УДК 519.21

М. С. Братійчук, Д. Слівінська (Шльон. техн. ун-т, Ін-т математики, Глівіце, Польща)

СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДНОВЛЮЮЧИМ РІВНЕМ

A new approach is proposed for the investigations of the characteristics of queueing systems of $M/G/1/b$ type with finite waiting rooms and a resume level of input flow. A convenient algorithm is proposed for the numerical evaluation of stationary parameters of the system. Its efficiency is demonstrated for a specific system.

Предлагается новый подход к изучению характеристик системы обслуживания типа $M/G/1/b$ с ограниченной очередью и восстановительным уровнем входного потока требований. Получен удобный вычислительный алгоритм для стационарных характеристик системы, эффективность которого продемонстрирована на примере конкретной системы.

1. Вступ. Розглянемо систему обслуговування типу $M/GI/1/b$ з обмеженою чергою, в якій вхідний струмінь вимог описується процесом Пуассона з параметром λ. Дисципліна обслуговування є FIFO (перший прийшов-перший обслужився), функція розподілу часу обслуговування є $F(x)$ з $m = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ і система має лише $b-1$ місце, на яких вимоги можуть чекати на обслуговування. Процес функціонування системи має одну особливість. Вона полягає в наявності відновлюючого рівня a $(a < b)$, який функціонує таким чином. Нехай $\xi_a(t,b)$ позначає число вимог у системі в момент часу t і $\xi_a(0,b) \in [0,b)$. До моменту часу $\tau_1(b) = \inf\{t > 0 \colon \xi_a(t,b) = b\}$ дана система працює як стандартна система типу $M/GI/1/b$. Але в момент часу $\tau_1(b)$ припиняється надходження вимог до системи, і лише коли довжина черги зменшиться до a, надходження вимог відновлюється. Описану систему будемо позначати $M_a/GI/1/b$. Введення відновлюючого рівня переслідує дві головні цілі. Якщо для стандартної системи $M/GI/1/b$ починаючи від моменту часу $\tau_1(b)$ можуть відбуватися втрати вимог, то в системі $M_a/GI/1/b$ в момент часу $\tau_1(b)$ ми можемо повідомити про переповнення системи, що дасть змогу переорієнтувати потенційні вимоги на інший сервер. Останнє є особливо важливим для комунікаційних систем, мереж обслуговування і т. п. Крім того, така схема надходження вимог дозволяє зменшити загальне навантаження системи (особливо для випадку, коли коефіцієнт навантаження $\rho = m\lambda > 1$), що, в свою чергу, скорочує час чекання на обслуговування. Подібна система була вперше запропонована в [1], а в монографії [2] можна знайти обчислювальний алгоритм для стаціонарного розподілу кількості вимог (позначимо його $\pi_k(a,b)$, $0 \le k \le b$) в таких системах. На нашу думку, цей алгоритм має два суттєві недоліки. По-перше, він не веде до точних формул для розподілу $\pi_k(a,b)$, а є лише деякою рекурентною процедурою для обчислення цього розподілу. По-друге, для знаходження $\pi_k(a,b)$ використовується умова нормування $\sum_{k=0}^{b} \pi_k(a,b) = 1$, а тому, якщо ми хочемо знайти, наприклад, лише $\pi_1(a,b)$, нам потрібно обчислити **всі** $\pi_k(a,b)$. Наслідком цих недоліків є те, що якщо ми розглядаємо оптимізаційні задачі для таких систем і числа a, b використовуються як параметри керування, то при зміні цих параметрів нам потрібно повторити всі обчислення заново, що, в свою чергу, значно збільшує об'єм обчислень.

У цій статті ми пропонуємо інший підхід, який базується на методі потенціалу Королюка [5] і приводить до точних формул для $\pi_k(a,b)$. Особливо важливою обставиною є те, що функції, в термінах яких записано ці формули, не залежать від a та b, а визначаються лише основними параметрами системи, тобто λ та $F(x)$. Отже, вирахувавши ці функції один раз, ми можемо використовувати їх при зміні a та b. Це значно прискорює процес розв'язання оптимізаційних задач.

У випадку $a = b-1$ наша модель зводиться до системи типу $M/GI/1/b$ без відновлюючого рівня і ми отримуємо обчислювальний алгоритм для ергодичного розподілу стандартної системи $M/GI/1/b$. Зауважимо, що цей алгоритм є простішим, ніж вже відомі алгоритми (див., наприклад, [2, 3]).

2. Позначення, допоміжні факти та основні результати. Символами $\mathbf{E}_n$, $\mathbf{P}_n$ будемо позначати умовне математичне сподівання та умовну ймовірність при умові, що $\xi_a(0,b) = n$, а якщо $n = 1$, то будемо писати $\mathbf{E}$, $\mathbf{P}$. Позначимо $f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x),\ \overline{F}(x) = 1 - F(x)$, і означимо послідовності $p_i(s),\ i \geq -1,\ q_i(s),\ i \geq 0\ s \geq 0$, за допомогою співвідношень

$$p_i(s) = f^{-1}(s) \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^{i+1}}{(i+1)!} dF(x), \quad q_i(s) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \overline{F}(x) dx.$$

Нехай

$$\overline{q}_n(s) = \sum_{i=n}^\infty q_i(s), \qquad f_l(s,k) = q_{k-l}(s) + I\{k=b\}\overline{q}_{b-l+1}(s),$$

$$g(s,k) = I\{k \in [a+1, b-1]\} s^{-1} f^{b-k}(s)(1 - f(s)).$$

Тут і далі $I\{A\}$ дорівнює 0 або 1 в залежності від того, відбулася подія A чи ні. Нехай послідовність $R_k(s),\ k = 0, 1, 2, \ldots$, є такою, що $R_0(s) = 1$ і

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = z\big(f\big(s + \lambda(1-z)\big) - z\big)^{-1}, \qquad |z| < \nu(s), \tag{1}$$

де $\nu(s)$ — єдиний корінь рівняння $f\big(s + \lambda(1-z)\big) - z = 0$ на інтервалі $[0;1]$.

У статті [4] було доведено, що загальний розв'язок рівняння

$$\varphi(n) - f(s) \sum_{i=-1}^{b-n-2} p_i(s)\varphi(n+i) = \psi_n, \qquad 1 \leq n \leq b-1,$$

можна записати таким чином:

$$\varphi(n) = R_{b-n-1}(s)\varphi(b-1) - \sum_{k=1}^{b-n-1} R_k(s)\psi_{n+k}, \qquad 0 \leq n \leq b-1. \tag{2}$$

Нехай $\tau(b) = \inf\{t \geq 0 \colon \xi_a(t,b) = 0\}$ — перший період зайнятості і для $s > 0$ позначимо

$$\varphi_n(t,k) = \mathbf{P}_n\{\xi_a(t,b) = k, \tau(b) > t\}, \quad \Phi_n(s,k) = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi_n(t,k) dt.$$

Введемо також наступні позначення:

$$\Delta(s,n)=(1-f(s))D(s,n)+R_{b-a-1}(s)-\big(1-f^{1-b+a}(s)\big)R_{b-n-1}(s),$$

$$\Delta_1(s,k)=(1-f(s))D_1(s,k)-g(s,k)f^{-b+a}(s)\Big(1+(1-f(s))\sum_{i=1}^{b-1}R_i(s)\Big)-$$
$$-\big(1-f^{1-b+a}(s)\big)\sum_{i=1}^{b-1}R_i(s)f_i(s,k)+\sum_{i=1}^{b-a-1}R_i(s)f_{i+a}(s,k), \tag{3}$$

$$\Delta_2(s,k)=D_2(s,k)+g(s,k)f^{-b+a}(s)R_{b-1}(s),$$

де

$$D(s,n)=R_{b-a-1}(s)\sum_{i=1}^{b-n-1}R_i(s)-R_{b-n-1}(s)\sum_{i=1}^{b-a-1}R_i(s),$$

$$D_1(s,k)=\sum_{i=1}^{b-a-1}R_i(s)f_{i+a}(s,k)\sum_{i=1}^{b-1}R_i(s)-\sum_{i=1}^{b-a-1}R_i(s)\sum_{i=1}^{b-1}R_i(s)f_i(s,k),$$

$$D_2(s,k)=R_{b-a-1}(s)\sum_{i=1}^{b-1}R_i(s)f_i(s,k)-R_{b-1}(s)\sum_{i=1}^{b-a-1}R_i(s)f_{i+a}(s,k).$$

Теорема 1. *Для* $1\le n\le b-1$, $1\le k\le b$ *та* $s>0$ *маємо*

$$\Phi_n(s,k)=R_{b-1-n}(s)B_1(s,k)+\Big(1+\big(1-f(s)\big)\sum_{i=1}^{b-n-1}R_i(s)\Big)B_2(s,k)-$$
$$-\sum_{i=1}^{b-n-1}R_i(s)f_{i+n}(s,k), \tag{4}$$

де

$$B_1(s,k)=\frac{\Delta_1(s,k)}{\Delta(s,0)},\qquad B_2(s,k)=\frac{\Delta_2(s,k)}{\Delta(s,0)}. \tag{5}$$

***Наслідок* 1.** *Для* $1\le n\le b-1$

$$\mathbf{E}_n e^{-s\tau(b)}=\frac{\Delta(s,n)}{\Delta(s,0)}.$$

Нехай $R_k=\lim_{s\to0}R_k(s)$, $f_l(k)=\lim_{s\to0}f_l(s,k)$, $p_i=\lim_{s\to0}p_i(s)$. Зрозуміло, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}z^kR_k=z\big(f\big(\lambda(1-z)\big)-z\big)^{-1} \tag{6}$$

для достатньо малих $|z|$, а оскільки $q_i(0) = \lambda^{-1}\overline{p}_i$, $i \geq 0$, то

$$f_l(k) = \lambda^{-1} I\{k \in [l, b-1]\}\overline{p}_{k-l} + \lambda^{-1} I\{k = b\} \sum_{i=b-l}^{\infty} \overline{p}_i. \tag{7}$$

Теорема 2. *Для* $0 \leq k \leq b$ *маємо*

$$\frac{\pi_k(a,b)}{\pi_0(a,b)} = \begin{cases} R_k - R_{k-1}, & k \in [1, a], \\ R(a,b)\big(1 + \rho - R_{k-a}\big) + R_k - R_{k-1}, & k \in [a+1, b-1], \\ R(a,b)\big((1-\rho)\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i - b + a + 1\big) - \\ -(1-\rho)R_{b-1} + 1, & k = b, \end{cases}$$

де

$$\pi_0(a,b) = \Big(\rho\big(R_{b-1} - R(a,b) \sum_{i=1}^{b-a-1} (R_i - 1)\big) + 1\Big)^{-1},$$
$$R(a,b) = (R_{b-1} - R_{b-2})/R_{b-a-1}. \tag{8}$$

Для $a = b - 1$ отримуємо формули для ергодичного розподілу довжини черги в системі без відновлюючого рівня.

***Наслідок* 2.** *Для* $0 \leq k \leq b$ *маємо*

$$\pi_0(b) = \big(\rho R_{b-1} + 1\big)^{-1}, \qquad \pi_k(b) = \pi_0(b)(R_k - R_{k-1}), \qquad 1 \leq k \leq b-1,$$
$$\pi_b(b) = \pi_0(b)(1 - (1-\rho)R_{b-1}). \tag{9}$$

3. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми* 1.** Для функції $\Phi_n(s,k)$, використовуючи формулу повної ймовірності на проміжку обслуговування першої вимоги, отримуємо рівняння

$$\Phi_n(s,k) - f(s) \sum_{l=-1}^{b-n-2} p_l(s)\Phi_{n+l}(s,k) = f^{b-a}(s)\overline{p}_{b-n-1}(s)\Phi_a(s,k) +$$
$$+ g(s,k)\overline{p}_{b-n-1}(s) + f_n(s,k) \tag{10}$$

з граничною умовою $\Phi_0(s,k) = 0$. Використовуючи тепер (10), маємо

$$\Phi_n(s,k) = R_{b-1-n}(s)B_1(s,k) + \Big(1 + (1 - f(s)) \sum_{i=1}^{b-n-1} R_i(s)\Big)B_2(s,k) -$$
$$- \sum_{i=1}^{b-n-1} R_i(s) f_{i+n}(s,k), \qquad 1 \leq n \leq b-1,$$

де

$$B_1(s,k) = \Phi_{b-1}(s,k) - f^{-1}(s)g(s,k) - f^{b-a-1}(s)\Phi_a(s,k),$$

$$B_2(s,k) = f^{-1}(s)g(s,k) + f^{b-a-1}(s)\Phi_a(s,k).$$

Покладаючи тут $n = a$, отримуємо перше рівняння для $B_1(s,k)$ та $B_2(s,k)$:

$$R_{b-1-a}(s)B_1(s,k) + \Big((1-f(s))\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i(s) + 1 - f^{a-b+1}(s)\Big)B_2(s,k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{b-a-1} R_i(s) f_{i+a}(s,k,b) - g(s,k)f^{a-b}(s).$$

З $\Phi_0(s,k) = 0$ одержуємо друге рівняння

$$R_{b-1}(s)B_1(s,k) + \Big(1 + (1-f(s))\sum_{i=1}^{b-1} R_i(s)\Big)B_2(s,k) = \sum_{i=1}^{b-1} R_i(s) f_i(s,k).$$

Тепер для $B_1(s,k)$, $B_2(s,k)$ маємо систему двох лінійних рівнянь, визначник якої задається співвідношенням (3). Використовуючи формули Крамера, отримуємо (5).

Наслідок 1 випливає з (4), якщо перейти до суми в обох частинах цієї формули по k від 1 до b.

***Доведення теореми* 2.** З наслідку 1 отримуємо

$$\mathbf{E}\tau(b) = m\left(R(a,b)\sum_{i=1}^{b-a-1}(1-R_i) + R_{b-1}\right).$$

Співвідношення $\pi_0(a,b) = \lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\xi_a(t,b) = 0\} = \big(\lambda\mathbf{E}\tau(b) + 1\big)^{-1}$ є відомим і, отже, (8) доведено.

Нехай $\xi_a(0,b) = 1$ і $\tau_i(b) = \inf\{n > \tau_{i-1}(b); \xi_a(t,b) = 0\}$, $i = 1,2,...$, $\tau_0(b) = 0$, а ξ_i, $i = 1,2,\ldots,$ — час, коли вільний прилад чекає на вимогу починаючи з моменту $\tau_i(b)$. Зрозуміло, що $\tau_1(b) = \tau(b)$ і випадкові величини ξ_i, $i \ge 1$, є незалежними з показниковим розподілом з параметром λ. Моменти $\xi_i + \tau_i(b)$, $i = 1,2,\ldots,$ утворюють процес відновлення, і нехай $H(x)$ — його функція відновлення, тобто $H(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\Phi^{*i}(x)$, де $\Phi(x) = \mathbf{P}\{\tau_1(b) + \xi_1 < x\}$. Для $0 < k \le b$ маємо

$$\mathbf{P}\{\xi_a(t,b) = k\} = \mathbf{P}\{\xi_a(t,b) = k, \tau(b) > t\} + \int_0^t \mathbf{P}\{\xi_a(t-u,b) = k\}d\Phi(u).$$

Отже,

$$\mathbf{P}\{\xi_a(t,b) = k\} = \int_0^t \mathbf{P}\{\xi_a(t-u,b) = k, \tau(b) > t-u\}dH(u), \qquad 0 < k \le b.$$

За вузловою теоремою відновлення маємо

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_a(t,b)=k\} = \lambda\pi_0(a,b)\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi_a(u,b)=k, \tau(b)>t\}du. \tag{11}$$

Покладаючи в (4) $s=0$, $n=1$, отримуємо

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\xi_a(t,b)=k, \tau(b)>t\}dt = R_{b-2}B_1(k)+B_2(k)-\sum_{i=1}^{b-2} R_i f_{i+1}(k) \tag{12}$$

для всіх $1\le n\le b-1$, $1\le k\le b$, де

$$B_1(k) = R_{b-a-1}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i f_{i+a}(k) - mI\{k\in(a,b)\}\right),$$
$$B_2(k) = \sum_{i=1}^{b-1} R_i f_i(k) - \frac{R_{b-1}}{R_{b-a-1}}\left(\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i f_{i+a}(k) + mI\{k\in(a,b)\}\right). \tag{13}$$

Використовуючи (6), можемо перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{n} R_i\overline{p}_{n-i} = R_n - 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} R_i \sum_{k=n+1-i}^{\infty} \overline{p}_k = (m\lambda-1)\sum_{i=1}^{n} R_i + n$$

для всіх $n\ge 1$, що разом з (7) дає

$$\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i f_{i+a}(k) = \lambda^{-1}(R_{k-a}-1)I\{k\in[a+1,b-1]\},$$

$$\sum_{i=1}^{b-1} R_i f_i(b) = \lambda^{-1}\left((\rho-1)\sum_{i=1}^{b-1} R_i + b - 1\right).$$

Використовуючи це в (13), отримуємо

$$R_{b-2}B_1(k)+B_2(k)-\sum_{i=1}^{b-2} R_i f_{i+1}(k) =$$

$$= \lambda^{-1}\begin{cases} R_k - R_{k-1}, & k\in[1,a], \\ R_k - R_{k-1} + R(a,b)\big(1+\rho-R_{k-a}\big), & k\in[a+1,b-1], \\ R(a,b)\left((1-\rho)\displaystyle\sum_{i=1}^{b-a-1} R_i - b + a + 1\right) - & \\ -(1-\rho)R_{b-1}+1, & k=b. \end{cases}$$

Застосовуючи тепер (11), (12), завершуємо доведення теореми.

4. Інші стаціонарні характеристики системи. Крім ергодичного розподілу кількості вимог є ще ряд інших параметрів, які можуть використовуватися для опису ефективності праці системи. Для системи $M_a/GI/1/b$ ми розглянемо ще такі характеристики: кількість вимог, які були обслуговані за одиницю часу в стаціонарному режимі, та число блокувань вхідного струменя вимог (теж за одиницю часу і в стаціонарному режимі). Позначимо ці величини відповідно $N_{\text{ser}}(a)$ та $N_{\text{blo}}(a)$. Нехай також N_{ser} позначає кількість вимог, які були обслуговані за одиницю часу в стаціонарному режимі для системи без відновлюючого рівня $M/GI/1/b$. Далі нам будуть потрібні середні значення вказаних характеристик, і щоб не збільшувати об'єм статті, обмежимося лише ними.

Теорема 3. *Мають місце рівності*

$$\mathbf{E}N_{\text{ser}}(a) = \lambda\pi_0(a,b)\left(R_{b-1} - R(a,b)\sum_{k=1}^{b-a-1}(R_k - 1)\right), \tag{14}$$

$$\mathbf{E}N_{\text{blo}}(a) = \lambda\pi_0(a,b)R(a,b), \qquad \mathbf{E}N_{\text{ser}} = \lambda\pi_0(b)R_{b-1}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $N(t)$ — кількість вимог, які були обслуговані на інтервалі $[0,t]$, і $\Phi_n(s) = \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}_n N(t)dt, \quad s > 0$. Міркуючи так само, як і при доведенні теореми 1, отримуємо для $1 \le n \le b$ рівняння

$$\Phi_n(s) - f(s)\sum_{l=-1}^{b-n-2} p_l(s)\Phi_{n+l}(s) =$$

$$= \frac{f(s)}{s} + \overline{p}_{b-n-1}(s)\left(\frac{f^2(s)(1-f^{b-a-1}(s))}{s(1-f(s))} + f^{b-a}(s)\right)\Phi_a(s) \tag{16}$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}\Phi_1(s). \tag{17}$$

Застосовуючи (2) до (16), маємо

$$\Phi_n(s) = R_{b-n-1}(s)D_b(s) + f^{b-a-1}(s)\left((1-f(s))\sum_{k=1}^{b-n-1}R_k(s) + 1\right)\Phi_a(s) +$$

$$+\Psi_{b-n}(s), \tag{18}$$

де

$$D_b(s) = \Phi_{b-1}(s) - f^{b-a-1}(s)\Phi_a(s),$$

$$\Psi_n(s) = -\frac{f(s)(1-f^{b-a-1}(s))(R_{n-1}(s)-1)}{s(1-f(s))} - \frac{f^{b-a}(s)}{s}\sum_{k=1}^{n-1}R_k(s).$$

З (18) для $n = a$ та граничної умови (17) отримуємо систему лінійних рівнянь для $D_b(s),\ \Phi_a(s)$. Нехай $\Delta(s)$ позначає визначник цієї системи. Оскільки, як відомо, стаціонарні характеристики системи не залежать від її початкового стану, то достатньо розглянути лише $\Phi_a(s)$. Тоді

$$\Phi_a(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \mathbf{E}_a N(t) dt = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)},$$

де

$$\Delta_1(s) = \Psi_{b-a}(s)\Big(\frac{\lambda}{s+\lambda} R_{b-2}(s) - R_{b-1}(s)\Big) + R_{b-a-1}(s)\Big(\Psi_b(s) - \frac{\lambda}{s+\lambda}\Psi_{b-1}(s)\Big).$$

Виконуючи прості обчислення, отримуємо співвідношення

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\Delta(s) = R_{b-a-1}\left[mR(a,b)\sum_{k=1}^{b-a-1}(R_k - 1) - mR_{b-1} - \frac{1}{\lambda}\right] = -\frac{R_{b-a-1}}{\lambda\pi_0(a,b)},$$

$$\lim_{s\to 0} s\Delta_1(s) = R_{b-a-1}\left[R(a,b)\sum_{k=1}^{b-a-1}(R_k - 1) - R_{b-1}\right].$$

Тому

$$\mathbf{E}N_{\text{ser}}(a) = \lim_{t\to\infty}\Big(\mathbf{E}_a N(t+1) - \mathbf{E}_a N(t)\Big) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\left((e^s - 1)\int\limits_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}_a N(t)dt - \int\limits_0^1 e^{-st}\mathbf{E}_a N(t)dt\right) = \lim_{s\to 0} s^2\Phi_a(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{s\Delta_1(s)}{s^{-1}\Delta(s)} = \lambda\pi_0(a,b)\left(R_{b-1} - R(a,b)\sum_{k=1}^{b-a-1}(R_k - 1)\right).$$

Для доведення (15) позначимо

$$\tau_0(a,b) = 0, \qquad \tau_k(a,b) = \inf\{t > \tau_{k-1}(a,b)\colon \xi_a(t,b) = b\}, \qquad k = 1,2,\ldots,$$

і нехай $\eta_n(a,b) = \tau_{n+1}(a,b) - \tau_n(a,b)$, $n \geq 0$. Зрозуміло, що для $n \geq 1$ випадкові величини $\eta_n(a,b)$ є незалежними та однаково розподіленими.

Розглянемо тепер стандартну систему $M/GI/1/b$ без відновлюючого рівня, з необмеженою чергою, і нехай $\xi(t)$ позначає число вимог у системі в момент часу t. Покладемо $\tau(b) = \inf\{t > 0\colon \xi(t) = b\}$, і нехай $\gamma(b)$ — залишковий час обслуговування в момент часу $\tau(b)$ для цієї системи. Зрозуміло, що розподіл випадкових величин $\eta_n(a,b)$, $n \geq 1$, збігається з розподілом випадкової величини $\gamma(b) + \sum_{i=1}^{b-a-1}\beta_i + \tau(b)$ при умові, що $\xi(0) = a$. Тут β_i, $i \geq 1$, є незалежними випадковими величинами з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\nu(t) = \max\left\{k\colon \sum_{n=0}^{k}\eta_n(b) < t\right\}$ — процес відновлення (взагалі кажучи, з затримкою) і якщо $M(t) = 1 + \mathbf{E}\nu(t)$ — його функція відновлення, то

$$\mathbf{E}N_{\text{blo}}(a) = \lim_{t\to\infty}(M(t+1) - M(t)) = \big(\mathbf{E}_a\big(\gamma(b) + \tau(b)\big) + m(b-a-1)\big)^{-1}. \tag{19}$$

Позначимо $\psi_n = \mathbf{E}_n(\tau(b) + \gamma(b))$. Для $1 \le n \le b$ стандартними міркуваннями отримуємо

$$\psi_n = \sum_{i=0}^{b-n-1} \int_0^\infty (x + \psi_{n+i-1}) e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^i}{i!} dF(x) + \int_0^\infty x \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{b-n} \alpha_i < x \right\} dF(x) \qquad (20)$$

і $\psi_0 = \lambda^{-1} + \psi_1$. Тут α_i позначає довжину інтервалу між вимогами у вхідному струмені. Випадкова величина $\sum_{i=1}^{b-n} \alpha_i$ має розподіл Ерланга, і ми можемо трансформувати (20) в

$$\psi_n - \sum_{i=-1}^{b-n-2} p_i \psi_{n+i} = m.$$

Розв'язок цього рівняння ми отримуємо з (2), тоді з граничної умови $\psi_0 = \lambda^{-1} + \psi_1$ маємо

$$\psi_n = \frac{m R_{b-1} + \lambda^{-1}}{R_{b-1} - R_{b-2}} R_{b-n-1} - m \sum_{k=1}^{b-n-1} R_k,$$

а тому

$$\mathbf{E}_a(\tau(b) + \gamma(b)) = \frac{m\lambda R_{b-1} + 1}{\lambda R(a,b)} - m \sum_{k=1}^{b-a-1} R_k,$$

що разом з (19) дає першу формулу в (15). Друга формула випливає з першої, якщо взяти $a = b - 1$.

Теорему 3 доведено.

5. Числовий приклад. Для обчислень ми використовували пакет MATEMATIKA. Легко зауважити, що всі характеристики, які розглядаються в цій статті, виписуються в термінах функції R_n, для якої з (6) отримуємо наступний рекурентний алгоритм:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}, \qquad R_{n+1} = R_1 \left(R_n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k R_{n-k} \right), \qquad n \ge 1.$$

Нехай для системи з відновлюючим рівнем C_{ser}, C_{blo}, C_{los} позначають відповідно плату за обслуговану вимогу, вартість одного блокування та плату за втрачену вимогу.

$C_{\text{len}} \mathbf{E} \xi_a(\infty, b)$ та $C_{\text{len}} \mathbf{E} \xi(\infty)$ позначають сукупні витрати, пов'язані з чеканням у черзі для системи з відновлюючим рівнем та без нього.

Загальний кошт праці системи буде тепер таким:

$$F(a,b) = C_{\text{ser}} \mathbf{E} N_{\text{ser}}(a) - C_{\text{blo}} \mathbf{E} N_{\text{ser}}(a) - C_{\text{len}} \sum_{k=1}^{b} k \pi_k(a,b)$$

для системи з відновлюючим рівнем та

$$F(b) = C_{\text{ser}} \mathbf{E} N_{\text{ser}} - C_{\text{los}} \mathbf{E} N_{\text{los}} - C_{\text{len}} \sum_{k=1}^{b} k \pi_k(b)$$

для системи без нього.

З теореми 3 випливає, що

$$F(a,b)=\lambda\pi_0(a,b)\left(C_{\text{ser}}R_{b-1}-R(a,b)\left(C_{\text{ser}}\sum_{k=1}^{b-a-1}(R_k-1)+C_{\text{ser}}\right)\right)-$$

$$-C_{\text{len}}\sum_{k=1}^{b}k\pi_k(a,b).$$

Якщо для системи $M/G/1/b$ без відновлюючого рівня $N_{\text{ar}}(t)$, $N_{\text{ser}}(t)$, $N_{\text{los}}(t)$ позначають відповідно число вимог, які надійшли, були обслуговані та були втрачені на інтервалі $[0,t]$ при умові, що $\xi(0)=n$, то $n+N_{\text{ar}}(t)=N_{\text{los}}(t)+N_{\text{ser}}(t)+\xi(t)$. Маємо

$$\mathbf{E}_n[N_{\text{ar}}(t)-N_{\text{ar}}(t-1)]=\mathbf{E}_n[N_{\text{los}}(t)-N_{\text{los}}(t-1)]+\mathbf{E}_n[N_{\text{ser}}(t)-N_{\text{ser}}(t-1)]+$$

$$+\mathbf{E}_n\xi(t)-\mathbf{E}_n\xi(t-1).$$

Зрозуміло, що $\mathbf{E}_n[N_{\text{ar}}(t)-N_{\text{ar}}(t-1)]=\lambda$, а тому

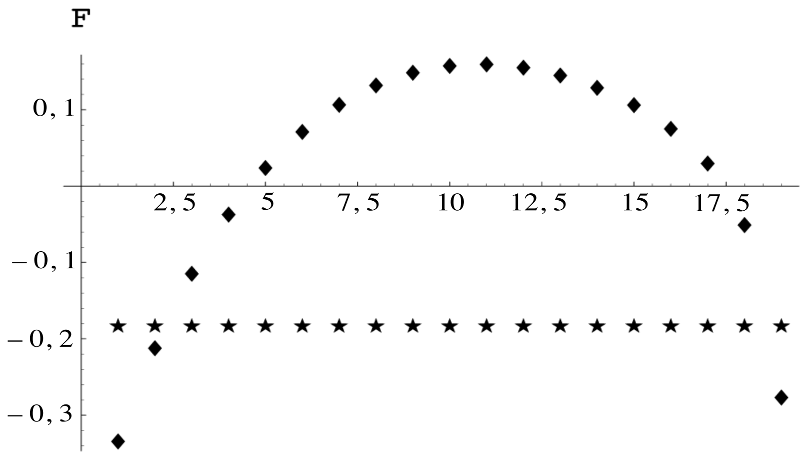
$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_n[N_{\text{los}}(t)-N_{\text{los}}(t-1)]=\lambda-\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_n[N_{\text{ser}}(t)-N_{\text{ser}}(t-1)]=$$

$$=\lambda-\mathbf{E}N_{\text{ser}}=\lambda\big(1-\pi_0(b)R_{b-1}\big).$$

Звідси випливає формула для функції $F(b)$:

$$F(b)=\lambda\pi_0(b)R_{b-1}\Big(C_{\text{ser}}+C_{\text{los}}\Big)-\lambda C_{\text{los}}-C_{\text{len}}\sum_{k=1}^{b}k\pi_k(b).$$

Приклад. Розглянемо систему з $\lambda=1,4$ та щільністю розподілу часу обслуговування $f(x)=\dfrac{3^{2,4}}{\Gamma(2,4)}e^{-3x}x^{1,4}$ (гамма-розподіл з параметрами $3;2,4$). Нехай $b=20$.



У цьому випадку $\rho = 1,12$. На рисунку точки, відмічені знаком ♦, відповідають системі з відновлюючим рівнем, а точки, відмічені знаком ★, — системі без такого рівня. Нехай також

$$S_{\text{ser}} = 5,1, \quad S_{\text{blo}} = 1,5, \quad S_{\text{len}} = 0,42, \quad S_{\text{los}} = 2, \quad S_{\text{sho}} = 0,2.$$

Із графіків функцій $F(a,20),\ F(20)$ випливає, що для $5 \le a \le 17$ система з відновлюючим рівнем працює ефективніше за систему без відновлюючого рівня, для якої $F(20) = -0,183$.

1. *Takagi H.* A analysis of a finite-capacity M/G/1 queue with a resume level // Perform. Eval. – 1985. – **5**, № 3. – P. 197 – 203.
2. *Takagi H.* Queueing analysis. – The Netherlands: Elsevier Sci. Publ., 1993. – Vol. 2.
3. *Srinivasa Rao T.S.S., Gupta U. C.* A simple method for cimputing state probabilities of the $M/G/1$ and $GI/N/1$ finite waiting space queues // ZOR-Math. Metods of Operat. Res. – 1996. – **43**. – P. 97 – 106.
4. *Bratiychuk M., Borowska B.* Explicit formulae and convergence rate for the system E/G/1/N // Communs Statist. Stochast. Models. – 2001. – **18**. – P. 71 – 78.
5. *Korolyuk V. S.* Boundary problems for compound Poisson process. – Kiev: Naukova Dumka, 1975.

Одержано 28.12.12