \frac{2q^{n-p+1}}{(1+q^{2(n-p+1)})p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{q^{2(n-p)+3}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}. \tag{29}$$

У (28) *і* (29) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Наслідок 3. *Нехай множини* $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le s \le \infty$, *породжуються коефіцієнтами* $\psi(k) = \dfrac{q^k}{k}$ *ядер* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (21). *Тоді для довільних* $f \in C^{\psi}_{\beta}L_s$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, *справджується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_C \le$$

$$\le \frac{q^{n-p+1}}{p(n-p+1)}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{q}{(n-p+2)(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}, \tag{30}$$

де $s' = \dfrac{s}{s-1}$, *а* $K_{q,p}(s')$, $\sigma(s',p)$ *і* $\delta(s)$ *визначаються формулами* (10), (11) *і* (12) *відповідно.*

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1 \le s \le \infty$, *і довільних* n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, *у множині* $C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1 \le s \le \infty$, *знайдеться функція* $F(x) = F(f;n;p;x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s} = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}$, *і для неї при* $n-p \to \infty$ *виконується рівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(F;x)\right\|_C =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p(n-p+1)}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{q}{(n-p+2)(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\beta})_{L_s}. \tag{31}$$

У (30) *і* (31) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Оскільки, як зазначалося вище, при $p = 1$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f)$ перетворюються в суми Фур'є $S_{n-1}(f)$, то з (15) для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta}L_s$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $1 \le s \le \infty$, випливає нерівність

$$\left\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\right\|_C \le$$

$$\le \psi(n)\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,1}(s') + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right)E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_s}. \tag{32}$$

У роботі [34] (див. формулу (25)) показано, що при $1 \le u < \infty$

$$K_{q,1}(u) = \pi^{1/u} F^{1/u}\left(\frac{u}{2}, \frac{u}{2}; 1; q^2\right),$$

де $F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$, $(x)_k = x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)$ — гіпергеометрична функція Гаусса. Тому для $1 < s \leq \infty$ нерівність (32) можемо записати у вигляді

$$\big\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\big\|_C \leq$$

$$\leq \psi(n)\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi} F^{1/s'}\left(\frac{s'}{2}, \frac{s'}{2}; 1; q^2\right) + O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{n(1-q)^{\sigma(s',1)}} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_s}. \quad (33)$$

Якщо $s' = 1$, то (див. [35, с. 919])

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; q^2\right) = 2\mathbf{K}(q), \quad (34)$$

де $\mathbf{K}(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду.

Із (33), з урахуванням (11), (12) і (34), для довільної $f \in C_\beta^\psi L_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, можемо записати нерівність

$$\big\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\big\|_C \leq$$

$$\leq \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_\infty}. \quad (35)$$

Якщо $\psi(k) = e^{-\alpha k}$, $\alpha > 0$, то з (35) випливає нерівність (14) при $s = \infty$.

Розглядаючи точні верхні межі обох частин (35) по класах $C_{\beta,\infty}^\psi$, отримуємо

$$\mathcal{E}\big(C_{\beta,\infty}^\psi; S_{n-1}\big)_C \leq \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right). \quad (36)$$

Співставляючи це співвідношення з отриманою в роботі [28, с. 384] асимптотичною при $n \to \infty$ рівністю

$$\mathcal{E}\big(C_{\beta,\infty}^\psi; S_{n-1}\big)_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \quad (37)$$

приходимо до висновку, що при $s = \infty$ у співвідношенні (36) можна поставити знак рівності.

При $s' = 2$, як легко переконатися,

$$F^{1/s'}\left(\frac{s'}{2}, \frac{s'}{2}; 1; q^2\right) = F^{1/2}(1,1;1;q^2) = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}. \quad (38)$$

Із (33), з урахуванням (11), (12) і (38), для довільних $f \in C_\beta^\psi L_2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, можемо записати нерівність

$$\big\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\big\|_C \leq \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right) E_n(f_\beta^\psi)_{L_2}. \quad (39)$$

Розглядаючи точні верхні межі обох частин нерівності (39) по класах $C_{\beta,2}^\psi$, отримуємо

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta,2}; S_{n-1}\big)_C \leq \psi(n)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi(1-q^2)}} + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right). \tag{40}$$

Як випливає з формули (30) роботи [26] і формули (65′) роботи [33], у співвідношенні (40) можна поставити знак рівності. Зазначимо також, що в [36] встановлено точні рівності величин $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,2}; S_{n-1})$ за умови $\sum_{k=1}^{\infty}\psi^2(k) < \infty$.

При $s' = \infty$, як випливає з (10),

$$K_{q,1}(s') = K_{q,1}(\infty) = \left\| \frac{1}{\sqrt{1 - 2q\cos t + q^2}} \right\|_{\infty} = \frac{1}{1-q}. \tag{41}$$

Із (32), з урахуванням (11), (12) і (41), для довільної $f \in C^{\psi}_{\beta}L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, можемо записати нерівність

$$\big\|f(x) - S_{n-1}(f;x)\big\|_C \leq \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + O(1)\frac{\varepsilon_n + q/n}{(1-q)^2}\right) E_n(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{42}$$

Розглядаючи точні верхні межі обох частин нерівності (42) по класах $C^{\psi}_{\beta,1}$, отримуємо

$$\mathcal{E}\big(C^{\psi}_{\beta,1}; S_{n-1}\big)_C \leq \psi(n)\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + O(1)\frac{\varepsilon_n + q/n}{(1-q)^2}\right). \tag{43}$$

Як випливає з формули (30) роботи [26] і формули (63) роботи [33], в (43) при $n \to \infty$ можна поставити знак рівності.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $f \in C^{\psi}_{\beta}L_s$, $1 \leq s \leq \infty$. Тоді в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, [37, с. 810]) має місце інтегральне зображення

$$\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x-t)\Psi_{1,n,p}(t)dt, \tag{44}$$

в якому

$$\Psi_{j,n,p}(t) = \sum_{k=n-p+j}^{\infty} \tau_{n,p}(k)\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{45}$$

а $\tau_{n,p}(k)$ визначається таким чином:

$$\tau_{n,p}(k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-k}{p}, & n-p+1 \leq k \leq n-1, \\ 1, & k \geq n. \end{cases} \tag{46}$$

Покладемо

$$r_{n,p}(t) = \sum_{k=n-p+2}^{\infty} \tau_{n,p}(k)\left(\frac{\psi(k)}{\psi(n-p+1)} - \frac{q^k}{q^{n-p+1}}\right)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{47}$$

Враховуючи (47), запишемо (44) у вигляді

$$\rho_{n,p}(f;x) = \psi(n-p+1)\left(\frac{q^{-(n-p+1)}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\tau_{n,p}(k)q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t)r_{n,p}(t)dt\right).$$

Провівши елементарні перетворення, з урахуванням (46) одержимо

$$\sum_{k=n-p+1}^{\infty}\tau_{n,p}(k)q^k\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}q^j\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

У роботі [21, с. 99, 100] було показано, що

$$\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty}q^j\cos\left(jt-\frac{\beta\pi}{2}\right) = Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t),$$

де

$$Z_q(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}},$$

$$P_{q,\beta,n,p}(t) = \sum_{k=n-p+1}^{n} q^k\cos\left(kt+\theta_q(t)-\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \theta_q(t) = \operatorname{arctg}\frac{q\sin t}{1-q\cos t}.$$

Функції $Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)$ і $r_{n,p}(t)$ ортогональні до будь-якого тригонометричного полінома t_{n-p}, порядок якого не перевищує $n-p$. Тому для довільного полінома t_{n-p} з $\mathcal{T}_{2(n-p)+1}$

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\left(\frac{q^{-(n-p+1)}}{p}Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)+r_{n,p}(t)\right)dt\right), \qquad (48)$$

де

$$\delta_{n,p}(\cdot) = f_\beta^\psi(\cdot) - t_{n-p}(\cdot). \qquad (49)$$

В [25, с. 6, 7] встановлено, що при $n-p\to\infty$ має місце рівномірна по t, n, p, q, ψ і β оцінка

$$\left|r_{n,p}(t)\right| = O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{1, \frac{1}{p(1-q)}\right\}. \qquad (50)$$

Враховуючи (50), із рівності (48) одержуємо

$$\rho_{n,p}(f;x) = \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_{n,p}(x-t)\left(q^{-(n-p+1)}Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)dt. \qquad (51)$$

Далі, вибираючи в (51) в ролі $t_{n-p}(\cdot)$ поліном $t^*_{n-p}(\cdot)$ найкращого наближення у просторі L_s функції $f^\psi_\beta(\cdot)$, тобто такий, що

$$\|f^\psi_\beta - t^*_{n-p}\|_s = E_{n-p+1}(f^\psi_\beta)_{L_s}, \qquad 1 \le s \le \infty,$$

і застосовуючи нерівність

$$\left\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\varphi(u)du \right\|_C \le \|K\|_{s'}\|\varphi\|_s, \quad \varphi \in L_s, \quad K \in L_{s'}, \quad 1 \le s \le \infty, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1 \quad (52)$$

(див., наприклад, [38, с. 43]), маємо

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \le \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\Bigg(q^{-(n-p+1)}\big\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\big\|_{s'} +$$

$$+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\Bigg)E_{n-p+1}(f^\psi_\beta)_{L_s}. \quad (53)$$

На підставі співвідношення (69) роботи [23] для s', $1 \le s' \le \infty$, при $n \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\big\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\big\|_{s'} = q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right). \quad (54)$$

При $s = 2$ (див. [23, с. 1680]) рівність (54) можна покращити, оскільки

$$\big\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\big\|_2 = \left\|\sum_{k=n-p}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{\infty} q^j \cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right\|_2 =$$

$$= \sqrt{\pi}q^{n-p+1}\sqrt{\frac{1+q^2-q^{2p}(2p+1-q^2(2p-1))}{(1-q^2)^3}} =$$

$$= q^{n-p+1}K_{p,q}(2) = q^{n-p+1}\frac{\|\cos t\|_2}{\sqrt{\pi}}K_{p,q}(2). \quad (55)$$

Поєднуючи нерівність (53) з оцінками (54) і (55), одержуємо (15).

Доведемо другу частину теореми. Для цього досить показати, що для довільної функції $\varphi \in L_s$ можна вказати функцію $\Phi(\cdot) = \Phi(\varphi;\cdot)$, для якої $E_{n-p+1}(\Phi)_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}$ при всіх $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, і, крім того, має місце рівність

$$\big|\rho_{n,p}(\Phi;0)\big| = \frac{\psi(n-p+1)}{p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') +$$

$$+O(1)\left(\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\Bigg)E_{n-p+1}(\Phi^\psi_\beta)_{L_s}. \quad (56)$$

На підставі інтегрального зображення (48), оцінки (50) та ортогональності функції $Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)$ до будь-якого тригонометричного полінома $t_{n-p} \in \mathcal{T}_{2(n-p)+1}$ для довільної функції f з множини $C^\psi_\beta L_s$, $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, виконується рівність

$$\big|\rho_{n,p}(f;x)\big| = \psi(n-p+1)\left(q^{-(n-p+1)}\left|\frac{1}{\pi p}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x-t)Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)dt\right|+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{1,\frac{1}{p(1-q)}\right\}E_{n-p+1}\big(f_\beta^\psi\big)_{L_s}\right) =$$

$$= \psi(n-p+1)\left(q^{-(n-p+1)}\Big|\rho_{n,p}\big(\mathcal{J}_\beta^{\alpha,1}(f_\beta^\psi);x\big)\Big|+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{1,\frac{1}{p(1-q)}\right\}E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_{L_s}\right), \tag{57}$$

де $\alpha = \ln\dfrac{1}{q}$.

Внаслідок теореми 3 роботи [27, с. 313] для довільної функції $\varphi \in L_s$, $1 \le s \le \infty$, знайдеться функція $\overline{\varphi}(t)$ така, що

$$E_{n-p+1}(\overline{\varphi})_{L_s} = E_{n-p+1}(\varphi)_{L_s}, \tag{58}$$

і для неї виконується рівність

$$|\rho_{n,p}(\mathcal{J}_\beta^{\alpha,1}(\overline{\varphi});0)| =$$

$$= \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+1/s'}}K_{q,p}(s') + O(1)\frac{q\delta(s)}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s',p)}}\right)E_{n-p+1}(\overline{\varphi})_{L_s}. \tag{59}$$

Функція $F = \mathcal{J}_\beta^\psi(\overline{\varphi})$ є шуканою, оскільки для неї згідно з (57)–(59) виконується (56).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_q$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \le n$, *і* $1 \le s \le \infty$. *Тоді для довільної функції* $f \in L_\beta^\psi L_1$ *виконується нерівність*

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_{L_s} \le \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}K_{q,p}(s)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\right)E_{n-p+1}(f_\beta^\psi)_{L_1}, \tag{60}$$

де $K_{q,p}(s)$ *і* $\sigma(s,p)$ *визначаються формулами* (10) *і* (11) *відповідно, а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Нехай $f \in L_\beta^\psi L_1$. На підставі інтегрального зображення (51) та твердження 1.5.5 із роботи [38, с. 43] отримуємо

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_{L_s} \le \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\left(q^{-(n-p+1)}\big\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\big\|_s+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p,\frac{1}{1-q}\right\}\right)\big\|\delta_{n,p}(x-t)\big\|_1, \quad 1 \le s \le \infty, \tag{61}$$

де $\delta_{n,p}$ визначається рівністю (49). Вибравши в (61) в якості t_{n-p} поліном найкращого наближення t^*_{n-p} функції f в метриці простору L_1, одержимо

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_{L_s} \leq \frac{\psi(n-p+1)}{\pi p}\Bigg(q^{-(n-p+1)}\left\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\right\|_s +$$

$$+O(1)\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\Bigg)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_1}. \tag{62}$$

На підставі рівності (69) роботи [23] маємо

$$\left\|Z_q(t)P_{q,\beta,n,p}(t)\right\|_s = q^{n-p+1}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1/s}}K_{q,p}(s) + O(1)\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}\right). \tag{63}$$

З (62) і (63) випливає (60).

Теорему 2 доведено.

З теореми 2 і оцінок (22) – (25) отримуємо наступні твердження.

***Наслідок* 4.** *Нехай множини* $L^{\psi}_{\beta}L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, *породжуються коефіцієнтами* $\psi(k) = \psi_l(k)$ *ядер* $P_{q,\beta}(l,t)$, $l \in \mathbb{N}$, *вигляду* (18). *Тоді для довільних* $f \in L^{\psi}_{\beta}L_1$, n, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, $1 \leq s \leq \infty$ *виконується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_{L_s} \leq \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(1 + \sum_{j=1}^{l-1}\frac{(1-q^2)^j}{j!2^j}\prod_{\nu=0}^{j-1}(k+2\nu)\right) \times$$

$$\times\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}K_{q,p}(s) + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} + \frac{lq\min\left\{p, \dfrac{1}{1-q}\right\}}{(n-p+1)(1-q)^2}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_1},$$

де $K_{q,p}(s)$ *і* $\sigma(s,p)$ *визначаються формулами* (10) *і* (11) *відповідно, а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

***Наслідок* 5.** *Нехай множини* $L^{\psi}_{\beta}L_1$, $\beta \in \mathbb{R}$, *породжуються коефіцієнтами* $\psi(k) = \dfrac{2}{q^k + q^{-k}}$ *ядер* $\mathcal{P}_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (20). *Тоді для довільних* $f \in L^{\psi}_{\beta}L_1$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$, $1 \leq s \leq \infty$ *виконується нерівність*

$$\left\|\rho_{n,p}(f;x)\right\|_{L_s} \leq \frac{2q^{n-p+1}}{\left(1+q^{2(n-p+1)}\right)p}\Bigg(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}K_{q,p}(s) +$$

$$+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}} + \frac{q^{2(n-p)+3}}{(1-q)^2}\min\left\{p, \frac{1}{1-q}\right\}\right)\Bigg)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_1},$$

де $K_{q,p}(s)$ *і* $\sigma(s,p)$ *визначаються формулами* (10) *і* (11) *відповідно, а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

***Наслідок* 6.** *Нехай множини* $L^{\psi}_{\beta}L_1$, $\beta\in\mathbb{R}$, *породжуються коефіцієнтами* $\psi(k)=\dfrac{q^k}{k}$ *ядер* $N_{q,\beta}(t)$ *вигляду* (21). *Тоді для довільних* $f\in L^{\psi}_{\beta}L_1$, $n,\,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, $1\le s\le\infty$ *справджується нерівність*

$$\big\|\rho_{n,p}(f;x)\big\|_{L_s}\le\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p+1)}\left(\frac{\|\cos t\|_s}{\pi^{1+1/s}}K_{q,p}(s)+\right.$$

$$\left.+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{\sigma(s,p)}}+\frac{q\min\left\{p,\dfrac{1}{1-q}\right\}}{(n-p+1)(1-q)^2}\right)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\beta})_{L_1},$$

де $K_{q,p}(s)$ *і* $\sigma(s,p)$ *визначаються формулами* (10) *і* (11) *відповідно, а* $O(1)$ — *величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.*

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
3. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 4. – С. 926 – 936.
4. *Steckin S. B.* On the appoximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums // Anal. math. – 1978. – **4**. – P. 61 – 74.
5. *Lebesgue H.* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisantes á une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. France. – 1910. – **38**. – P. 184 – 210.
6. *Ch. de la Vallée Poussin* Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. – Paris: Gautier-Villars, 1919. – 150 p.
7. *Никольский С. М.* О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – **4**. – С. 509 – 520.
8. *Стечкин С. Б.* О суммах Валле Пуссена // Докл. АН СССР. – 1951. – **80**. – С. 545 – 548.
9. *Габисония О. Д.* О приближении функций многих переменных целыми функциями // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **2(45)**. – С. 30 – 35.
10. *Захаров А. А.* Об оценке уклонения непрерывных периодических функций от сумм Валле Пуссена // Мат. заметки. – 1968. – **3**. – С. 77 – 84.
11. *Осколков К. И.* К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры // Мат. заметки. – 1975. – **18**. – С. 515 – 526.
12. *Стечкин С. Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 48 – 60.
13. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriershen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 521 – 526.
14. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. – 1941. – **22**, № 6. – С. 386 – 389.
15. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
16. *Тиман А. Ф.* Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР. – 1951. – **81**, № 4. – С. 509 – 511.
17. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **68**. – 386 с.

18. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення аналітичних періодичних функцій сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1653 – 1668.
19. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. II. – 424 с.
20. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
21. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 97 – 107.
22. *Сердюк А. С.* Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках // Доп. НАН України. – 2009. – **6**. – С. 34 – 39.
23. *Сердюк А. С.* Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена в равномерной и интегральных метриках // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 12. – С. 1672 – 1686.
24. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu.* Uniform approximation of Poisson integrals of functions from the class H_ω by de la Vallée Poussin sums // Anal. math. – 2012. – **38**, № 4. – P. 305 – 325.
25. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie.Yu., Musienko A. P.* Approximation of classes of analytic functions by de la Vallée Poussin sums in uniform metric // Rend. mat. – 2012. – **32**. – P. 1 – 15.
26. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Неравенства Лебега для интегралов Пуассона // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 798 – 808.
27. *Сердюк А. С., Мусієнко А. П.* Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена при наближенні інтегралів Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 298 – 316.
28. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375 – 395.
29. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Киев: Наук. думка, 2009. – 376 с.
30. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
31. *Сердюк А. С., Чайченко С. О.* Наближення класів аналітичних функцій лінійним методом спеціального вигляду // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 1. – С. 102 – 109.
32. *Serdyuk A. S., Sokolenko I. V.* Asymptotic behavior of best approximations of classes of periodic analitic functions defined by moduli of continuity // Bulg.-Turk.-Ukr. Sci. Conf. "Math. Anal., Different. Equat. and their Appl." (Sunny Beach, 15 – 20 Sept., 2010). – Sofia: Acad. Publ. House "Prof. Marin Drinov", 2011. – P. 173 – 182.
33. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1079 – 1096.
34. *Сердюк А. С.* Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 698 – 712.
35. *Грандштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
36. *Сердюк А. С., Соколенко І. В.* Рівномірні наближення класів $(\psi, \overline{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **8**, № 1. – С. 181 – 189.
37. *Рукасов В. И.* Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
38. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 422 с.

Одержано 15.06.12