УДК 512.579

А. В. Жучок (Луган. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

НАПІВРЕТРАКЦІЇ ТРІОЇДІВ

We introduce and study the notion of a semiretraction of trioid. Examples of left, right, and symmetric semiretractions of trioids are given. We also construct new theoretical trioid constructions for which some symmetric semiretractions are characterized.

Определяется и изучается понятие полуретракции триоида. Приведены примеры левых, правых и симметрических полуретракций триоидов. Построены новые теоретико-триоидные конструкции, для которых охарактеризованы некоторые симметрические полуретракции.

1. Вступ. Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [1] побудували операди, асоційовані з ланцюговими модулями симплексів та політопів Сташеффа. Відповідні алгебри мають три операції та називаються асоціативними триалгебрами й дендриформними триалгебрами. Триалгебри досліджувалися в роботах різних авторів (див., наприклад, [1 – 5]). Так, предметом вивчення роботи [2] є вільна дендриформна триалгебра на одному породжуючому елементі. Зв'язки між алгебрами Хопфа та триалгебрами описано в [3]. Роботу [4] присвячено аналізу зв'язків між триалгебрами та 3-алгебрами Лейбніца. В останній роботі побудовано універсальну обгортуючу алгебру для 3-алгебри Лейбніца. Зв'язки між операторами Рота – Бакстера та дендриформними діалгебрами та дендриформними триалгебрами охарактеризовано в [5]. Тріоїдом є множина з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють ті ж самі аксіоми, що й триалгебра. Таким чином, триалгебра є лінійним аналогом тріоїда. Це поняття було введено Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко [1]. Якщо операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Якщо дві певні операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в дімоноїд. Дімоноїди були введені Ж.-Л. Лоде [6] для вивчення властивостей алгебр Лейбніца та вивчалися в роботах автора (див., наприклад, [7 – 9]). З іншого боку, будь-який тріоїд є дімоноїдом з бінарною асоціативною операцією, яка задовольняє п'ять додаткових аксіом. Першим результатом про тріоїди є опис Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко [1] вільного тріоїда, породженого заданою множиною. Тріоїди вивчалися також у [10 – 12]. Поняття тріоїда в наш час є маловивченим і потребує різноманітних досліджень. Природною у цьому напрямку є задача поширення результатів теорії напівгруп та теорії дімоноїдів на тріоїди. При цьому результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосовані й до триалгебр.

Поняття напівретракції, яке було введено В. М. Усенком [13], є ефективним при описі конгруенцій на напівгрупах. Деякі застосування техніки напівретракцій напівгруп наведено в [14 – 17]. У [18] техніку В. М. Усенка напівретракцій моноїдів поширено на випадок дімоноїдів.

У цій статті визначається і вивчається поняття напівретракції тріоїда, наводяться деякі застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій на тріоїдах.

Роботу структуровано таким чином. У другому пункті наведено основні поняття, які використовуються в роботі. У третьому пункті досліджено загальні властивості напівретракцій тріоїдів. У четвертому пункті наведено однобічні напівретракції довільних тріоїдів з деякими додатковими умовами та вільних тріоїдів рангу 1. У п'ятому пункті отримано опис симетричних напівретракцій деяких тріоїдів, зокрема вільних тріоїдів рангу 1, з характеризацією відповідних мутацій. У шостому пункті розглянуто питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда Ріса [18] на випадок тріоїда. Знайдено необхідні та достатні умови існування тріоїдів Ріса. Наведено приклади тріоїда Ріса та алгебри, що узагальнює дімоноїд Ріса, але не є тріоїдом. Для тріоїдів Ріса побудовано один клас симетричних напівретракцій. У сьомому пункті розглянуто питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда з деформованими множеннями [18] на випадок тріоїда. Встановлено необхідні та достатні умови існування тріоїдів з деформованими множеннями. Наведено приклади тріоїда з деформованими множеннями та алгебри, що узагальнює дімоноїд з деформованими множеннями, але не є тріоїдом. Для тріоїдів з деформованими множеннями охарактеризовано симетричні напівретракції.

2. Основні поняття. Наведемо основні поняття, які будемо використовувати в цій роботі.

Непорожня множина T з трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють такі аксіоми:

(T_1) $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$,
(T_2) $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$,
(T_3) $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$,
(T_4) $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)$,
(T_5) $(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)$,
(T_6) $(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)$,
(T_7) $(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)$,
(T_8) $(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріоїдом.

Щоб навести еквівалентне означення тріоїда, нагадаємо означення дімоноїда.

Непорожня множина T з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми (T_1) – (T_3), називається дімоноїдом [6 – 9]. Дімоноїд $(T, \dashv, \vdash)$ з бінарною асоціативною операцією $\perp$, яка задовольняє аксіоми (T_4) – (T_8), називається тріоїдом.

Приклади тріоїдів можна знайти в [1, 10 – 12].

Відображення f тріоїда T_1 у тріоїд T_2 називається гомоморфізмом, якщо

$$(x \dashv y)f = xf \dashv yf,$$

$$(x \vdash y)f = xf \vdash yf,$$

$$(x \perp y)f = xf \perp yf$$

для всіх $x, y \in T_1$. Якщо f є також бієкцією, то f — ізоморфізм.

Підмножина A тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається підтріоїдом, якщо для будь-яких $a, b \in T$ з $a, b \in A$ випливає $a \dashv b,\ a \vdash b,\ a \perp b \in A$.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — довільний тріоїд. Якщо операції $\vdash$ та $\perp$ або $\dashv$ та $\perp$ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, то він перетворюється в дімоноїд. Таким чином, кожний дімоноїд можна розглядати як тріоїд. Приклади дімоноїдів розглядалися в [6 – 9].

Якщо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Отже, кожну напівгрупу можна розглядати як тріоїд.

3. Загальні властивості напівретракцій. У цьому пункті ми введемо поняття лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда та дослідимо загальні властивості введених понять.

3.1. Перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називатимемо лівою напівретракцією, якщо

$$(x \dashv y)\tau = (x\tau \dashv y)\tau, \tag{1}$$

$$(x \vdash y)\tau = (x\tau \vdash y)\tau, \tag{2}$$

$$(x \perp y)\tau = (x\tau \perp y)\tau \tag{3}$$

при будь-яких $x,\, y \in T$. Якщо замість (1) – (3) виконуються тотожності

$$(x \dashv y)\tau = (x \dashv y\tau)\tau, \tag{4}$$

$$(x \vdash y)\tau = (x \vdash y\tau)\tau, \tag{5}$$

$$(x \perp y)\tau = (x \perp y\tau)\tau, \tag{6}$$

то будемо говорити про праву напівретракцію.

Якщо для перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ виконуються тотожності $(1) - (6)$, то перетворення τ називатимемо (симетричною) напівретракцією тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Для будь-якого перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ покладемо

$$\nabla_\tau = \{(x, y) \in T \times T \,|\, x\tau = y\tau\}.$$

Наступні чотири леми доводяться аналогічно відповідним лемам із пп. 1.1 – 1.4 роботи [18].

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є його лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є правою конгруенцією на цьому тріоїді.*

3.2. У двоїстий спосіб отримуємо таку лему.

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є його правою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є лівою конгруенцією на цьому тріоїді.*

3.3. Має місце така лема.

Лема. *Для кожної правої конгруенції ω на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ існує його ліва напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \omega$.*

3.4. У двоїстий спосіб отримуємо таку лему.

Лема. *Для кожної лівої конгруенції ω на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ існує його права напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \omega$.*

3.5. Нехай τ — симетрична напівретракція тріоїда $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ (див. п. 3.1). На множині $\operatorname{Im}\tau$ визначимо операції $\dashv_\tau$, $\vdash_\tau$ та $\perp_\tau$ за правилами

$$x {\dashv_\tau} y = (x {\dashv} y)\tau, \quad x {\vdash_\tau} y = (x {\vdash} y)\tau, \quad x {\perp_\tau} y = (x {\perp} y)\tau$$

для всіх $x,\, y \in \operatorname{Im}\tau$. Алгебру $(\operatorname{Im}\tau, \dashv_\tau, \vdash_\tau, \perp_\tau)$ позначимо через $\overline{T}^\tau$.

Лема. $\overline{T}^\tau$ *є тріоїдом.*

Доведення. При будь-яких $x,\ y,\ z \in \operatorname{Im}\tau$ маємо

$$(x\perp_\tau y)\perp_\tau z = (x\perp y)\tau\perp_\tau z = ((x\perp y)\tau\perp z)\tau = ((x\perp y)\perp z)\tau =$$

$$= (x\perp(y\perp z))\tau = (x\perp(y\perp z)\tau)\tau = x\perp_\tau(y\perp z)\tau = x\perp_\tau(y\perp_\tau z),$$

$$(x\dashv_\tau y)\dashv_\tau z = ((x\dashv y)\tau\dashv z)\tau = ((x\dashv y)\dashv z)\tau =$$

$$= (x\dashv(y\perp z))\tau = (x\dashv(y\perp z)\tau)\tau = x\dashv_\tau(y\perp z)\tau = x\dashv_\tau(y\perp_\tau z),$$

$$(x\perp_\tau y)\dashv_\tau z = ((x\perp y)\tau\dashv z)\tau = ((x\perp y)\dashv z)\tau =$$

$$= (x\perp(y\dashv z))\tau = (x\perp(y\dashv z)\tau)\tau = x\perp_\tau(y\dashv z)\tau = x\perp_\tau(y\dashv_\tau z),$$

$$(x\dashv_\tau y)\perp_\tau z = ((x\dashv y)\tau\perp z)\tau = ((x\dashv y)\perp z)\tau =$$

$$= (x\perp(y\vdash z))\tau = (x\perp(y\vdash z)\tau)\tau = x\perp_\tau(y\vdash z)\tau = x\perp_\tau(y\vdash_\tau z),$$

$$(x\vdash_\tau y)\perp_\tau z = ((x\vdash y)\tau\perp z)\tau = ((x\vdash y)\perp z)\tau =$$

$$= (x\vdash(y\perp z))\tau = (x\vdash(y\perp z)\tau)\tau = x\vdash_\tau(y\perp z)\tau = x\vdash_\tau(y\perp_\tau z),$$

$$(x\perp_\tau y)\vdash_\tau z = ((x\perp y)\tau\vdash z)\tau = ((x\perp y)\vdash z)\tau =$$

$$= (x\vdash(y\vdash z))\tau = (x\vdash(y\vdash z)\tau)\tau = x\vdash_\tau(y\vdash z)\tau = x\vdash_\tau(y\vdash_\tau z)$$

згідно з тотожностями (1) – (6), асоціативністю операції $\perp$ та аксіомами тріоїда $\overline{T}$. Отже, аксіоми (T_4) – (T_8) тріоїда та асоціативність операції $\perp_\tau$ виконуються. Справедливість аксіом (T_1) – (T_3) та асоціативність операцій $\dashv_\tau$, $\vdash_\tau$ випливають з п. 3.1 роботи [18]. Таким чином, $\overline{T}^\tau$ — тріоїд.

Лему доведено.

Тріоїд $\overline{T}^\tau$ називатимемо τ-мутацією тріоїда $\overline{T}$. Легко бачити, що відображення

$$\tau^\# : \overline{T} \to \overline{T}^\tau : x \mapsto x\tau^\# = x\tau$$

є гомоморфізмом тріоїдів.

3.6. Загальну характеристику симетричних напівретракцій дає таке твердження.

Твердження. *Для ідемпотентного перетворення π тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ еквівалентними є такі твердження*:

1) *π є симетричною напівретракцією*;

2) *π є лівою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності — конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$*;

3) *π є правою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності — конгруенцією на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$*;

4) *для всіх $x, y \in T$ виконуються тотожності*

$$(x\dashv y)\,\pi = (x\pi\dashv y\pi)\,\pi,$$

$$(x\vdash y)\,\pi = (x\pi\vdash y\pi)\,\pi,$$

$$(x \perp y)\, \pi = (x\pi \perp y\pi)\, \pi.$$

Доведення є аналогічним доведенню твердження з п. 3.2 роботи [18].

Таким чином, задача опису конгруенцій на тріоїдах заданого класу зводиться до опису напівретракцій цих тріоїдів. Тобто, знаючи дію напівретракції на тріоїді, ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, і навпаки, знаючи будову конгруенції на тріоїді, можна задати клас напівретракцій, відношення рівнозначності за якими збігаються з заданою конгруенцією.

4. Ліві та праві напівретракції. У цьому пункті ми наведемо ліві (праві) напівретракції довільних тріоїдів, які містять принаймні один ідемпотент відносно операції $\vdash$ ($\dashv$), а також вільних тріоїдів рангу 1.

4.1. Один із прикладів лівих напівретракцій виникає при розгляді внутрішніх лівих зсувів тріоїдів.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — довільний тріоїд. Перетворення $\lambda_a,\ a \in T$, тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо внутрішнім лівим зсувом $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, якщо $x\lambda_a = a \vdash x$ для всіх $x \in T$.

Твердження. *Якщо $a \in T$ та $a \vdash a = a$, то внутрішній лівий зсув λ_a тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є лівою напівретракцією. При цьому $\operatorname{Im} \lambda_a$ — підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.*

Доведення. Згідно з твердженням із п. 2.2 [18] для λ_a виконуються умови (1), (2). Покажемо, що для λ_a має місце й умова (3).

Для будь-яких $x, y \in T$ маємо

$$(x \perp y)\lambda_a = a \vdash (x \perp y) = a \vdash (a \vdash (x \perp y)) =$$

$$= a \vdash ((a \vdash x) \perp y) = a \vdash (x\lambda_a \perp y) = (x\lambda_a \perp y)\lambda_a$$

завдяки умові $a \vdash a = a$, асоціативності операції $\vdash$ та аксіомі (T_7) тріоїда.

Отже, λ_a є лівою напівретракцією.

Згідно з твердженням із п. 2.2 [18] множина $\operatorname{Im} \lambda_a$ є замкненою відносно операцій $\dashv$ та $\vdash$. Покажемо, що вона є замкненою й відносно операції $\perp$.

Зрозуміло, що $\operatorname{Im} \lambda_a = a \vdash T$. Візьмемо елементи $a \vdash x,\ a \vdash y \in \operatorname{Im} \lambda_a$, для яких отримаємо

$$((a \vdash x) \perp (a \vdash y))\lambda_a = a \vdash ((a \vdash x) \perp (a \vdash y)) =$$

$$= (a \vdash (a \vdash x)) \perp (a \vdash y) = (a \vdash x) \perp (a \vdash y)$$

завдяки аксіомі (T_7) тріоїда, асоціативності операції $\vdash$ та умові $a \vdash a = a$. Звідси випливає, що $\operatorname{Im} \lambda_a$ є замкненою відносно операції $\perp$. Таким чином, $\operatorname{Im} \lambda_a$— підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Твердження доведено.

4.2. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — довільний тріоїд. Перетворення $\rho_a,\ a \in T$, тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо внутрішнім правим зсувом $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, якщо $x\rho_a = x \dashv a$ для всіх $x \in T$.

У двоїстий спосіб (див. п. 4.1) доводиться таке твердження.

Твердження. *Якщо $a \in T$ та $a \dashv a = a$, то внутрішній правий зсув ρ_a тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є правою напівретракцією. При цьому $\operatorname{Im} \rho_a$ — підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.*

4.3. Нехай P^* — вільна напівгрупа на двохелементній множині $X = \{x, \bar{x}\}$, $P \subset P^*$— напівгрупа, яка містить слова, до запису яких елемент $\bar{x}$ входить принаймні один раз. Нехай далі w — довільне слово з P. Через $\tilde{w}$ позначимо слово, отримане з w заміною всіх літер $\bar{x}$ на x. Зрозуміло, що $\tilde{w} \in P^* \backslash P$.

На множині P визначимо операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ за правилами

$$w\dashv u = w\tilde{u}, \qquad w\vdash u = \tilde{w}u, \qquad w\perp u = wu$$

для всіх $w, u \in P$. З твердження 1.9 [1] випливає, що $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ — вільний тріоїд рангу 1. Позначимо його через $\mathrm{Frt}\,(X)$.

У [1] показано, що вільна триалгебра над векторним простором цілком визначається вільною триалгеброю з одним породжуючим елементом, а опис останньої зводиться до опису вільного тріоїда рангу 1.

Нехай $w \in \mathrm{Frt}(X)$. Через $\overrightarrow{w}$ ($\overleftarrow{w}$) позначатимемо початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини слова w, яке закінчується (починається) літерою $\bar{x}$.

Нехай

$$\pi\colon \mathrm{Frt}(X) \to \mathrm{Frt}(X)\colon w \mapsto \overrightarrow{w}.$$

Твердження. *Перетворення* π *є правою напівретракцією вільного тріоїда* $\mathrm{Frt}(X)$.

Доведення. Дійсно, для довільних $w, u \in \mathrm{Frt}(X)$ отримуємо

$$(w \dashv u)\pi = (w\tilde{u})\pi = \overrightarrow{w} = (w\widetilde{\overrightarrow{u}})\pi = (w \dashv \overrightarrow{u})\pi = (w \dashv u\pi)\pi,$$

$$(w \vdash u)\pi = (\tilde{w}u)\pi = \tilde{w}\overrightarrow{u} = (\tilde{w}\overrightarrow{u})\pi = (w \vdash \overrightarrow{u})\pi = (w \vdash u\pi)\pi,$$

$$(w \perp u)\pi = (wu)\pi = \overrightarrow{w} = (w\overrightarrow{u})\pi = (w \perp \overrightarrow{u})\pi = (w \perp u\pi)\pi,$$

звідки, за означенням, π є правою напівретракцією.

Нарешті, покажемо, що π не є лівою напівретракцією:

$$(w \vdash u)\pi = (\tilde{w}u)\pi = \tilde{w}\overrightarrow{u} \neq \widetilde{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{u} = (\widetilde{\overrightarrow{w}}u)\pi = (\overrightarrow{w} \vdash u)\pi = (w\pi \vdash u)\pi.$$

Твердження доведено.

4.4. Нехай

$$\pi'\colon \mathrm{Frt}(X) \to \mathrm{Frt}(X)\colon w \mapsto \overleftarrow{w}.$$

У двоїстий спосіб (див. п. 4.3) доводиться таке твердження.

Твердження. *Перетворення* π' *є лівою напівретракцією вільного тріоїда* $\mathrm{Frt}(X)$.

5. Симетричні напівретракції. У цьому пункті ми встановимо необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення τ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ є його напівретракцією, та охарактеризуємо в цьому випадку відповідну τ-мутацію. Крім цього, побудуємо напівретракцію вільного тріоїда рангу 1 та опишемо відповідну мутацію.

5.1. Нехай $(T, \perp)$ — довільна напівгрупа. Визначимо на T операції $\dashv$ та $\vdash$ за правилами

$$x \dashv y = x, \qquad x \vdash y = y$$

для всіх $x, y \in T$. Згідно з твердженням 10 [12] $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є тріоїдом.

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо позначати через $T_{lr}^{\perp}$.

Зазначимо, що якщо операції довільного тріоїда збігаються, то з означення лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда (див. п. 3.1) отримуємо означення лівої (правої, симетричної) напівретракції напівгрупи (див. [15]).

У позначеннях п. 3.5 має місце така теорема.

Теорема. *Ідемпотентне перетворення τ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ є його напівретракцією тоді й тільки тоді, коли τ є ідемпотентною напівретракцією напівгрупи $(T, \perp)$. При цьому $(T_{lr}^{\perp})^{\tau} = (\operatorname{Im}\tau)_{lr}^{\perp_{\tau}}$.*

Доведення. *Необхідність* випливає з означення напівретракції тріоїда.

Достатність. Нехай τ — ідемпотентна напівретракція напівгрупи $(T, \perp)$. Для всіх $x, y \in T$ маємо

$$(x \dashv y)\,\tau = x\tau = x\tau^2 = (x\tau \dashv y\tau)\,\tau,$$

$$(x \vdash y)\,\tau = y\tau = y\tau^2 = (x\tau \vdash y\tau)\,\tau.$$

Отже, згідно з твердженням із п. 3.6 τ — ідемпотентна напівретракція тріоїда $T_{lr}^{\perp}$. Неважко перевірити, що τ-мутація $\left(T_{lr}^{\perp}\right)^{\tau}$ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ збігається з тріоїдом $(\operatorname{Im}\tau)_{lr}^{\perp_{\tau}}$.

Теорему доведено.

5.2. Як звичайно, через $\mathbb{N}$ позначатимемо множину натуральних чисел.

Нехай $w \in \operatorname{Frt}(X)$ (див. п. 4.3). Через $c\,(w)$ позначимо множину елементів з X, які входять до запису слова w. Визначимо перетворення α множини P, поклавши $w\alpha$ — слово, отримане з w видаленням усіх літер x, якщо $x \in c\,(w)$, та $w\alpha = w$ — в іншому випадку. Наприклад, якщо $w = x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}$, то $w\alpha = \bar{x}\bar{x}\bar{x}$.

У позначеннях пп. 3.5, 5.1 має місце така теорема.

Теорема. *Перетворення α є напівретракцією вільного тріоїда* $\operatorname{Frt}(X)$. *При цьому* $\operatorname{Frt}(X)^{\alpha} \cong N_{lr}^{+}$.

Доведення. Неважко побачити, що $\alpha^2 = \alpha$ та α — ендоморфізм напівгрупи $(P, \perp)$. Для всіх $w, u \in \operatorname{Frt}(X)$ маємо

$$(w \dashv u)\,\alpha = (w\tilde{u})\,\alpha = w\alpha = (w\alpha)\,\alpha =$$

$$= \left(w\alpha\,\widetilde{u\alpha}\right)\alpha = (w\alpha \dashv u\alpha)\,\alpha,$$

$$(w \vdash u)\,\alpha = (\tilde{w}u)\,\alpha = u\alpha = (u\alpha)\,\alpha =$$

$$= \left(\widetilde{w\alpha}\,u\alpha\right)\alpha = (w\alpha \vdash u\alpha)\,\alpha,$$

$$(wu)\,\alpha = (w \perp u)\,\alpha = w\alpha \perp u\alpha =$$

$$= (wu)\,\alpha^2 = (w\alpha \perp u\alpha)\,\alpha.$$

Отже, згідно з твердженням із п. 3.6 α — напівретракція $\operatorname{Frt}(X)$.

Зрозуміло, що $\operatorname{Im}\alpha = \{\bar{x}^n | n \in \mathbb{N}\}$. Визначимо відображення

$$\theta\colon \operatorname{Frt}(X)^{\alpha} \to \mathbb{N}_{lr}^{+}\colon \bar{x}^n \mapsto n.$$

Покажемо, що θ — ізоморфізм. Для довільних елементів $\bar{x}^n$, $\bar{x}^{\kappa} \in \operatorname{Frt}(X)^{\alpha}$ маємо

$$(\bar{x}^n)\,\theta = n, \qquad (\bar{x}^{\kappa})\,\theta = \kappa,$$

$$(\bar{x}^n \dashv_\alpha \bar{x}^\kappa)\,\theta = (\bar{x}^n \dashv \bar{x}^\kappa)\,\alpha\theta =$$

$$= (\bar{x}^n x^\kappa)\,\alpha\theta = \bar{x}^n\theta = n = n \dashv k = \bar{x}^n\theta \dashv \bar{x}^k\theta,$$

$$(\bar{x}^n \vdash_\alpha \bar{x}^\kappa)\theta = (\bar{x}^n \vdash \bar{x}^\kappa)\alpha\theta = (x^n \bar{x}^\kappa)\alpha\theta =$$

$$= \bar{x}^\kappa\theta = \kappa = n \vdash \kappa = \bar{x}^n\theta \vdash \bar{x}^\kappa\theta,$$

$$(\bar{x}^n \perp_\alpha \bar{x}^\kappa)\theta = (\bar{x}^n \perp \bar{x}^\kappa)\alpha\theta = (\bar{x}^{n+\kappa})\alpha\theta =$$

$$= \bar{x}^{n+\kappa}\theta = n + \kappa = \bar{x}^n\theta + \bar{x}^\kappa\theta.$$

Таким чином,

$$(\bar{x}^n \dashv_\alpha \bar{x}^\kappa)\,\theta = \bar{x}^n\theta \dashv \bar{x}^\kappa\theta,$$

$$(\bar{x}^n \vdash_\alpha \bar{x}^\kappa)\,\theta = \bar{x}^n\theta \vdash \bar{x}^\kappa\theta,$$

$$(\bar{x}^n \perp_\alpha \bar{x}^\kappa)\,\theta = \bar{x}^n\theta + \bar{x}^\kappa\theta$$

для всіх $\bar{x}^n,\ \bar{x}^\kappa \in \mathrm{Frt}\,(X)^\alpha$, тобто θ — гомоморфізм. Неважко побачити, що θ — бієктивне відображення. Таким чином, θ — ізоморфізм.

Теорему доведено.

6. Тріоїд Ріса. У цьому пункті ми розглянемо питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда Ріса [18] на випадок тріоїда. Знайдемо необхідні та достатні умови існування тріоїдів Ріса. Наведемо приклади тріоїда Ріса та алгебри, що узагальнює дімоноїд Ріса, але не є тріоїдом. Для тріоїдів Ріса побудуємо один клас симетричних напівретракцій.

6.1. Нехай $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ — довільний тріоїд, $I, \mathcal{J}$ — довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$p\colon \mathcal{J} \times I \to T\colon (j,i) \mapsto (j,i)p = p_{ji}.$$

Визначимо на множині $T' = I \times T \times \mathcal{J}$ операції за правилами

$$(i,g,j) \dashv' (k,h,l) = (i, g \dashv p_{jk} \dashv h, l),$$

$$(i,g,j) \vdash' (k,h,l) = (i, g \vdash p_{jk} \vdash h, l),$$

$$(i,g,j) \perp' (k,h,l) = (i, g \perp p_{jk} \perp h, l)$$

для всіх $(i,g,j), (k,h,l) \in T'$. Алгебру $(T', \dashv', \vdash', \perp')$ позначимо через $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$.

Якщо замість $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ взяти дімоноїд $(T, \dashv, \vdash)$ (див. п. 2), то алгебра $(T', \dashv', \vdash')$ стає дімоноїдом Ріса, який уперше був побудований у [18]. Дімоноїд Ріса є узагальненням напівгрупи Ріса матричного типу над структурною напівгрупою [19].

Природним є питання про можливість узагальнення дімоноїда Ріса на випадок тріоїда. Наступне твердження дає необхідні та достатні умови, за якими алгебра $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$ є тріоїдом.

Теорема. *Алгебра $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$ є тріоїдом тоді й лише тоді, коли вона задовольняє аксіому (T_6) тріоїда.*

Доведення. *Необхідність* є очевидною.

Доведемо *достатність*. Нехай $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіому (T_6). Згідно з [19] операції $\dashv',\vdash'$ та $\perp'$ є асоціативними. Той факт, що $M(I,\overline{T},\mathcal{J};p)$ задовольняє аксіоми $(T_1)-(T_3)$, випливає з леми з п. 3.3 роботи [18].

Нехай $(i,a,j)\,,(k,b,t)\,,(m,c,n)$ — довільні елементи алгебри $M(I,\overline{T},\mathcal{J};p)$. Тоді

$$\big((i,a,j)\dashv'(k,b,t)\big)\dashv'(m,c,n)=(i,a\dashv p_{jk}\dashv b,t)\dashv'(m,c,n)=$$

$$=(i,(a\dashv p_{jk}\dashv b)\dashv p_{tm}\dashv c,n)=(i,((a\dashv p_{jk})\dashv b)\dashv p_{tm}\perp c,n)=$$

$$=(i,(a\dashv p_{jk})\dashv(b\perp(p_{tm}\perp c)),n)=(i,a\dashv p_{jk}\dashv(b\perp p_{tm}\perp c),n)=$$

$$=(i,a,j)\dashv'(k,b\perp p_{tm}\perp c,n)=(i,a,j)\dashv'\big((k,b,t)\perp'(m,c,n)\big),$$

$$\big((i,a,j)\perp'(k,b,t)\big)\dashv'(m,c,n)=(i,a\perp p_{jk}\perp b,t)\dashv'(m,c,n)=$$

$$=(i,(a\perp p_{jk}\perp b)\dashv p_{tm}\dashv c,n)=(i,((a\perp p_{jk})\perp b)\dashv p_{tm}\dashv c,n)=$$

$$=(i,(a\perp p_{jk})\perp(b\dashv(p_{tm}\dashv c)),n)=(i,a\perp p_{jk}\perp(b\dashv p_{tm}\dashv c),n)=$$

$$=(i,a,j)\perp'(k,b\dashv p_{tm}\dashv c,n)=(i,a,j)\perp'\big((k,b,t)\dashv'(m,c,n)\big),$$

$$\big((i,a,j)\vdash'(k,b,t)\big)\perp'(m,c,n)=(i,a\vdash p_{jk}\vdash b,t)\perp'(m,c,n)=$$

$$=(i,(a\vdash p_{jk}\vdash b)\perp p_{tm}\perp c,n)=(i,((a\vdash p_{jk})\vdash b)\perp p_{tm}\perp c,n)=$$

$$=(i,(a\vdash p_{jk})\vdash(b\perp(p_{tm}\perp c)),n)=(i,a\vdash p_{jk}\vdash(b\perp p_{tm}\perp c),n)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'(k,b\perp p_{tm}\perp c,n)=(i,a,j)\vdash'\big((k,b,t)\perp'(m,c,n)\big),$$

$$\big((i,a,j)\perp'(k,b,t)\big)\vdash'(m,c,n)=(i,a\perp p_{jk}\perp b,t)\vdash'(m,c,n)=$$

$$=(i,(a\perp p_{jk}\perp b)\vdash p_{tm}\vdash c,n)=(i,((a\perp p_{jk})\perp b)\vdash p_{tm}\vdash c,n)=$$

$$=(i,(a\perp p_{jk})\vdash(b\vdash p_{tm}\vdash c),n)=(i,a\vdash p_{jk}\vdash b\vdash p_{tm}\vdash c,n)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'(k,b\vdash p_{tm}\vdash c,n)=(i,a,j)\vdash'\big((k,b,t)\vdash'(m,c,n)\big)$$

згідно з аксіомами тріоїда $\overline{T}$ та асоціативністю операцій $\dashv,\ \vdash,\ \perp$. Це означає, що $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіоми (T_4), (T_5), (T_7), (T_8).

Оскільки алгебра $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіоми $(T_1)-(T_8)$, то вона є тріоїдом.

Теорему доведено.

6.2. З останньої теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Алгебра* $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ *задовольняє аксіоми* $(T_1)-(T_5)$, (T_7), (T_8) *тріоїда.*

6.3. Використавши позначення з п. 5.1, покажемо, що існують алгебри $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$, які є тріоїдами.

Твердження. *Нехай T — непорожня множина, $g \in T$ та*

$$p\colon T \times T \to T\colon (j,i) \mapsto (j,i)p = p_{ji} = g.$$

Тоді алгебра $M\left(T, T_{lr}^{\perp}, T; p\right)$ є тріоїдом.

Доведення. Для всіх $(i,a,j)\,, (k,b,t)\,, (m,c,n) \in M\left(T, T_{lr}^{\perp}, T; p\right)$ маємо

$$\big((i,a,j) \dashv' (k,b,t)\big) \perp' (m,c,n) = (i, a \dashv p_{jk} \dashv b, t) \perp' (m,c,n) =$$

$$= (i,a,t) \perp' (m,c,n) = (i, a \perp p_{tm} \perp c, n) = (i, a \perp g \perp c, n) =$$

$$= (i, a \perp p_{jk} \perp c, n) = (i,a,j) \perp' (k,c,n) =$$

$$= (i,a,j) \perp' (k, b \vdash p_{tm} \vdash c, n) = (i,a,j) \perp' \big((k,b,t) \vdash' (m,c,n)\big)\,.$$

Це означає, що $M\left(T, T_{lr}^{\perp}, T; p\right)$ задовольняє аксіому (T_6). Звідси за теоремою з п. 6.1 $M\left(T, T_{lr}^{\perp}, T; p\right)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

Кожний тріоїд $M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$ називатимемо тріоїдом Ріса. Зауважимо, що тріоїд Ріса узагальнює дімоноїд Ріса [18] та напівгрупу Ріса матричного типу над структурною напівгрупою [19].

6.4. Як і раніше, через $\mathbb{N}$ будемо позначати множину натуральних чисел.

Наступне твердження дає приклад алгебри $M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$, яка не є тріоїдом.

Твердження. *Нехай*

$$p\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon\ (j,i) \mapsto (j,i)\,p = p_{ji} = j + i.$$

Тоді алгебра $M\left(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{lr}^{+}, \mathbb{N}; p\right)$ не є тріоїдом.

Доведення. Для довільних $(i,g,j), (k,h,l), (m,c,n) \in M(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{lr}^{+}, \mathbb{N}; p)$ таких, що $l + m \neq$ $\neq j + k$, маємо

$$((i,g,j) \dashv' (k,h,l)) \perp' (m,c,n) = (i, g \dashv p_{jk} \dashv h, l) \perp' (m,c,n) =$$

$$= (i,g,l) \perp' (m,c,n) = (i, g + p_{lm} + c, n) = (i, g + l + m + c, n),$$

$$(i,g,j) \perp' ((k,h,l) \vdash' (m,c,n)) = (i,g,j) \perp' (k, h \vdash p_{lm} \vdash c, n) =$$

$$= (i,g,j) \perp' (k,c,n) = (i, g + p_{jk} + c, n) = (i, g + j + k + c, n).$$

Оскільки $l + m \neq j + k$, то $(i, g + l + m + c, n) \neq (i, g + j + k + c, n)$.

Отже, аксіома (T_6) тріоїда не виконується для $M(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{lr}^{+}, \mathbb{N}; p)$. Звідси $M(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{lr}^{+}, \mathbb{N}; p)$ не є тріоїдом.

Твердження доведено.

6.5. Побудуємо один клас симетричних напівретракцій тріоїдів Ріса.

Нехай $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ — деякий тріоїд, $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$ — тріоїд Ріса (див. п. 6.3), τ — ідемпотентна напівретракція тріоїда $\overline{T}$, α та β — такі ідемпотенти симетричних напівгруп $\Im(I)$ та, відповідно, $\Im(\mathcal{J})$, що виконується умова

$$p_{ji} = p_{j\beta\, i\alpha},\ j \in \mathcal{J},\ i \in I.$$

Визначимо перетворення $\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}$ тріоїда $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$, поклавши

$$(i, a, j)\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha,\ a\tau, j\beta)$$

для всіх $(i, a, j) \in M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$.

Аналогічно теоремі з п. 3.4 [18] доводиться наступна теорема.

Теорема. *Будь-яке перетворення $\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}$ тріоїда Ріса $M(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p)$ є напівретракцією.*

7. Тріоїд з деформованими множеннями. У цьому пункті ми розглянемо питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда з деформованими множеннями [18] на випадок тріоїда. Встановимо необхідні та достатні умови існування тріоїдів з деформованими множеннями. Наведемо приклади тріоїда з деформованими множеннями та алгебри, що узагальнює дімоноїд з деформованими множеннями, але не є тріоїдом. Для тріоїдів з деформованими множеннями охарактеризуємо симетричні напівретракції.

7.1. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — довільний тріоїд, a — довільний, але фіксований елемент із T. На множині T визначимо операції $\dashv_a, \vdash_a$ та $\perp_a$ за правилами

$$x \dashv_a y = x \dashv a \dashv y, \quad x \vdash_a y = x \vdash a \vdash y, \quad x \perp_a y = x \perp a \perp y$$

для всіх $x,\ y \in T$. Алгебру $(T, \dashv_a, \vdash_a, \perp_a)$ позначимо через $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.

Якщо замість $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ взяти дімоноїд $(T, \dashv, \vdash)$ (див. п. 2), то алгебра $(T, \dashv_a, \vdash_a)$ стає дімоноїдом з деформованими множеннями, який уперше був побудований у [18]. Дімоноїд з деформованими множеннями є узагальненням напівгрупи з деформованим множенням [20].

Природним є питання про можливість узагальнення дімоноїда з деформованими множеннями на випадок тріоїда. Наступне твердження дає необхідні та достатні умови, за якими алгебра $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ є тріоїдом.

Теорема. *Алгебра $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ є тріоїдом тоді й лише тоді, коли вона задовольняє аксіому (T_6) тріоїда.*

Доведення. *Необхідність* є очевидною.

Доведемо *достатність*. Нехай $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіому (T_6). Згідно з [20] операції $\dashv_a, \vdash_a$ та $\perp_a$ є асоціативними. Той факт, що $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіоми $(T_1)-(T_3)$, випливає з леми з п. 3.5 роботи [18].

Нехай $x,\ y, z \in T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$. Тоді

$$(x \dashv_a y) \dashv_a z = x \dashv a \dashv y \dashv a \dashv z = (((x \dashv a) \dashv y) \dashv a) \dashv z =$$

$$= ((x \dashv a) \dashv (y \perp a)) \dashv z = (x \dashv a) \dashv (y \perp a \perp z) =$$

$$= x \dashv a \dashv (y \perp_a z) = x \dashv_a (y \perp_a z)\,,$$

$$(x \perp_a y) \dashv_a z = (x \perp a \perp y) \dashv a \dashv z =$$

$$= ((x \perp a) \perp y) \dashv (a \dashv z) = (x \perp a) \perp (y \dashv (a \dashv z)) =$$

$$= x \perp a \perp (y \dashv a \dashv z) = x \perp_a (y \dashv_a z)\,,$$

$$(x\vdash_a y)\perp_a z = (x\vdash a\vdash y)\perp a\perp z = ((x\vdash a)\vdash y)\perp(a\perp z) =$$

$$= (x\vdash a)\vdash(y\perp a\perp z) = x\vdash a\vdash(y\perp_a z) = x\vdash_a(y\perp_a z),$$

$$(x\perp_a y)\vdash_a z = (x\perp a\perp y)\vdash a\vdash z =$$

$$= ((x\perp a)\perp y)\vdash(a\vdash z) = (x\perp a)\vdash(y\vdash a\vdash z) =$$

$$= x\vdash(a\vdash y\vdash a\vdash z) = x\vdash a\vdash(y\vdash a\vdash z) = x\vdash_a(y\vdash_a z)$$

згідно з аксіомами тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ та асоціативністю операцій $\dashv,\vdash,\perp$. Таким чином, аксіоми (T_4), (T_5), (T_7), (T_8) виконуються для $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.

Оскільки алгебра $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіоми $(T_1)-(T_8)$, то вона є тріоїдом.

Теорему доведено.

7.2. З останньої теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Алгебра $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіоми $(T_1)-(T_5)$, (T_7), (T_8) тріоїда.*

7.3. Наступне твердження дає приклад алгебри $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$, яка є тріоїдом.

Твердження. *Нехай $T^{\perp}_{lr} = (T,\dashv,\vdash,\perp)$ (див. п. 5.1) та $a\in T$. Тоді алгебра $(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a)$ є тріоїдом.*

Доведення. Для всіх x, $y, z\in T$ маємо

$$(x\dashv_a y)\perp_a z = (x\dashv a\dashv y)\perp a\perp z = x\perp a\perp z =$$

$$= x\perp a\perp(y\vdash a\vdash z) = x\perp a\perp(y\vdash_a z) = x\perp_a(y\vdash_a z).$$

Це означає, що $(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a)$ задовольняє аксіому (T_6). Звідси за теоремою з п. 7.1 $(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

Кожний тріоїд $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ називатимемо тріоїдом з деформованими множеннями. Зауважимо, що тріоїд з деформованими множеннями узагальнює дімоноїд з деформованими множеннями [18] та напівгрупу з деформованим множенням [20].

7.4. Наведемо приклад алгебри $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$, яка не є тріоїдом.

Твердження. *Нехай $\mathrm{Frt}(X)$ — вільний тріоїд рангу 1 (див. п. 4.3), $\bar{x}\in X$. Тоді алгебра $(\mathrm{Frt}(X),\dashv_{\bar{x}},\vdash_{\bar{x}},\perp_{\bar{x}})$ не є тріоїдом.*

Доведення. Для елемента $\bar{x}\in X$ маємо

$$(\bar{x}\dashv_{\bar{x}}\bar{x})\perp_{\bar{x}}\bar{x} = (\bar{x}\dashv\bar{x}\dashv\bar{x})\perp\bar{x}\perp\bar{x} = \bar{x}xx\perp\bar{x}\perp\bar{x} = \bar{x}xx\bar{x}\bar{x},$$

$$\bar{x}\perp_{\bar{x}}(\bar{x}\vdash_{\bar{x}}\bar{x}) = \bar{x}\perp\bar{x}\perp(\bar{x}\vdash\bar{x}\vdash\bar{x}) = \bar{x}\bar{x}xx\bar{x}.$$

Оскільки $\bar{x}xx\bar{x}\bar{x}\neq\bar{x}\bar{x}xx\bar{x}$, то $(\bar{x}\dashv_{\bar{x}}\bar{x})\perp_{\bar{x}}\bar{x}\neq\bar{x}\perp_{\bar{x}}(\bar{x}\vdash_{\bar{x}}\bar{x})$, тобто аксіома (T_6) тріоїда не виконується для $(\mathrm{Frt}(X),\dashv_{\bar{x}},\vdash_{\bar{x}},\perp_{\bar{x}})$. Звідси $(\mathrm{Frt}(X),\dashv_{\bar{x}},\vdash_{\bar{x}},\perp_{\bar{x}})$ не є тріоїдом.

Твердження доведено.

7.5. Аналогічно твердженню з п. 3.6 [18] доводиться наступне твердження.

Твердження. *Нехай $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ — довільний тріоїд з деформованими множеннями. Якщо ідемпотентне перетворення τ множини T є напівретракцією тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$, то воно є напівретракцією і тріоїда $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.*

1. *Loday J.-L., Ronco M. O.* Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. – 2004. – **346**. – P. 369 – 398.
2. *Novelli J.-C., Thibon J.-Y.* Construction of dendriform trialgebras // C. r. Acad. sci. A. – 2006. – **6**. – P. 365 – 369.
3. *Novelli J.-C., Thibon J.-Y.* Polynomial realizations of some trialgebras // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Series Formelles et Combinatoire Algébrique. San Diego, California. – 2006 // arXiv:math/0605061v1.
4. *Casas J. M.* Trialgebras and Leibniz 3-algebras // Bol. Soc. mat. mexic. – 2006. – **12**, № 2. – P. 165 – 178.
5. *Ebrahimi-Fard K.* Loday-type algebras and the Rota – Baxter relation // Lett. Math. Phys. – 2002. – **61**, № 2. – P. 139 – 147.
6. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – **1763**. – P. 7 – 66.
7. *Жучок А. В.* Діалгебри // Математика та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **87**. – 256 с.
8. *Жучок А. В.* Димоноиды // Алгебра и логика. – 2011. – **50**, № 4. – С. 471 – 496.
9. *Жучок А. В.* Вільні дімоноїди // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 165 – 175.
10. *Жучок А. В.* Вільні тріоїди // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 23 – 26.
11. *Zhuchok A. V.* Tribands of subtrioids // Proc. Inst. Appl. Math. and Mech. – 2010. – **21**. – P. 98 – 106.
12. *Жучок А. В.* Некоторые конгруэнции на триоидах // Фундам. и прикл. математика. – 2011/2012. – **17**, № 3. – С. 39 – 49.
13. *Усенко В. М.* Напівретракції моноїдів // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2000. – **5**. – С. 155 – 164.
14. *Жучок А. В.* Свободные полугруппы идемпотентов // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – **19**, № 4. – С. 55 – 58.
15. *Жучок А. В.* Напівретракції вільних моноїдів // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2005. – Вып. 11. – С. 81 – 88.
16. *Жучок А. В.* Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів // Труды Ин-та прикл. математики и механики. – 2006. – Вып. 12. – С. 57 – 62.
17. *Усенко В. М.* Напівретракції та симетричні зображення // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 81 – 85.
18. *Жучок А. В.* Напівретракції дімоноїдів // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2008. – **17**. – С. 42 – 50.
19. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 185 с. ; Т. 2. – 422 с.
20. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.

Одержано 22.03.13