УДК 517.95

А. О. Лопушанський, Г. П. Лопушанська (Ряшів. ун-т, Польща, Львів. нац. ун-т)

ОДНА ОБЕРНЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФУЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

We prove the theorems on the existence and unique determination of a pair of functions: $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$, and the solution $u(x,t)$ of the first boundary-value problem for the equation

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

with regularized derivative $D_t^\beta u$ of the fractional order $\beta \in (0,2)$ under the additional condition $a(t)u_x(0,t) = F(t)$, $t \in [0,T]$.

Доказаны теоремы о существовании и единственности определения пары функций: $a(t) > 0,\ t \in [0,T]$, и решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F_0(x,t), \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T],$$

с регуляризованной производной $D_t^\beta u$ дробного порядка $\beta \in (0,2)$ при дополнительном условии $a(t)u_x(0,t) = F(t)$, $t \in [0,T]$.

1. Вступ. У роботах [1 – 6] доведено теореми існування та єдиності, а також одержано зображення за допомогою вектор-функції Ґріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь вигляду

$$D_t^\beta u(x,t) = A(x,D)u(x,t), \quad (x,t) \in R^N \times [0,T],$$

з еліптичним диференціальним оператором другого порядку $A(x,D)$ та регуляризованою похідною [7, 8] функції u порядку $\beta \in (m-1,m)$, $m = 1,2,\ldots$.

Умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівнянь вигляду

$$D_t^\beta u(x,t) - a^2\Delta u(x,t) = F_0(x,t), \quad a^2 = \mathrm{const} > 0,$$

з регуляризованою похідною функції u порядку $\beta \in (0,1)$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta}\right]$$

одержано у [9, 10]. Розв'язки побудовано у вигляді рядів Фур'є за власними функціями відповідних задач Штурма – Ліувілля.

У даній статті ми доведемо теореми про існування та єдиність розв'язку (u,a) оберненої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = F_0(x,t), \qquad (x,t) \in (0,l) \times (0,T], \quad a(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in [0,l], \tag{4}$$

$$a(t)u_x(0,t) = F_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

де $\beta \in (0,2)$, $F_0 - F_3$ — задані функції, умова (4) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Зауважимо, що при $\beta = 1$ такого типу обернені коефіцієнтні крайові задачі вивчалися в [11] та інших працях, де доведено теореми існування та єдиності. У [12] доведено єдиність розв'язку оберненої крайової задачі для рівняння вигляду (1) з невідомими $u(x,t)$, $a = a(x)$, $\beta \in (0,1)$ при крайових умовах Неймана та додатково заданій $u(0,t)$. Обернені крайові задачі для рівняння дифузії з дробовою похідною та іншими невідомими функціями чи параметрами вивчались, наприклад, у [13 – 16].

2. Основні позначення та формулювання задачі. Будемо використовувати такі позначення: $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$; $\mathfrak{D}(R^N)$, $N = 1,2,$ — простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в R^N [17, c. 13]; $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) \colon \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^k v|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots\}$; $\mathfrak{D}'(R^N)$ та $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на $\mathfrak{D}(R^N)$ та $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$; (f,φ) — значення $f \in \mathfrak{D}'(R^N)$ на основній функції $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$, а також значення $f \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ на $\varphi \in \mathfrak{D}(Q_0)$.

Позначимо через $\hat{*}$ операцію згортки узагальненої функції g та основної функції φ [17, c. 111]: $(g \hat{*} \varphi)(x) = \big(g(\xi), \varphi(x+\xi)\big)$, через $*$ операцію згортки узагальнених функцій f і g, тобто узагальнену функцію $f * g : (f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi)$ для кожної основної функції φ.

Будемо використовувати функцію $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(R) = \big\{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) \colon f = 0 \quad \text{при} \quad t < 0\big\}$:

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \quad \text{при} \quad \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \quad \text{при} \quad \lambda \le 0,$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція, $\theta(t)$ — одинична функція Хевісайда. Справджуються співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \qquad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідна $v_t^{(\beta)}(x,t)$ Рімана – Ліувілля функції $v(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначається формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0), \quad \beta \in (0,1),$$

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau =$$

$$= v_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)v(x,0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x,0), \quad \beta \in (1,2).$$

Нехай $C(Q_0)$, $C(\overline{Q}_0)$, $C[0,T]$ — класи неперервних відповідно в Q_0, $\overline{Q}_0$ та на $[0,T]$ функцій, $C_+[0,T]$ — клас неперервних на $[0,T]$ та обмежених знизу додатним числом функцій, $C_\beta(0,T] = \big\{v \in C(0,T] \,|\, t^\beta v \in C[0,T],\ \inf_{t\in(0,T]} t^\beta \big|v(t)\big| > 0\big\}$, $C_{2,\beta}(Q_0) = \big\{v \in C(\bar{Q}_0) \,|\, v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\big\}$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(5) *називається пара функцій*

$$(u,a)\in\mathfrak{M}_\beta := C_{2,\beta}(Q_0)\times C_+[0,T],$$

що задовольняє рівняння (1) *в* Q_0 *та умови* (2)–(5).

Для доведення розв'язності задачі (1)–(5) використаємо метод функції Ґріна.

3. Вектор-функція Ґріна та оператори Ґріна. Введемо оператори

$$L\colon (Lv)(x,t)\equiv v_t^{(\beta)}(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q}_0, \quad v\in\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{reg}\colon (L^{reg}v)(x,t)\equiv D_t^\beta v(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q}_0, \quad v\in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$\hat{L}\colon (\hat{L}v)(x,t)\equiv f_{-\beta}\hat{*}v(x,t)-a(t)v_{xx}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q}_0, \quad v\in\mathfrak{D}(\overline{Q}_0),$$

та функційний простір

$$X(\overline{Q}_0)=\big\{v\in\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)\colon v(0,t)=v(l,t)=0,\ t\in[0,T]\big\}.$$

Як у [18], показуємо, що для $v\in C^{2,\beta}(Q_0)$, $\psi\in X(\bar{Q}_0)$ має місце формула Ґріна

$$\int\limits_{Q_0} v(y,\tau)(\hat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau=\int\limits_{Q_0}(L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau+$$

$$+\int\limits_0^T a(\tau)[v(0,\tau)\psi_y(0,\tau)-v(l,\tau)\psi_y(l,\tau)]d\tau+$$

$$+\int\limits_0^l v(y,0)dy\int\limits_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau+\int\limits_0^l v_\tau(y,0)dy\int\limits_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau. \tag{6}$$

Означення 2. *Вектор-функція* $\big(G_0(x,t,y,\tau),G_1(x,t,y,\tau),G_2(x,t,y,\tau)\big)$ *така, що при достатньо гладких* F_0, F_1, F_2 *функція*

$$v(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau)F_0(y,\tau)dy+$$

$$+\int\limits_0^l G_1(x,t,y,0)F_1(y)dy+\int\limits_0^l G_2(x,t,y,0)F_2(y)dy, \quad (x,t)\in\overline{Q}_0, \tag{7}$$

є класичним $\big($*класу* $C_{2,\beta}(Q_0)\big)$*розв'язком першої крайової задачі* (1)–(4) (*з відомою функцією* $a(t)$ *та нульовими крайовими умовами*), *називається вектор-функцією Ґріна цієї задачі.*

Останній доданок у формулі (7) та третя компонента в означенні 2 відсутні, якщо $\beta\in(0,1]$.

З означення випливає, що

$$(LG_0)(x,t,y,\tau)=\delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau)\in Q_0, \quad \text{де} \quad \delta - \text{дельта-функція Дірака},$$

$$G_i(0,t,y,0) = G_i(l,t,y,0) = 0, \qquad y \in (0,l), \quad t \in [0,T], \quad i = 0,1,2,$$

$$G_1(x,0,y,0) = \delta(x-y), \qquad G_2(x,0,y,0) = 0, \quad G_{2t}(x,0,y,0) = \delta(x-y), \quad x,y \in [0,l].$$

Лема 1. $G_i(x,t,y,\tau) = f_{i-\beta}(t) * G_0(x,t,y,\tau)$, $(x,t),(y,\tau) \in \overline{Q}_0$, $i = 1,2$.

Лема доводиться за схемою [18].

Із принципу максимуму випливає додатність функцій $G_0(x,t,y,\tau)$, $G_1(x,t,y,0)$, $G_2(x,t,y,0)$, (x,t), $(y,\tau) \in Q_0$, а звідси, в свою чергу, додатність $\dfrac{\partial G_0(0,t,y,\tau)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G_1(0,t,y,0)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G_2(0,t,y,0)}{\partial x}$, $y \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$.

Лема 2. *При $a \in C_+[0,T]$ вектор-функція Ґріна першої крайової задачі* (1)–(4) *існує.*

Доведення. З огляду на лему 1 достатньо довести існування головної функції Ґріна $G_0(x,t,y,\tau)$. Як у [1–3] для задачі Коші та у [19] для загальних параболічних крайових задач, її існування можна довести методом Леві.

Існування функції $G_0(x,t,y,\tau)$ можна також довести методом рядів Фур'є. Справді, вибираючи у формулі (6) за функції $\psi_k \in X(\overline{Q}_0)$ розв'язки рівнянь $(\hat{L}\psi_k)(y,t) = \varphi_k(x,t,y,\tau)$, де послідовність $\varphi_k(x,t,y,\tau)$, $k \to \infty$, є дельтавидною, із формули (6) після граничного переходу при $k \to \infty$ одержуємо зображення (7) розв'язку задачі (1)–(4), де $G_0(x,t,y,\tau)$ $\big($границя послідовності ψ_k у $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)\big)$, як функція (y,τ), є розв'язком задачі

$$(\hat{L}_{y,\tau} G_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y, t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0,$$
$$G_0(x,t,0,\tau) = G_0(x,t,l,\tau) = 0, \qquad G_0(x,t,y,T) = G_{0\tau}(x,t,y,T) = 0. \tag{8}$$

G_0 шукаємо у вигляді

$$G_0(x,t,y,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(x,t,\tau)\omega_m(y), \tag{9}$$

де $\omega_m(y)$ — ортонормовані власні функції стаціонарної крайової задачі

$$\omega_m'' + \lambda_m \omega_m = 0, \qquad y \in (0,l), \quad \omega_m(0) = \omega_m(l) = 0.$$

Підставляючи (9) у рівняння задачі (8), маємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} \big[f_{-\beta}(\tau) \hat{*} S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau) S_m(x,t,\tau)\big]\omega_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \big(\delta(x-y), \omega_m(y)\big)\omega_m(y)\delta(t-\tau).$$

Звідси, враховуючи, що $\big(\delta(x-y), \omega_m(y)\big) = \omega_m(x)$, одержуємо задачі для функцій $S_m(x,t,\tau)$:

$$f_{-\beta}(\tau) \hat{*} S_m(x,t,\tau) + \lambda_m a(\tau) S_m(x,t,\tau) = \omega_m(x)\delta(t-\tau),$$
$$S_m(x,t,T) = S_{m\tau}(x,t,T) = 0, \quad m = 1,2,\ldots. \tag{10}$$

Кожна із задач (10) зводиться до лінійного інтегрального рівняння

$$S_m(x,t,\tau) + \lambda_m f_\beta(\tau) \hat{*} \big(a(\tau) S_m(x,t,\tau)\big) = f_\beta(t-\tau)\omega_m(x). \tag{11}$$

Методом послідовних наближень знаходимо його розв'язок у вигляді рівномірно збіжного при $x \in [0,l]$, $0 \le \tau < t \le T$ ряду

$$S_m(x,t,\tau) = \Big[f_\beta(t-\tau) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda_m)^p \underbrace{f_\beta(\tau) \hat{*} \big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau) \hat{*}\big(\ldots a(\tau)\big(f_\beta(\tau) \hat{*} \big(a(\tau)}_{p} f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)\big)\Big] \omega_m(x).$$

Зокрема, у випадку $a(\tau) = a = \mathrm{const} > 0$ маємо

$$S_m(x,t,\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-a\lambda_m)^p f_{(p+1)\beta}(t-\tau)\omega_m(x) =$$

$$= (t-\tau)^{\beta-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\big[-a\lambda_m (t-\tau)^\beta\big]^p}{\Gamma(p\beta+\beta)} \omega_m(x) = (t-\tau)^{\beta-1} E_\beta\big(-a\lambda_m (t-\tau)^\beta\big)\omega_m(x),$$

де $E_\beta(z) = E_{\beta^{-1}}(z,\beta) = \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{z^p}{\Gamma(p\beta+\beta)}$ — функція Міттаг-Лефлера [8], яка при великих $|z|$ має оцінку $E_\beta(z) \le \dfrac{C}{|z|}$, $C = C(\beta)$ — певна додатна стала. Тоді збіжність ряду (9) випливає з рівномірної збіжності ряду

$$\frac{C}{a(t-\tau)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\big|\omega_m(x)\omega_m(y)\big|}{\lambda_m}, \qquad x,y \in [0,l], \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

У загальному випадку оцінюємо різницю двох сусідніх доданків у виразі для $S_m(x,t,\tau)$:

$$\lambda_m^{2k} \underbrace{f_\beta(\tau) \widehat{*} \big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau) \widehat{*}\big(\ldots a(\tau) f_\beta(\tau) \widehat{*} \big(a(\tau)}_{2k} f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)\big) -$$

$$- \lambda_m^{2k+1} \underbrace{f_\beta(\tau) \widehat{*} \big(a(\tau)\big(f_\beta(\tau) \widehat{*}\big(\ldots a(\tau) f_\beta(\tau) \widehat{*} \big(a(\tau)}_{2k+1} f_\beta(t-\tau)\big)\big)\big)\big)\big) \le$$

$$\le \lambda_m^{2k} \Big[A_0^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m a_0^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau) \Big] \le$$

$$\le \lambda_m^{2k} \Big[c^{2k} f_{(2k+1)\beta}(t-\tau) - \lambda_m c^{2k+1} f_{(2k+2)\beta}(t-\tau) \Big]$$

при деякому $c < a_0 = \min_{t\in[0,T]} a(t) \le \max_{t\in[0,T]} a(t) = A_0$ та всіх

$$\lambda_m \ge \frac{A_0^{2k} - c^{2k}}{a_0^{2k+1} - c^{2k+1}} \frac{f_{(2k+1)\beta}(t-\tau)}{f_{(2k+2)\beta}(t-\tau)} = \frac{A_0^{2k} - c^{2k}}{a_0^{2k+1} - c^{2k+1}} \frac{\Gamma(2k\beta + 2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)(t-\tau)^\beta}.$$

Зауважимо, що, згідно з [20, с. 67], $\dfrac{\Gamma(2k\beta+2\beta)}{\Gamma(2k\beta+\beta)} = O\big((2k\beta)^\beta\big)$ для великих k. Тоді при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$ виконується

$$\big|S_m(x,t,\tau)\big| \leq (t-\tau)^{\beta-1} E_\beta(-c\lambda_m(t-\tau)^\beta)\big|\omega_m(x)\big|, \qquad x\in[0,l], \quad 0\leq\tau<t\leq T.$$

Отже, при $a \in C_+[0,T]$ матимемо аналогічну до випадку сталої функції a оцінку розв'язку рівняння (11) при великих $\lambda_m(t-\tau)^\beta$, а звідси рівномірну при $x,y\in[0,l]$, $0\leq\tau<t\leq T$ збіжність ряду (9). Головна функція Ґріна задачі (1)–(4) існує.

Знайдемо оцінки компонент вектор-функції Ґріна та їх похідних. Далі будемо використовувати позначення $G_i(x,t,y,\tau,a)$ замість $G_i(x,t,y,\tau)$, $i=0,1,2$.

Із результатів [6] випливає, що фундаментальна функція $G(x,t,a)$ оператора L зі сталим коефіцієнтом $a>0$ має вигляд

$$G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{|x|^2}{4at^\beta}\,\middle|\, \begin{matrix} (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1)\end{matrix}\right), \tag{12}$$

де $H^{m,n}_{p,q}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \ldots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \ldots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)$ — H-функція Фокса [21].

Використовуючи формулу диференціювання H-функцій (властивість 2.8 із [21]), маємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|^{1+k}} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,2) & (\beta,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1) & (k+1,2)\end{matrix}\right) =$$

$$= (-1)^k\frac{\pi^{-1/2}t^{\beta-1}}{|x|^{1+k}} H^{3,0}_{2,3}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\,\middle|\,\begin{matrix}(\beta,\beta) & (1,2) & \\ (k+1,2) & (1,1) & (1/2,1)\end{matrix}\right), \quad k=0,1,\ldots. \tag{13}$$

За формулою дробового диференціювання (теорема 2.7 із [21])

$$f_{j-\beta}(t)*G(x,t,a) = \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,1) & (j,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1) & (1,1)\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H^{2,0}_{1,2}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\,\middle|\,\begin{matrix} (j,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1)\end{matrix}\right), \quad j=1,2, \tag{14}$$

а звідси знову за властивістю 2.8 із [21]

$$\left(\frac{\partial}{\partial|x|}\right)^k \Big(f_{j-\beta}(t)*G(x,t,a)\Big) =$$

$$= \frac{\pi^{-1/2}t^{j-1}}{|x|} H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{x^2}{4at^\beta}\,\middle|\,\begin{matrix}(1,2) & (j,\beta) & \\ (1,1) & (1/2,1) & (1+k,2)\end{matrix}\right), \quad j=1,2.$$

Зауважимо, що вигляд функції (14) при $j=1$ збігається з одержаним у [5] для випадку $\beta\in(0,1)$, в обох випадках — із відповідними функціями у [4].

Згідно з методом Леві, для функцій $G_0(x,t,y,\tau,a)$, $G_j(x,t,y,0,a)$ та їх похідних за змінною x мають місце такі ж оцінки, як для $G\big(x-y,t-\tau,a(\tau)\big)$, $f_{j-\beta}(t)*G\big(x-y,t,a(0)\big)$, $j=1,2$, та їх похідних по x відповідно [1–3].

Нехай

$$\big[a(t)\big]^{-1} \leq R \quad \text{для всіх} \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи властивості H-функцій Фокса (як у [18]), метод Леві та враховуючи результати [4], знаходимо оцінки

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\right| \leq C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}, \quad |x-y|^2 < 4(t-\tau)^\beta/R,$$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\right| \leq \frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|x-y|^{k+1}}, \qquad |x-y|^2 > 4(t-\tau)^\beta/R, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_j(x,t,y,0,a)\right| \leq C_{jk}^* R^{\frac{k+1}{2}} t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}, \qquad |x-y|^2 < 4t^\beta/R,$$

$$\left|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_j(x,t,y,0,a)\right| \leq \frac{\hat{C}_{jk}t^{j-1}}{|x-y|}\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1-j+k+\frac{1}{2}}{2-\beta}} e^{-c\left(\frac{R|x-y|^2}{4t^\beta}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}} \leq$$

$$\leq C_{jk} R^{-\frac{1}{2-\beta}} |x-y|^{-1-\frac{2}{2-\beta}} t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}, \qquad |x-y|^2 > 4t^\beta/R, \quad j=1,2, \quad c=(2-\beta)\beta^{\beta(2-\beta)},$$

C_k, C_k^*, C_{jk}, C_{jk}^*, $\hat{C}_{jk}$ та далі $c_k, c_k^*, \hat{c}_k, c_{jk}, c_{jk}^*$, $j=1,2$, $k=0,1,2,\ldots,$ — певні додатні сталі.

Лема 3. *Справджуються оцінки*

$$\big|G_j(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_j(x,t,y,\tau,a)\big| \leq A_j(x,t,y,\tau,a)|\Delta t|^\gamma,$$
$$\left|\frac{\partial G_j(0,t+\Delta t,y,\tau,a)}{\partial x} - \frac{\partial G_j(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}\right| \leq B_j(t,y,\tau,a)|\Delta t|^\gamma, \qquad x,y \in [0,l], \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{15}$$

де $0 < \gamma < 1$, *невід'ємні функції* $A_j(x,t,y,\tau,a)$ *та* $B_j(t,y,\tau,a)$ *мають такі ж оцінки, як* $G_j(x,t,y,\tau,a)$ *та* $\dfrac{\partial G_j(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}$, $j=0,1,2$, *відповідно із заміною* β *на* $\beta-\gamma$.

Доведення. Використовуючи зображення (9), отримуємо

$$G_0(x,t+\Delta t,y,\tau,a) - G_0(x,t,y,\tau,a) = \sum_{m=1}^{\infty}\big[S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)\big]\omega_m(y). \tag{16}$$

Для функцій

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) = S_m(x,t+\Delta t,\tau,a) - S_m(x,t,\tau,a)$$

одержуємо інтегральні рівняння

$$Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a) + \lambda_m f_\beta(\tau)\hat{*}\big(a(\tau)Z_m(x,t,\tau,\Delta t,a)\big) = \big[f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau)\big]\omega_m(x) \tag{17}$$

вигляду (11). Оскільки

$$f_\beta(t+\Delta t-\tau) - f_\beta(t-\tau) = f_{-\lambda}(t) * \big[f_{\beta+\lambda}(t+\Delta t-\tau) - f_{\beta+\lambda}(t-\tau)\big],$$

при $1-\beta < \lambda < 1$, якщо $\beta \in (0,1)$, та при $\lambda < 2-\beta$, якщо $\beta \in (1,2)$, маємо $\beta+\lambda-1 = \gamma \in (0,1)$ та $\beta-\gamma = 1-\lambda > 0$. Тоді, враховуючи нерівність

$$\big|(t+\Delta t-\tau)^{\gamma}-(t-\tau)^{\gamma}\big| = (t-\tau)^{\gamma}\Big|\Big(1+\frac{\Delta t}{t-\tau}\Big)^{\gamma}-1\Big| \le |\Delta t|^{\gamma},$$

одержуємо

$$\big|f_{\beta}(t+\Delta t-\tau)-f_{\beta}(t-\tau)\big| \le f_{1-\lambda}(t-\tau)|\Delta t|^{\gamma} = f_{\beta-\gamma}(t-\tau)|\Delta t|^{\gamma}.$$

Як і при доведенні леми 2, знаходимо функції $Z_m(x,t,y,\tau,\Delta t,a)$, що матимуть такі ж оцінки, як розв'язки рівнянь (11) із заміною β на $\beta-\gamma$ та множником $|\Delta t|^{\gamma}$. Враховуючи зображення (16), одержуємо оцінку (15) при $j=0$. Інші оцінки в лемі встановлюємо з таких самих міркувань та з огляду на лему 1.

Введемо оператори Ґріна

$$(\mathfrak{G}_0\varphi)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy, \quad \varphi\in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$(\mathfrak{G}_i\varphi)(x,t) = \int\limits_0^l G_i(x,t,y,0,a)\varphi(y)dy, \qquad \varphi\in C[0,l], \quad i=1,2.$$

У [1 – 5] досліджено властивості таких операторів у випадку $\mathbb{R}^N$ замість $(0,l)$.

Використовуючи наведені оцінки похідних компонент вектор-функції Ґріна, при $\varphi\in C(\overline{Q}_0)$ та $\big[a(t)\big]^{-1}\le R$, $t\in[0,T]$, знаходимо

$$\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_{y\in(0,l)\colon\, |y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dy +$$

$$+ \int\limits_{y\in(0,l)\colon\, |y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\Big|dy\Bigg) d\tau\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)} \le$$

$$\le \int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_{y\in(0,l)\colon\, |y-x|<2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} C_k^* R^{\frac{k+1}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(1-k)}{2}-1}dy +$$

$$+ \int\limits_{y\in(0,l)\colon |y-x|>2(t-\tau)^{\beta/2}/\sqrt{R}} \frac{C_k(t-\tau)^{\beta-1}}{|y-x|^{k+1}}dy\Bigg) d\tau\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)},$$

звідки

$$\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy\right| \le c_0\sqrt{R}t^{\beta/2}\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)},$$

$$\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G_0(x,t,y,\tau,a)\varphi(y,\tau)dy\right| \le \hat{c}_k \int\limits_0^t R^{\frac{k}{2}}(t-\tau)^{\frac{\beta(2-k)}{2}-1}d\tau\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)} \le$$

$$\le c_k\sqrt{R}^k t^{(2-k)\frac{\beta}{2}}\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)}, \quad k=1,2,\ldots,$$

і при $k \le 2$, $\varphi \in C(\overline{Q}_0)$, $(x,t) \in \overline{Q}_0$ функції $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^k (\mathfrak{G}_0\varphi)(x,t)$ є неперервними, зокрема

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{G}_0\varphi)(x,t)\right| \le c_1\sqrt{R}t^{\frac{\beta}{2}}\|\varphi\|_{C(\overline{Q}_0)}. \qquad (18)$$

При $\varphi \in C[0,l]$, $j=1,2$, оцінимо

$$\left|\int\limits_0^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G_j(x,t,y,0)\varphi(y)dy\right| \le$$

$$\le \left[\int\limits_{x-\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}}^{x+\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} C^*_{jk}R^{\frac{k+1}{2}}t^{j-1-(k+1)\frac{\beta}{2}}dy + \int\limits_{y\in(0,l):\ |y-x|>\frac{2t^{\beta/2}}{\sqrt{R}}} \frac{C_{jk}t^{j-1+\frac{\beta}{2-\beta}}}{R^{\frac{1}{2-\beta}}|y-x|^{1+\frac{2}{2-\beta}}}dy\right]\|\varphi\|_{C[0,l]} \le$$

$$\le c_{jk}\left[\sqrt{R}^k t^{j-1-\frac{k\beta}{2}} + t^{j-1}\right]\|\varphi\|_{C[0,l]},$$

а отже, при $\varphi \in C[0,l]$ матимемо $\mathfrak{G}_j\varphi \in C(\overline{Q}_0)$, $j=1,2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}_2\varphi \in C(\overline{Q}_0)$ та оцінки

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{G}_1\varphi)(x,t)\right| \le c_{11}\left[\sqrt{R}t^{-\frac{\beta}{2}}+1\right]\|\varphi\|_{C[0,l]}, \qquad (x,t)\in Q_0, \quad \varphi \in C[0,l], \qquad (19)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{G}_2\varphi)(x,t)\right| \le c_{21}\left[\sqrt{R}t^{1-\frac{\beta}{2}}+t\right]\|\varphi\|_{C[0,l]}, \qquad (x,t)\in \overline{Q}_0, \quad \varphi \in C[0,l]. \qquad (20)$$

Інші властивості оператора $\mathfrak{G}_0$ встановлено у [2], а операторів $\mathfrak{G}_j$, $j=1,2,$ — у [4], зокрема, що при $\varphi \in C(\overline{Q}_0)$ функції $\mathfrak{G}_j\varphi$ належать класу $C_{2,\beta}(Q_0)$, $j=1,2$, при $\varphi \in C(\overline{Q}_0)$ та для кожного $t \in (0,T]$ локально гельдеровій за змінною x функції $\mathfrak{G}_0\varphi \in C_{2,\beta}(Q_0)$.

Нехай виконується умова

(F_0) функція F_0 належить $C(\overline{Q}_0)$ та для кожного $t \in (0,T]$ є локально гельдеровою за змінною x,

$$F_i \in C[0,l], \quad i=1,2, \qquad F_1(0)=F_1(l)=0.$$

Із наведеного вище та принципу максимуму випливає наступна теорема.

Теорема 1. *За умови* (F_0) *при відомій* $a \in C_+[0,T]$ *існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\beta}(Q_0)$ *задачі* (1)–(4) *і визначається формулою*

$$u(x,t) = \big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(x,t) + \big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{21}$$

4. Зведення оберненої крайової задачі до операторного рівняння. Перейдемо до доведення існування розв'язку оберненої крайової задачі. Нехай виконується умова

(F) $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ та $\inf_{t\in(0,T]} t^{\beta/2}\big|F_3(t)\big| = b_0$ (> 0),

$$F_0(x,t) > 0, \qquad (x,t) \in Q_0, \quad F_i(x) \geq 0, \quad x \in [0,l], \quad i = 1,2, \quad t^{\beta/2} F_3(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

або

$$F_0(x,t) < 0, \qquad (x,t) \in Q_0, \quad F_i(x) \leq 0, \quad x \in [0,l], \quad i = 1,2, \quad t^{\beta/2} F_3(t) < 0, \quad t \in [0,T],$$

також $\|F_1\|_{C[0,l]} := \max_{x\in[0,l]} \big|F_1(x)\big| > 0$.

За припущень (F_0), (F) підставимо функцію (21) в умову (5). Тоді одержимо

$$a(t)\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(0,t) + \big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(0,t) + \big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(0,t)\Big] = F_3(t), \quad t \in [0,T],$$

або

$$h(t) = t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(0,t) + \big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(0,t) + \big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(0,t)\Big]\Big[t^{\beta/2} F_3(t)\Big]^{-1}, \quad t \in [0,T], \tag{22}$$

де $h(t) = \big[a(t)\big]^{-1}$.

З теореми 1, додатності функцій $\dfrac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G_1(0,t,y,0,a)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial G_2(0,t,y,0,a)}{\partial x}$, $y \in \in [0,l]$, $0 \leq \tau < t \leq T$, та наведених міркувань випливає така теорема.

Теорема 2. *За припущень* (F_0), (F) *пара функцій* $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ *є розв'язком задачі* (1)–(5) *тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція* $h(t) = 1/a(t)$, $t \in [0,T]$, *є розв'язком рівняння* (22), *функція* $u(x,t)$ *визначена формулою* (21).

5. Теореми існування та єдиності.

Теорема 3. *За припущень* (F_0), (F) *розв'язок* $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ *задачі* (1)–(5) *існує*: *функція* $u(x,t)$ *визначена формулою* (21), $a(t) = \big[h(t)\big]^{-1}$, *де* $h(t)$ — *розв'язок операторного рівняння* (22).

Доведення. З огляду на теорему 2 залишилося довести розв'язність рівняння (22) у класі додатних неперервних функцій на $[0,T]$. Доведемо спочатку розв'язність рівняння (22) у класі

$$M_R = \Big\{h \in C[0,T] \mid \quad \|h\|_{C[0,T]} = \max_{t\in[0,T]} |h(t)| \leq R\Big\}$$

при деякому $R > 0$. Для цього використаємо принцип Шаудера. На M_R розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := t^{\beta/2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_0 F_0\big)(0,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(0,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_2 F_2\big)(0,t)\right] \times$$

$$\times\Big[t^{\beta/2} F_3(t)\Big]^{-1}, \quad t \in [0,T].$$

Покажемо спочатку, що $P\colon M_R \to M_R$.

Використовуючи знайдені оцінки операторів Ґріна та їх похідних, при $h \in M_R,\ t \in [0,T]$ маємо

$$\big|(Ph)(t)\big| \le b_0^{-1} t^{\beta/2} \left[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h)}{\partial x} \big|F_0(y,\tau)\big| dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^l \frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h)}{\partial x} \big|F_1(y)\big| dy + \int\limits_0^l \frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h)}{\partial x} \big|F_2(y)\big| dy \right] \le$$

$$\le b_0^{-1} \Big[c_0 \sqrt{R} t^{\beta} \|F_0\|_{C(\overline{Q_0})} + c_{11} \Big(\sqrt{R} + t^{\beta/2} \Big) \|F_1\|_{C[0,l]} + c_{21} t \Big(\sqrt{R} + t^{\beta/2} \Big) \|F_2\|_{C[0,l]} \Big] \le$$

$$\le c_1 \sqrt{R} + c_2,$$

де $c_1,\ c_2$ — певні додатні числа $\big(c_1 = b_0^{-1}\big[c_0 T^{\beta} \|F_0\|_{C(\overline{Q_0})} + c_{11}\|F_1\|_{C[0,l]} + c_{21} T \|F_2\|_{C[0,l]}\big]$, $c_2 = T^{\beta/2}\big[c_{11}\|F_1\|_{C[0,l]} + c_{21} T \|F_2\|_{C[0,l]}\big]\big)$.

За властивістю функції $c_1\sqrt{R} + c_2$ при довільних додатних числах $c_1,\ c_2$ існує таке $R_0 = R_0(c_1,c_2) > 0$, що для всіх $R > R_0$ виконується $c_1\sqrt{R} + c_2 < R$. Тоді при $h \in M_R$ маємо $\|Ph\|_{C[0,T]} < R$, а отже, $P\colon M_R \to M_R$.

Оператор P є неперервним на M_R. Справді, при $h_1, h_2 \in M_R,\ t \in [0,T]$ отримуємо

$$(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t) =$$

$$= t^{\beta/2} \big[t^{\beta/2} F_3(t)\big]^{-1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \left[\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_1)}{\partial x} - \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,1/h_2)}{\partial x} \right] F_0(y,\tau) dy +$$

$$+ \big[t^{\beta/2} F_3(t)\big]^{-1} \int\limits_0^l t^{\beta/2} \left[\frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x} \right] F_1(y) dy +$$

$$+ \big[t^{\beta/2} F_3(t)\big]^{-1} \int\limits_0^l t^{\beta/2} \left[\frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_1)}{\partial x} - \frac{\partial G_2(0,t,y,0,1/h_2)}{\partial x} \right] F_2(y) dy.$$

Усі інтеграли рівномірно збігаються та дорівнюють нулю при $h_1(t) = h_2(t)$. Тому значення $\big|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)\big|$ є малими для всіх $t \in [0,T]$ при малих значеннях $h_1(t) - h_2(t),\ t \in [0,T]$.

Аналогічно переконуємося, що оператор P є компактним на M_R. Вище було встановлено рівномірну обмеженість множини $\{(Ph)(t), t \in [0,T]\}$ при $h \in M_R$, крім того, із властивостей операторів Ґріна та леми 3 випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $|\Delta t| < \delta$ для довільних $h \in M_R,\ t \in [0,T]$

$$\big|(Ph)(t+\Delta t) - (Ph)(t)\big| < \varepsilon,$$

а отже, множина $\big\{(Ph)(t), t \in [0,T]\big\}$ при $h \in M_R$ одностайно неперервна.

Згідно з принципом Шаудера, існує розв'язок $h \in M_R$ рівняння (22).

Було показано неперервність правої частини (22) на $[0,T]$. Також за умов на задані функції

$$t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(0,t) > 0, \qquad t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_i F_i\big)(0,t) \geq 0, \qquad i = 0,2, \quad t \in [0,T],$$

або

$$t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_1 F_1\big)(0,t) < 0, \qquad t^{\beta/2}\frac{\partial}{\partial x}\big(\mathfrak{G}_i F_i\big)(0,t) \leq 0, \quad i = 0,2, \quad t \in [0,T].$$

Звідси, враховуючи також умови щодо функції F_3, одержуємо, що $(Ph)(t) > 0$ для всіх $t \in \in [0,T]$, $h \in M_R$. Отже, враховуючи рівняння (22), за умов (F_0), (F) одержуємо додатність розв'язку $h(t)$ на $[0,T]$.

Теорема 4. *При $F_3 \in C_{\beta/2}(0,T]$ розв'язок $(u,a) \in \mathfrak{M}_\beta$ задачі* (1)–(5) *єдиний.*

Доведення. Якщо (u_1,a_1), $(u_2,a_2) \in \mathfrak{M}_\beta$ — два розв'язки задачі, $v = u_1 - u_2$, $a = a_1 - a_2$, то

$$D_t^\beta v - a_1(t)v_{xx} = a(t)u_{2_{xx}}, \quad (x,t) \in Q_0, \tag{23}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad v_{|t=0} = 0, \tag{24}$$

$$a_1(t)\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t), \quad t \in (0,T], \tag{25}$$

та для функції v, як розв'язку задачі (23), (24), має місце зображення

$$v(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau,a_1)a(\tau)u_{2_{yy}}(y,\tau)dy, \quad (x,t) \in \overline{Q}_0. \tag{26}$$

Підставляючи функцію (26) в умову (25), маємо

$$a_1(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}a(\tau)u_{2_{yy}}(y,\tau)dy = -\frac{a(t)}{a_2(t)}F_3(t),$$

тобто

$$a(t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)}\frac{\partial G_0(0,t,y,\tau,a_1)}{\partial x}a(\tau)u_{2_{yy}}(y,\tau)dy = 0, \quad t \in [0,T].$$

Отже, функція $a(t)$ задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерра другого роду з інтегровним ядром (за припущення теореми) і $a(t) = 0$ на $[0,T]$. Тоді з (26) одержуємо $v(x,t) = 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_0$.

***Зауваження*. 1.** З доведення теореми 3 випливає існування розв'язку задачі (1)–(5) і тоді, коли неперервність функції $F_0(x,t)$ на $\overline{Q}_0$ замінити слабшою умовою — неперервністю функції $t^{\beta/2}F_0(x,t)$ на $\overline{Q}_0$.

2. Якщо у припущенні (F_0) додати умову $F_1 \in C^1[0,l]$, а в умові (F) вважати $F_3 \in C_0(0,T]$, то за такою ж схемою доводимо існування розв'язку задачі (1)–(5) $\Big($у цьому випадку використовуємо, що

$$\left|\int\limits_0^l \frac{\partial G_1(x,t,y,0)}{\partial x} F_1(y)dy\right| = \left|\int\limits_0^l G_1(x,t,y,0)F_1'(y)dy\right| \le d\|F_1'\|_{C[0,l]},$$

$d = \mathrm{const} > 0\Big)$. За припущення $F_3 \in C_0(0,T]$ також одержуємо єдиність розв'язку цієї задачі.

1. *Kochubei A. N.* Fractional-order diffusion // Different. Equat. – 1990. – **26**. – P. 485–492.
2. *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 11–16.
3. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004. – 390 p.
4. *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. АН. – 2007. – **414**, № 4. – С. 1–4.
5. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Statist. Phys. – 2001. – **104**, № 5/6. – P. 1349–1387.
6. *Jun Sheng Duan.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**.
7. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost friequency independent / II. Geofis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – **13**. – P. 529–539.
8. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1999. – 671 с.
9. *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calculus and Appl. Anal. – 2009. – **12**, № 4. – P. 409–422.
10. *Meerschaert M. M., Nane Erkan, Vallaisamy P.* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. – 2009. – **37**. – P. 979–1007.
11. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud.: Monogr. Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – **10**. – 238 p.
12. *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2009. – **25**, № 11. – P. 1–16.
13. *Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // J. Math. for Industry. – 2010. – **2A**. – P. 99–108.
14. *Zhang Y., Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2011. – **27**, № 3. – P. 1–12.
15. *Rundell W., Xu X., Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Appl. Anal. – 2012. – P. 1–16.
16. *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh., Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // J. Math. for Industry. – 2013. – **5A**. – P. 51–57.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: Второй спец. курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
18. *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними у просторах узагальнених функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1067–1080.
19. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Вища шк., 1990. – 200 с.
20. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
21. *Kilbas A. A., Sajgo M.* H-transforms. – Boca-Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004. – 401 p.

Одержано 12.09.13