УДК 517.9

А. А. Бойчук, А. А. Покутный (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ФРЕШЕ

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of bounded solutions of linear differential equations in the Fréchet space. The solutions are constructed with the use of strong generalized inverse operator.

Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених розв'язків лінійних диференціальних рівнянь у просторі Фреше. Розв'язки побудовано з використанням сильного узагальнено-оберненого оператора.

1. Введение. Одним из центральных вопросов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений является вопрос о поведении решений на бесконечности. Экспоненциально дихотомические на всей оси системы представляют собой класс систем, решения которых могут как убывать к нулю с экспоненциальной скоростью, так и неограниченно возрастать. Ограниченные на всей оси решения для таких систем в конечномерном случае рассматривались еще О. Перроном, А. Майзелем [1, 2] и далее в известных работах В. Коппеля [3], Р. Саккера, Дж. Селла [4 – 6], Ю. Митропольского, А. Самойленко, В. Кулика [7 – 9], а в бесконечномерных банаховых пространствах — в монографиях М. Крейна [10], Ю. Далецкого и М. Крейна [11], Х. Массеры и Х. Шеффера [12], Ф. Хартмана [13], И. Чуешова [14].

В статьях К. Палмера [15, 16] условие экспоненциальной дихотомии на всей оси однородной дифференциальной системы было ослаблено и заменено условием экспоненциальной дихотомии на полуосях и впервые была доказана нетеровость[1] соответствующего оператора при решении задачи об ограниченных на всей оси решениях. Дальнейшее развитие этой идеи нашло свое отражение в работах [17, 18], где с использованием обобщенно-обратных операторов и псевдообратных по Муру – Пенроузу матриц изучалась задача о существовании ограниченных на всей оси решений при линейных и нелинейных возмущениях системы. Эти и другие результаты нашли свое отражение в монографии [19].

Понятие экспоненциальной дихотомии для эволюционных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами систематически изучалось в монографии Д. Хенри [20]. В работе Х. Родригеса, Дж. Филхо [21] доказан аналог альтернативы Фредгольма (в предположении экспоненциальной дихотомии на полуосях соответствующего однородного уравнения). Исследованию фредгольмовости оператора соответствующего дифференциального уравнения с неограниченными коэффициентами посвящены статьи [22 – 24]. В данной работе приводятся некоторые результаты, полученные авторами в этом направлении за последние годы. Эти результаты были анонсированы на международной конференции „Боголюбовские чтения

[1]В англоязычной литературе такие операторы называют фредгольмовыми.

© А. А. БОЙЧУК, А. А. ПОКУТНЫЙ, 2014

DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения", посвященной 75-летию со дня рождения академика А. М. Самойленко [25].

2. Ограниченные решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. В банаховом пространстве $\mathbf{B}$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

в котором вектор-функция $f(t)$ действует из $\mathbb{R}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$,

$$f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B}) \colon = \Big\{ f(\cdot) \colon \mathbb{R} \to \mathbf{B}, f(\cdot) \in C(\mathbb{R}, \mathbf{B}), \ |||f||| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}} < \infty \Big\},$$

$BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ — банахово пространство функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$; операторнозначная функция $A(t)$ является сильно непрерывной с нормой $|||A||| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\| < \infty$, а решение $x = x(t)$ уравнения

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))ds$$

непрерывно дифференцируемо в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет уравнению (1) всюду на $\mathbb{R}$. Нужно найти решение $x(t)$ уравнения (1) в банаховом пространстве функций $BC^1(\mathbb{R}, \mathbf{B})$, непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ и ограниченных вместе с производной. Предположим, что однородное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \tag{2}$$

допускает экспоненциальную дихотомию на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами P и Q соответственно, т. е. существуют проекторы $P(P^2 = P)$, $Q(Q^2 = Q)$ и константы $k_{1,2} \geq 1$, $\alpha_{1,2} > 0$ такие, что

$$\|U(t)PU^{-1}(s)\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|U(t)(I-P)U^{-1}(s)\| \leq k_1 e^{-\alpha_1(s-t)}, \quad s \geq t, \quad \text{для всех} \quad t, s \in \mathbb{R}_+$$

и

$$\|U(t)QU^{-1}(s)\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|U(t)(I-Q)U^{-1}(s)\| \leq k_2 e^{-\alpha_2(s-t)}, \quad s \geq t, \quad \text{для всех} \quad t, s \in \mathbb{R}_-,$$

где $U(t) = U(t,0)$ — эволюционный оператор [11] уравнения (1) такой, что $\dfrac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t)$, $U(0) = I$ — единичный оператор. Для уравнения (1) доказан [26] следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что однородное уравнение* (2) *является экспоненциально дихотомичным на полуосях* $\mathbb{R}_+$ *и* $\mathbb{R}_-$ *с проекторами* P *и* Q *соответственно. Если оператор*

$$D = P - (I - Q) \colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}, \tag{3}$$

действующий из банахова пространства $\mathbf{B}$ *в себя, обобщенно-обратим, то*:

(i) *для того чтобы существовали решения уравнения* (1), *ограниченные на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция* $f(t) \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *удовлетворяла условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{4}$$

где

$$H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}QU^{-1}(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}(I-P)U^{-1}(t);$$

(ii) *при выполнении условия* (4) *решения уравнения* (1), *ограниченные на всей оси, имеют вид*

$$x_0(t,c) = U(t)P\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t) \quad \textit{для всех} \quad c \in \mathbf{B}, \tag{5}$$

где $(G[f])(t)$ [26] *— обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на всей оси решениях,* D^- *— оператор, обобщенно-обратный к оператору* D, $\mathcal{P}_{N(D)} = I - D^-D$ *и* $\mathcal{P}_{N(D^*)} = I - DD^-$ *— проекторы,* c *— произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}$.

***Замечания.* 1.** Обобщенная обратимость оператора D [19] означает следующее:

(i) оператор D нормально разрешим ($\overline{R(D)} = R(D) = \mathrm{Im}D$);

(ii) подпространство $N(D) = \ker D$ имеет прямое дополнение в $\mathbf{B}$;

(iii) подпространство $R(D)$ имеет прямое дополнение в $\mathbf{B}$.

При выполнении этих условий для оператора D всегда существует обобщенно-обратный оператор D^-, определяемый равенствами

$$DD^-D = D, \qquad D^-DD^- = D^-.$$

2. В конечномерном случае, когда $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ и оператор D представляет $(n \times n)$-мерную матрицу, свойства (i) – (iii) всегда выполняются (потому что подпространства $N(D)$ и $N(D^*) = \operatorname{coker} D$ конечномерные). Заметим, что условие (4) равносильно ортогональности неоднородности уравнения (1) решениям соответствующего однородного сопряженного уравнения, и в таком случае приходим к известной лемме К. Палмера [15].

3. Приложения теории обобщенно-обратных операторов и псевдообратных матриц к исследованию поставленной задачи позволяют как пояснить ранее известные результаты, так и получить новые факты. Так, если мы рассмотрим уравнение в $\mathbb{R}^n$ в предположении, что соответствующее линейное однородное уравнение имеет э-дихотомию на полуосях, то оператор

$$(Lx)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$$

может быть лишь нетеровым [18]. В случае же, когда мы рассматриваем уравнение в банаховом пространстве $\mathbf{B}$, поставленная задача имеет значительно больше вариантов решения. Согласно классификации С. Крейна [27], из теоремы 1 следует, что оператор $(Lx)(t)$ может быть или 1) нормально разрешимым оператором ($\overline{\mathrm{Im}L} = \mathrm{Im}L$), или 2) d-нормальным ($\overline{\mathrm{Im}L} = \mathrm{Im}L$, $\dim\operatorname{coker} L < \infty$), или 3) n-нормальным ($\overline{\mathrm{Im}L} = \mathrm{Im}L$, $\dim\ker L < \infty$), или 4) нетеровым ($\operatorname{ind} L = \dim\ker L - \dim\operatorname{coker} L < \infty$), или 5) фредгольмовым ($\operatorname{ind} L = 0$).

3. Дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами. На основании предложенного выше подхода стало возможным провести аналогичное исследование уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Приведем определения, необходимые для решения поставленной задачи.

В банаховом пространстве $\mathbf{B}$ рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in J, \tag{6}$$

где при каждом $t \in J \subset \mathbb{R}$ оператор $A(t)$ является замкнутым с плотной областью определения $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}$, не зависящей от t.

Определение 1. *Семейство ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве* $\mathbf{B}$ $\{T(t,s) \mid t \geq s;\ t,s \in J\}$ *называется эволюционным оператором, если выполняются следующие условия*:

(i) $T(s,s) = I$, $s \in J$;

(ii) $T(t,\sigma)T(\sigma,s) = T(t,s)$, $t \geq \sigma \geq s$ *в* J.

Если $T(t,s)$ *дополнительно удовлетворяет условию*

(iii) $\forall x \in \mathbf{B}$ *отображение* $(t,s) \mapsto T(t,s)x$ *непрерывно*, $t \geq s$,

то говорят, что $T(t,s)$ — *сильно непрерывный эволюционный оператор* (*или семейство сильно непрерывных эволюционных операторов*).

Если задача Коши, порожденная уравнением (6) и начальным условием $x(s,s,x_0) = x_0 \in D$, равномерно корректна [28], то можно определить для $t \geq s$ на J линейный оператор $T(t,s)\colon D \to \mathbf{B}$ по правилу

$$T(t,s)x_0 = x(t,s,x_0).$$

В этом случае говорят, что $T(t,s)$ — эволюционный оператор, *ассоциированный* с уравнением (6), а решения понимаются в слабом (обобщенном) смысле.

Определение 2. *Семейство эволюционных операторов* $\{T(t,s) \mid t \geq s;\ t,s \in J\}$ *допускает экспоненциальную дихотомию на* J, *если существуют проекторнозначная оператор-функция* $\{P(t) \mid t \in J\}$ *в* $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ *и действительные константы* $\alpha > 0$ *и* $M \geq 1$ *такие, что*:

(i) $T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s)$, $t \geq s$;

(ii) *сужение* $T(t,s)\restriction_{N(P(s))}$, $t \geq s$, *оператора* $T(t,s)$ *на ядро* $N(P(s))$ *проектора* $P(s)$ *осуществляет изоморфизм из* $N((P(s))$ *на* $N(P(t))$; *определим* $T(s,t)$ *как обратный*

$$T(s,t) = (T(t,s)\restriction_{N(P(s))})^{-1}\colon N(P(t)) \to N(P(s));$$

(iii) $\|T(t,s)P(s)\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s$;

(iv) $\|T(t,s)(I - P(s))\| \leq Me^{-\alpha(s-t)}$, $s \geq t$.

При фиксированном $t \geq s$ оператор $T(t,s)$ будет ограниченным линейным оператором и, так как множество D плотно в $\mathbf{B}$, его можно расширить на все пространство $\mathbf{B}$ по непрерывности, что в дальнейшем и предполагается. Расширенный эволюционный оператор на все пространство будем обозначать так же.

Нас будет интересовать случай экспоненциальной дихотомии на полуосях $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$. Проекторнозначные функции, определенные на полуосях, будем обозначать через $P_+(t)$ для всех $t \geq 0$ и $P_-(t)$ для всех $t \leq 0$ с константами M_1, α_1 и M_2, α_2 соответственно.

По аналогии с теоремой 1 доказан [29] критерий существования слабых ограниченных на всей оси решений неоднородного уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть* $\{T(t,s) \mid t \geq s \in \mathbb{R}\}$ *является сильно непрерывным эволюционным оператором, ассоциированным с уравнением* (6). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) $T(t,s)$ *является экспоненциально дихотомичным на полуосях* $\mathbb{R}_+$ *и* $\mathbb{R}_-$ *с проекторнозначными оператор-функциями* $P_+(t)$ *и* $P_-(t)$ *соответственно*;

2) *оператор* $D = P_+(0) - (I - P_-(0))$ *является обобщенно-обратимым.*

Тогда:

1) *для того чтобы существовали слабые ограниченные на всей оси решения уравнения* (7), *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция* $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbf{B})$ *удовлетворяла условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)dt = 0, \tag{8}$$

где $H(t) = \mathcal{P}_{N(D^*)}P_-(0)T(0,t)$;

2) *при выполнении условия* (8) *слабые ограниченные на всей оси решения уравнения* (7) *имеют вид*

$$x_0(t,c) = T(t,0)P_+(0)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t,0) \quad \forall c \in \mathbf{B}, \tag{9}$$

где

$$(G[f])(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t T(t,\tau)P_+(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + T(t,s)P_+(s)D^-\left[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \right. \\ \qquad \displaystyle \left. + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau\right], & t \geq s, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t T(t,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau - \int_t^{s} T(t,\tau)(I - P_-(\tau))f(\tau)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + T(t,s)(I - P_-(s))D^-\left[\int_s^{\infty} T(s,\tau)(I - P_+(\tau))f(\tau)d\tau + \right. \\ \qquad \left. + \int_{-\infty}^{s} T(s,\tau)P_-(\tau)f(\tau)d\tau\right], & s \geq t, \end{cases}$$

— *обобщенный оператор Грина задачи об ограниченных на всей оси решениях*, c — *произвольный элемент банахова пространства* $\mathbf{B}$.

***Замечание* 4.** Теорема 2 дает возможность находить обобщенные (слабые) ограниченные решения уравнения (7). Отметим, что многие уравнения в частных производных могут быть записаны в операторном виде [30] и исследованы с помощью такого подхода [31].

***Замечание* 5.** В случае, когда проекторы $P_+(0)$ и $P_-(0)$ коммутируют, оператор D всегда имеет обобщенно-обратный, совпадающий с D [29]. В этом случае из приведенной выше теоремы вытекают, как следствие, результаты работы [21]. Кроме того, поскольку любой фредгольмов оператор является обобщенно-обратимым, случай, рассмотренный в [24], следует из теоремы 2.

4. Ограниченные решения в локально выпуклых пространствах и пространствах Фреше. Исследование дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах и пространствах Фреше является актуальной задачей в связи с приложениями в математической физике. В данном пункте показана возможность провести аналогичное исследование существования обобщенных ограниченных на всей оси решений операторных уравнений в таких пространствах.

В полном локально выпуклом пространстве E рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in J, \tag{10}$$

где для каждого $t \in J$ $A(t)$ — линейная замкнутая оператор-функция с независимой от времени t плотной областью определения $D(A(t)) = D \subset E$, вектор-функция $f(t)$ ограничена и непрерывна на J.

Предположим, что существует ограниченная оператор-функция $U(t)$, $t \in J$, с областью определения $D(U(t)) = D$ такая, что для каждого $x \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}U(t)x = A(t)U(t)x, \qquad U(0) = I.$$

Поскольку множество D плотно в E, $U(t)$ можно расширить по непрерывности на все пространство E. Оператор-функцию $U(t)$ традиционно будем называть *эволюционным оператором*, соответствующим однородному уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad t \in J. \tag{11}$$

Будем дополнительно предполагать [36], что при каждом t эволюционный оператор $U(t)$ имеет ограниченный обратный $U^{-1}(t)\colon E \to E$.

Определение 3. *Вектор-функцию $u(t)$ будем называть обобщенным* (*слабым*) *решением уравнения* (10), *если $u(t)$ непрерывна и равенство*

$$u(t) = U(t)U^{-1}(\tau)u(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} U(t)U^{-1}(s)f(s)ds, \quad t \geq \tau, \tag{12}$$

выполняется для любого $t \in J$.

Определение 4. *Будем говорить, что уравнение* (11) *допускает экспоненциальную дихотомию на J, если существует проектор $P \in \mathcal{L}(E)$ такой, что для произвольной полунормы $q \in \operatorname{Spec} E$ существуют полунорма $p \in \operatorname{Spec} E$ и константы $K \geq 1$, $\alpha > 0$ такие, что выполняются неравенства*

$$q(U(t)PU^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(t-s)}p(\xi), \quad t \geq s,$$

$$q(U(t)(I-P)U^{-1}(s)\xi) \leq Ke^{-\alpha(s-t)}p(\xi), \quad s \geq t,$$

для всех $\xi \in E$, $\operatorname{spec} E$ — множество всех полунорм, заданных на E.

Данное определение, введенное в работе [31], позволяет исследовать вопрос о существовании обобщенных ограниченных решений по аналогии с тем, как это делалось в банаховом пространстве.

Теорема 3. *Пусть однородное уравнение* (11) *является экспоненциально дихотомичным на полуосях* $\mathbb{R}_+$ *и* $\mathbb{R}_-$ *с проекторами* P_+ *и* P_- *соответственно. Тогда*:

1) *уравнение* (10) *имеет ограниченные решения тогда и только тогда, когда операторное уравнение*

$$P_+\xi_1 - (I - P_-)\xi_2 = g \tag{13}$$

имеет решения относительно $\xi_1, \xi_2 \in E$, *где*

$$g = \int\limits_{-\infty}^{0} P_- U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \int\limits_{0}^{+\infty} (I - P_+) U^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau;$$

2) *при выполнении условия разрешимости* (13) *уравнение* (10) *имеет ограниченные на всей оси решения, которые определяются следующим образом*:

$$x(t, \xi_1, \xi_2) = \begin{cases} U(t)P_+\xi_1 - \displaystyle\int_t^{+\infty} U(t)P_+U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t U(t)(I - P_+)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, & t \geq 0, \\ U(t)(I - P_-)\xi_2 + \displaystyle\int_{-\infty}^t U(t)P_-U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^0 U(t)(I - P_-)U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, & t \leq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим вспомогательный оператор $S := (P_+, P_- - I)$ и вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Тогда уравнение (13) можно записать в виде

$$S\xi = g.$$

Однако, в отличие от теорем 1 и 2, условие $\mathcal{P}_{N(S^*)}g = 0$ в общем случае не гарантирует разрешимости уравнения (13), поскольку введенный оператор S, вообще говоря, не является нормально разрешимым и поэтому уравнение (13) может быть не разрешимо. В этом случае представление (14) дает обобщенные (слабые) ограниченные решения только на полуосях. Для получения полного результата необходимы дополнительные условия на оператор $P_+ - I + P_-$, позволяющие получить разрешимость уравнения (13). Поэтому будем рассматривать то же уравнение, но в пространстве Фреше F. Его геометрия позволяет ввести понятие сильного обобщенно-обратного оператора и тем самым уточнить теорему 3 и сформулировать более полный результат. Приведем соответствующие определения, введенные в [33].

Определение 5. *Пусть* $L\colon F_1 \to F_2$ — *линейный ограниченный оператор, действующий из пространства Фреше* F_1 *в пространство Фреше* F_2, *а подпространства* $X \subset F_1$ *и* $Y \subset F_2$ *такие, что выполняется условие*

$$F_1 = N(L) \oplus X, F_2 = \overline{R(L)} \oplus Y, \tag{15}$$

т. е. подпространства $N(L)$, $\overline{R(L)}$ *топологически дополняемые. Тогда соответствующую пару* (X, Y) *будем называть обобщенной* L-*допустимой парой* (*см. также* [34]).

Рассмотрим сужение оператора L на $X: L_X x = Lx, x \in X$, $L_X : X \to \overline{R(L)}$ (построенный таким образом оператор будет линейным, непрерывным и инъективным). Пополним пространство X до $\overline{X}$ по системе полунорм $\|x\|_n = \|L_X x\|_n$, которые определяют топологию пространства F_2, и расширим оператор L_X на пополненное пространство $\overline{X}$ (расширенный оператор будем обозначать $\overline{L}_{\overline{X}}$). Тогда оператор $\overline{L}_{\overline{X}} : \overline{X} \to \overline{R(L)}$ будет осуществлять гомеоморфизм между пространствами $\overline{X}$ и $\overline{R(L)}$ (в силу теоремы Банаха об обратном операторе). Будем обозначать через $\overline{F}_1 = \overline{X} \oplus N(L)$ расширенное исходное пространство, а через $\overline{L} : \overline{F}_1 \to F_2$ оператор $\overline{L} = \overline{L}_{\overline{X}} \mathcal{P}_{\overline{X}}$, где $\mathcal{P}_{\overline{X}}$ — проектор на подпространство $\overline{X}$.

Определение 6. *Пусть L — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства Фреше F_1 в пространство Фреше F_2, а (X, Y) — обобщенная L-допустимая пара. Тогда отображение*

$$L^{-}_{X,Y} : F_2 \to \overline{F}_1,$$

$$L^{-}_{X,Y} y = \overline{L}^{-1}_{\overline{X}} y_1, \qquad y = y_1 + y_2, \qquad y_1 \in \overline{R(L)}, \quad y_2 \in Y,$$

будем называть сильным (X, Y)-обобщенно-обратным к L (по аналогии с [34]).

***Замечание* 6.** Если пространство Фреше раскладывается в алгебраическую прямую сумму подпространств, то оно раскладывается и в топологическую прямую сумму этих же подпространств [35]. Наличие этого факта делает исследование уравнения (13) в пространстве Фреше проще, чем в общих топологических пространствах, и позволяет дополнить теоремы 1 – 3 до следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть однородное уравнение* (11) *является экспоненциально дихотомичным на полуосях $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ с проекторами P_+ и P_- соответственно, а оператор*

$$D = P_+ - I + P_- : F \to F$$

— сильным (X, Y)-обобщенно-обратимым.

Тогда:

1) *для того чтобы существовали обобщенные, ограниченные на всей оси решения уравнения* (10), *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f \in BC(\mathbb{R}, F)$ удовлетворяла условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{16}$$

где $H(t) = (I - \overline{D} D^{-}_{X,Y}) P_- U^{-1}(t)$;

2) *при выполнении условия* (16) *обобщенные решения уравнения* (10) *будут иметь вид*

$$x_0(t, c) = U(t) P_+ \mathcal{P}_{N(\overline{D})} c + \overline{(G[f])}(t) \quad \forall c \in \overline{F}, \tag{17}$$

где

$$\overline{(G[f])}(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t U(t)U^{-1}(\tau)P_+ f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \\ \quad \displaystyle + U(t)P_+ D^-_{X,Y}\left[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \right. \\ \quad \displaystyle \left. + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau\right], & t \ge 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t U(t)U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau - \int_t^0 U(t)U^{-1}(\tau)(I-P_-)f(\tau)d\tau + \\ \quad \displaystyle + U(t)(I-P_-)D^-_{X,Y}\left[\int_0^{\infty} U^{-1}(\tau)(I-P_+)f(\tau)d\tau + \right. \\ \quad \displaystyle \left. + \int_{-\infty}^0 U^{-1}(\tau)P_- f(\tau)d\tau\right], & t \le 0, \end{cases}$$

— *обобщенный оператор Грина, расширенный на* $\overline{F}$.

С учетом введенных определений детали методики доказательства теоремы 4 такие же, как и в доказательствах теорем 1 – 3.

Следствие. *Пусть однородное уравнение* (11) *в полном локально выпуклом пространстве* E *допускает экспоненциальную дихотомию на всей оси с проектором* P. *Тогда для произвольной ограниченной на всей оси и непрерывной вектор-функции* f *существует единственное ограниченное решение уравнения* (10). *Это решение имеет вид*

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{18}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} U(t)PU^{-1}(\tau), & t \ge \tau, \\ -U(t)(I-P)U^{-1}(\tau), & t < \tau. \end{cases}$$

***Замечание* 7.** В случае, когда E — квазиполное бочечное пространство и оператор $A(t) = A\colon E \to E$ регулярный, получим результаты из [36, с. 183].

5. Пример. Рассмотрим уравнение (10) в виде счетной системы с диагональным оператором

$$A(t) = \mathrm{diag}\left\{\underbrace{th\, t, \ldots, th\, t}_{k}, -th\, t, -th\, t, \ldots\right\}$$

в пространствах $l^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$ $\Big($с системой полунорм $\big\|(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\big\|^2_{n, l^2_{\mathrm{loc}}} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$, $n \in \mathbb{N}\Big)$ или Кете с различными весовыми векторами (определение см., например, в [36]). Тогда уравнение (10) является экспоненциально дихотомичным на полуосях с проекторами

$$P_+ = \mathrm{diag}\left\{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, 1, \ldots\right\}, \qquad P_- = \mathrm{diag}\left\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots\right\}$$

соответственно.

Эволюционный оператор имеет вид

$$U(t) = \operatorname{diag}\left\{ \underbrace{\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \ldots, \frac{e^t+e^{-t}}{2}}_{k}, \frac{2}{e^t+e^{-t}}, \frac{2}{e^t+e^{-t}}, \ldots \right\}.$$

Таким образом, согласно теореме 4 имеем

$$D = P_+ - I + P_- = 0, \qquad \mathcal{P}_{N(D)} = \mathcal{P}_{N(D^*)} = I,$$

а так как $\dim R[\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-] = k$, оператор $\mathcal{P}_{N(D^*)}P_-$ является конечномерным, $H(t) = \operatorname{diag}\{H_k(t), 0\}$, где $H_k(t) = \operatorname{diag}\{2/(e^t+e^{-t}), \ldots, 2/(e^t+e^{-t})\}$ — $(k \times k)$-мерная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обобщенных ограниченных решений в пространстве Фреше принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_k(t)f(t)dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)}{e^t+e^{-t}}dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_k(t)}{e^t+e^{-t}}dt = 0. \end{cases}$$

В заключение заметим, что предложенное определение экспоненциальной дихотомии в пространстве Фреше (или более общих топологических векторных пространствах) обобщает классическое, а в случае банахова пространства совпадает с ним. Благодаря этому теорема 4 согласуется с теоремами 1 и 3, а в случае банахова пространства дополняет их. Конструкция сильного обобщенно-обратного оператора дает возможность (теорема 4) получить условия существования обобщенных (слабых) ограниченных решений и тогда, когда множество значений оператора D не является замкнутым.

1. *Perron O.* Die Stabilitatzrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 138 – 152.
2. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политехн. ин-та. Сер. мат. – 1954. – **51**. – С. 20 – 50.
3. *Coppel W. A.* Dichotomies and reducibility, II // J. Different. Equat. – 1968. – **4**. – P. 386 – 398.
4. *Sacker R. J, Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, II // J. Different. Equat. – 1976. – **22**. – P. 478 – 496.
5. *Sacker R. J.* Existence dichotomies and invariant splittings for linear differential systems, IV // J. Different. Equat. – 1978. – **27**. – P. 106 – 137.
6. *Sacker R.* The splitting index for linear differential systems // J. Different. Equat. – 1979. – **33**. – P. 368 – 405.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
8. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука, 1987. – 303 с.
9. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 356 – 371.
10. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
12. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.

13. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. – New York etc., 1964. – 726 p.
14. *Chueshov I. D.* Introduction to the theory of infinite-dimensional dissipative systems. – Kiev: Acta, 2002. – 416 p.
15. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
16. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and Fredholm operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **104**. – P. 149 – 156.
17. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. – 1999. – **2**, № 1. – P. 3 – 10.
18. *Boichuk A. A.* Dichotomy, trichotomy and solutions of nonlinear systems bounded on R // Proc. XXVI Summer School “Applications of Mathematics in Engineering’26” (Sozopol, Bulgaria, 13 – 20 June, 2000). – Sofia: Heron Press, 2001. – **26**. – P. 9 – 15.
19. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
20. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
21. *Rodrigues H. M., Ruas-Filho J. G.* Evolution equations: dichotomies and the Fredholm alternative for bounded solutions // J. Different. Equat. – 1995. – **119**. – P. 263 – 283.
22. *Баскаков А. Г.* Об обратимости и фредгольмовости параболических дифференциальных операторов // Докл. РАН. – 2002. – **383**, № 5. – С. 583 – 585.
23. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2009. – **73**, № 2. – С. 3 – 68.
24. *Latushkin Yu., Tomilov Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients // J. Different. Equat. – 2005. – **208**. – P. 388 – 429.
25. *Boichuk A. A., Pokutnyi O. O.* Bounded solutions of differential equations with unbounded operator in Frechet space // Int. Math. Conf. of the 75 th Anniversary of Academician A. M. Samoilenko “Bogolyubov readings DIF-2013. Differential Equations, Theory of Functions and their Applications”. Abstracts. – Kyiv, 2013. – P. 32 – 33.
26. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 3 – 14.
27. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
28. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
29. *Покутный А. А.* Ограниченные решения линейных и слабонелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным оператором в линейной части // Дифференц. уравнения. – 2012. – **48**, № 6. – С. 803 – 813.
30. *Крейн С. Г., Савченко Ю. Б.* Об экспоненциальной дихотомии для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, № 5. – С. 835 – 844.
31. *Покутний О. О.* Узагальнені обмежені розв’язки лінійних еволюційних рівнянь в локально-опуклих просторах // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2009. – **98**, № 2. – С. 35 – 40.
32. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1978. – 206 с.
33. *Покутний О. О.* Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2013. – № 4. – С. 158 – 161.
34. *Deutch E.* Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation // Linear Algebra and Appl. – 1971. – **4**. – P. 313 – 322.
35. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
36. *Радыно Я. В.* Линейные уравнения и борнология. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1982. – 200 с.

Получено 30.10.13