УДК 519.21

О. В. Іванов, К. К. Москвичова (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗКЛАД МОМЕНТІВ КОРЕЛОГРАМНОЇ ОЦІНКИ КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

We establish asymptotic expansions of the bias, mean-square deviation, and variance for the correlogram estimator of the unknown covariance function of Gaussian stationary random noise in the nonlinear regression model with continuous time.

Найдены асимптотические разложения смещения, среднего квадрата отклонения и дисперсии коррелограммной оценки неизвестной ковариационной функции гауссовского стационарного случайного шума в нелинейной модели регрессии с непрерывным временем.

Вступ. Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0,T], \tag{1}$$

де $g\colon\ [0,+\infty) \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_q) \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ — обмежена відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|<1}(\Theta + a\gamma)$, $\gamma > 0$ — деяке число, $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — випадковий шум, відносно якого припускаємо, що

I. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — дійсний неперервний у середньому квадратичному сепарабельний вимірний стаціонарний гауссівський процес із нульовим середнім і абсолютно інтегровною коваріаційною функцією $B = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Модель спостережень (1) є узагальненням класичної моделі нелінійної регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень [1]. З іншого боку, це класична модель статистичної теорії зв'язку, коли на виході каналу зв'язку спостерігається суміш детермінованого сигналу та випадкового шуму. Багато статистичних результатів щодо оцінок невідомого параметра θ моделі (1) наведено в роботах [2 – 7] (див. також наведену в них бібліографію).

Якщо коваріаційна функція B є невідомою, то виникає задача статистичного оцінювання B при наявності заважаючого параметра θ.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадратів невідомого параметра $\theta \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = \widehat{\theta}_T\left(X(t), t \in [0,T]\right) = (\widehat{\theta}_{1T},\ldots,\widehat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$ (Θ^c — замикання Θ), для якого*

$$Q_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau\in\Theta^c} Q_T(\tau), \qquad Q_T(\tau) = \int\limits_0^T \left[X(t) - g(t,\tau)\right]^2 dt.$$

Означення 2. *Корелограмною оцінкою коваріаційної функції B назвемо корелограму, побудовану за відхиленнями спостережень $\widehat{X}(T) = X(t) - g(t,\widehat{\theta}_T)$, $t \in [0, T+H]$, а саме*:

$$B_T(z,\widehat{\theta}_T) = T^{-1}\int\limits_0^T \widehat{X}(t+z)\widehat{X}(t)dt, \qquad z \in [0,H], \tag{2}$$

де $H > 0$ — фіксоване число.

Легко бачити, що $B_T(0, \widehat{\theta}_T) = T^{-1} Q_T(\widehat{\theta}_T)$ — це оцінка найменших квадратів дисперсії $\sigma^2 = B(0)$ випадкового процесу ε, а

$$B_T(z) = B_T(z, \theta) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t+z)\varepsilon(t)dt, \qquad z \in [0, H],$$

— корелограма ε.

У повідомленні авторів [1] було наведено стохастичний асимптотичний розклад оцінки $B_T(z, \widehat{\theta}_T)$, що узагальнює теорему 26 із книги [8] на модель спостережень (1). У даній роботі вказаний стохастичний асимптотичний розклад використано для отримання асимптотичних розкладів перших двох моментів корелограмної оцінки (2): зсуву, середнього квадрата відхилення та дисперсії $B_T(z, \widehat{\theta}_T)$.

1. Попередні зауваження. Для подальших формулювань введемо потрібні позначення та умови. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ — мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q$. Для гладкої функції $a(\tau)$ позначимо $a^{(\alpha)}(\tau) = \left(\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1}\tau_1 \ldots \partial^{\alpha_q}\tau_q\right) a(\tau)$, $a_{i_1 \ldots i_r}(\tau) = \left(\partial^r / \partial\tau_{i_1} \ldots \partial\tau_{i_r}\right) a(\tau)$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, q}$.

Припустимо, що функція $g(t, \tau)$ для кожного $t > 0$ має і неперервні всі частинні похідні за змінними $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$ до порядку $k \geq 2$ включно, причому функції $g^{(\alpha)}(t, \tau)$, $|\alpha| = \overline{1, k}$, локально інтегровні з квадратом по t для довільного $\tau \in \Theta^c$. Позначимо

$$d_{iT}^2(\tau) = \int_0^T g_i^2(t, \tau)dt, \qquad g_i(t, \tau) = \frac{\partial g(t, \tau)}{\partial \tau_i}, \qquad i = \overline{1, q},$$

$$d_T^2(\alpha, \tau) = \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t, \tau)\right)^2 dt, \qquad |\alpha| = \overline{1, k}.$$

Будемо вважати, що $\underline{\lim}_{T\to\infty} d_{iT}^2(\theta) > 0, i = \overline{1, q}$.

Нехай також для $|\alpha| \geq 0$

$$\Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^T \left(g^{(\alpha)}(t, \tau_1) - g^{(\alpha)}(t, \tau_2)\right)^2 dt,$$

$$I(\theta) = (I_{ij}(\theta))_{i,j=1}^q = \left(T^{-1} \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt\right)_{i,j=1}^q, \qquad \Lambda(\theta) = \left(\Lambda^{ij}(\theta)\right)_{i,j=1}^q = I^{-1}(\theta),$$

$\lambda_{\min}(A)$ — найменше власне число додатно означеної матриці A, $s^*(z) = T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t+z)dt$.

Приймемо при $z \in [0, H]$

$$b_1^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t+z) g^{(\alpha)}(t, \theta) dt, \qquad b_2^{(\alpha)}(z, \theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \varepsilon(t) g^{(\alpha)}(t+z, \theta) dt,$$

$$b^{(\alpha)}(z,\theta) = b_1^{(\alpha)}(z,\theta) + b_2^{(\alpha)}(z,\theta),$$

$$b_{i_1\ldots i_r}(z,\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^T \left[\varepsilon(t+z) g_{i_1\ldots i_r}(t,\theta) + \varepsilon(t) g_{i_1\ldots i_r}(t+z,\theta)\right] dt,$$

$$b_{i_1\ldots i_r}(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^T \varepsilon(t) g_{i_1\ldots i_r}(t,\theta) dt = \frac{1}{2} b_{i_1\ldots i_r}(0,\theta),$$

$$a_{i_1\ldots i_r}(z,\theta) = \mathsf{E}\, B_{T,i_1\ldots i_r}(z,\theta), \qquad \Pi_{(i)(j)}(z,\theta) = T^{-1} \int\limits_0^T g_i(t+z,\theta) g_j(t,\theta) dt,$$

$$\Pi_{(i)(jk)}(z,\theta) = T^{-1} \int\limits_0^T g_i(t+z,\theta) g_{jk}(t,\theta) dt, \qquad \Pi_{(ij)(k)}(z,\theta) = T^{-1} \int\limits_0^T g_{ij}(t+z,\theta) g_k(t,\theta) dt.$$

Тоді

$$a_{ij}(z,\theta) = \Pi_{(i)(j)}(z,\theta) + \Pi_{(j)(i)}(z,\theta), \qquad a_{ij}(\theta) = a_{ij}(0,\theta) = 2\Pi_{(i)(j)}(0,\theta) = 2I_{ij},$$

$$a_{ijk}(z,\theta) = \Pi_{(ij)(k)}(z,\theta) + \Pi_{(k)(ij)}(z,\theta) + \Pi_{(ik)(j)}(z,\theta) + \Pi_{(j)(ik)}(z,\theta) + \Pi_{(jk)(i)}(z,\theta) + \Pi_{(i)(jk)}(z,\theta),$$

$$a_{ijk}(\theta) = a_{ijk}(0,\theta) = 2\left(\Pi_{(ij)(k)}(0,\theta) + \Pi_{(ik)(j)}(0,\theta) + \Pi_{(jk)(i)}(z,\theta)\right).$$

Позначимо також $\tilde{a}_{ijk}(z,\theta) = \Pi_{(ij)(k)}(z,\theta) + \Pi_{(k)(ij)}(z,\theta)$.

Літерами $C_i, i \geq 1$, будемо позначати додатні скінченні сталі. Наявність у будь-якому співвідношенні сталої C_i означає, що існує така стала C_i, що це співвідношення виконується. Припустимо, що справджуються наступні припущення:

II. Виконуються нерівності

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} T^{-\frac{1}{2}} d_T(\alpha;\tau) \leq C_1(\alpha), \qquad |\alpha| = \overline{1,k}, \tag{3}$$

$$\sup_{\tau_1,\tau_2 \in \Theta^c} T^{-1} \Phi_T^{[\alpha]}(\tau_1,\tau_2) \|\tau_1 - \tau_2\|^{-2} \leq C_2(\alpha), \qquad |\alpha| = k. \tag{4}$$

Зауважимо, що умова (4) для мультиіндексів α, $|\alpha| = \overline{0,k-1}$, випливає із співвідношень (3), що виконуються для $\alpha + e_i$, $i = \overline{1,q}$, де $e_i \in \mathbb{R}^q$ — i-й одиничний орт.

III. Для деякого $\lambda_0 > 0$ для достатньо великих T $\lambda_{\min}(I(\theta)) \geq \lambda_0$.

Сформулюємо теорему про стохастичний асимптотичний розклад оцінки $\widehat{\theta}_T$, що є зручним переформулюванням теореми 3.3.2 із книги [2].

Теорема 1. *Нехай виконано умови* **I–III**, *а оцінка найменших квадратів* $\widehat{\theta}_T$ *консистентна в тому розумінні, що для будь-якого* $\rho > 0$ *і деякого цілого* $m \geq 2$

$$\mathrm{P}\left\{\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq \rho\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right), \qquad T \to \infty. \tag{5}$$

Тоді

$$T^{\frac{1}{2}}\left(\widehat{\theta}_T-\theta\right)=\sum_{\nu=0}^{k-2}h_\nu\left(\theta\right)T^{-\frac{\nu}{2}}+\xi_{k-1}(\theta)T^{-\frac{k-1}{2}}, \tag{6}$$

де випадковий вектор $\xi_{k-1}(\theta)$ *має властивість*

$$\mathrm{P}\left\{\|\xi_{k-1}(\theta)\|\geq C_3\ln^{\frac{k}{2}}T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right),$$

$h_\nu(\theta)=(h_{\nu i}(\theta))_{i=1}^q$, $\nu=\overline{0,k-2}$, *— однорідні векторні поліноми степеня* $\nu+1$ *від випадкових змінних* $b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha|=\overline{1,\nu+1}$, *з рівномірно по* T *обмеженими коефіцієнтами.*

Для запису перших поліномів розкладу (6) і подальших розкладів приймемо тензорну угоду, а саме: якщо в добутку двох або більшого числа множників деякий індекс зустрічається двічі, це означає підсумовування за цим індексом від 1 до q. Тоді, пропускаючи в запису формул залежність від θ, маємо

$$h_0=\left(\Lambda^{ii_1}b_{i_1}\right)_{i=1}^q,\qquad h_1=\left(\Lambda^{ii_1}\Lambda^{i_2i_3}\left(b_{i_1i_2}b_{i_3}-\frac{1}{4}\Lambda^{i_4i_5}a_{i_1i_2i_4}b_{i_3}b_{i_5}\right)\right)_{i=1}^q.$$

Достатні умови виконання (5) містяться в [2] (див. також [8]).

Позначимо

$$P_0(z,\theta)=P_0(z)=T^{\frac{1}{2}}\left(B_T\left(z\right)-B(z)\right)=T^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^T\left(\varepsilon(t+z)\varepsilon(t)-B(z)\right)dt, \tag{7}$$

$$A_\nu(z,\theta)=\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1}\frac{1}{r!}a_{i_1\ldots i_r}(z,\theta)h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\ldots h_{\alpha_r,i_r}(\theta), \tag{8}$$

$$B_\nu(z,\theta)=\sum_{r+|\alpha(r)|=\nu}\frac{1}{r!}b_{i_1\ldots i_r}(z,\theta)h_{\alpha_1,i_1}(\theta)\ldots h_{\alpha_r,i_r}(\theta), \tag{9}$$

$$P_\nu(z,\theta)=A_\nu(z,\theta)-B_\nu(z,\theta),\qquad \nu\geq 1. \tag{10}$$

Підсумовування в (8), (9) проводиться за r-вимірними мультиіндексами $\alpha(r)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$.

Наступну теорему про стохастичний асимптотичний розклад оцінки $B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)$ наведено в [1].

Теорема 2. *В умовах теореми* 1

$$T^{1/2}\left(\mathrm{B}_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-\mathrm{B}(z)\right)=\sum_{\nu=0}^{k-2}P_\nu(z,\theta)T^{-\nu/2}+\zeta_{k-1}(\theta)T^{-(k-1)/2}, \tag{11}$$

де поліноми $P_\nu(z,\theta)$ *визначено співвідношеннями* (7)–(10), *а випадкова величина* $\zeta_{k-1}(\theta)$ *у залишковому члені формули* (11) *задовольняє співвідношення*

$$\mathrm{P}\left\{|\zeta_{k-1}(\theta)|\geq C_4\ln^{\frac{k}{2}}T\right\}\leq O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right). \tag{12}$$

Відправною точкою досліджень у даній роботі є наслідок з теореми 2, який ми запишемо, не вказуючи залежність від θ.

***Наслідок* 1.** *В умовах теореми* 1 *при* $k = 4$

$$T^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{B}_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-\mathrm{B}(z)\right)=\sum_{\nu=0}^{2}P_\nu(z)T^{-\frac{\nu}{2}}+\zeta_3T^{-\frac{3}{2}}, \tag{13}$$

де

$$\mathrm{P}\left\{|\zeta_3|\geq C_5\ln^2 T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right), \tag{14}$$

$P_0(z)$ *задано формулою* (7),

$$P_1(z)=\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Pi_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2}-\Lambda^{i_1j_1}b_{i_1}(z)b_{j_1},$$

$$P_2(z)=\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}a_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2j_3}b_{j_4}-\frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{j_3j_4}\Lambda^{j_5j_6}a_{i_1i_2}(z)a_{j_2j_3j_5}b_{j_1}b_{j_4}b_{j_6}+ \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\tilde{a}_{i_1i_2i_3}(z)b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3}-\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}b_{i_1}(z)b_{j_1j_2}b_{j_3}+$$

$$+\frac{1}{4}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{j_2j_3}\Lambda^{j_4j_5}a_{j_1j_2j_4}b_{i_1}(z)b_{j_3}b_{j_5}-\frac{1}{2}\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b_{i_1i_2}(z)b_{j_1}b_{j_2}.$$

2. Асимптотичний розклад зсуву корелограмної оцінки. У цьому пункті ми знайдемо асимптотичний розклад величини $\mathsf{E}\,T^{\frac{1}{2}}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)$. Будемо спиратися на наслідок 1, вважаючи, що ціле число m в (5) і, відповідно, в (14) є достатньо великим (наскільки великим — буде вказано у формулюванні теореми 3). Для цього ж значення m припустимо, що виконується умова

IV.
$$\mathrm{P}\left\{T^{\frac{1}{2}}\,\|\widehat{\theta}_T-\theta\|\geq M\right\}\ \leq\ C_6M^{-m} \tag{16}$$

при всіх достатньо великих M.

Достатні умови справедливості оцінки (16) імовірностей великих відхилень нормованої оцінки $\widehat{\theta}_T$ містяться в [2] (див. також [8]). Очевидно, (5) випливає з (16) при $M=\rho T^{\frac{1}{2}}$.

Позначимо для $i,j=\overline{1,q}$, $z\in[0,H]$

$$\Psi_{ij}(z,\theta)=\mathsf{E}\,b_i(z,\theta)b_j(\theta)=T^{-1}\int\limits_0^T\left(B(t-s+z)g_i(t,\theta)g_j(s,\theta)+B(t-s)g_i(t+z,\theta)g_j(s,\theta)\right)dtds.$$

Тоді

$$\Psi_{ij}(\theta)=\mathsf{E}\,b_i(\theta)b_j(\theta)=\frac{1}{2}\Psi_{ij}(0,\theta)=T^{-1}\int\limits_0^T B(t-s)g_i(t,\theta)g_j(s,\theta)dtds.$$

Теорема 3. *Якщо виконано умови* **I**, **II** *для* $k = 4$, **III**, **IV** *для* $m \geq 5$, *то*

$$T^{\frac{1}{2}}\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right) = L_T(z)T^{-\frac{1}{2}} + O\left(T^{-\frac{3}{2}}\ln^2 T\right),$$

де $L_T(z) = \mathsf{E}\,P_1(z) = \Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1j_2} - \Lambda^{i_1j_1}\Psi_{i_1j_1}(z)$.

Доведення. Введемо подію

$$W_T = \left\{|\zeta_3| < C_5\ln^2 T\right\}, \tag{17}$$

де C_5 — стала з (14). Нехай $\chi(A)$ — індикатор події A, $\overline{\chi} = 1 - \chi$. Помножимо обидві частини рівності (13) на $\chi\{W_T\}$ і візьмемо математичне сподівання. Тоді отримаємо

$$\mathsf{E}\,T^{\frac{1}{2}}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)\chi\{W_T\} = \sum_{\nu=0}^{2}\mathsf{E}\,P_\nu(z)\chi\{W_T\}T^{-\frac{\nu}{2}} + O\left(T^{-\frac{3}{2}}\ln^2 T\right). \tag{18}$$

Оцінимо математичні сподівання $\mathsf{E}\,P_\nu(z)\overline{\chi}\{W_T\}, \nu = 1,2$. Поліноми $P_\nu(z)$, $\nu = 1,2$, асимптотичного розкладу (13) за формулами (15) є однорідними степеня $\nu+1$ від випадкових величин b_i, b_{ij}, $b_i(z)$, $b_{ij}(z)$. Тому для оцінки $\mathsf{E}\,P_\nu(z)\overline{\chi}\{W_T\}$ достатньо оцінити величини $\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\overline{\chi}\{W_T\}, |\alpha| = \overline{1,\nu}$.

Маємо

$$\sigma^2_{\alpha T} = \mathsf{E}\left(b^{(\alpha)}(z)\right)^2 \leq 2\left(\mathsf{E}\left(b_1^{(\alpha)}(z)\right)^2 + \mathsf{E}\left(b_2^{(\alpha)}(z)\right)^2\right).$$

За умови **I** випадковий процес ε має неперервну та обмежену спектральну щільність $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Нехай $f_0 = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) < \infty$. Тоді

$$\mathsf{E}\left(b_2^{(\alpha)}(z)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)T^{-1}\left|\int_0^T e^{i\lambda t}g^{(\alpha)}(t+z)dt\right|^2 d\lambda \leq$$

$$\leq 2\pi f_0T^{-1}\int_z^{T+z}\left(g^{(\alpha)}(t,\theta)\right)^2 dt \leq 4\pi f_0(2T)^{-1}d^2_{2T}(\alpha,0) \leq 4\pi f_0C_1^2(\alpha)$$

за умови (3). Таким чином, $\sigma^2_{\alpha T}(z) \leq 12\pi f_0C_1^2(\alpha) < \infty$.

Для деякого $u > 1$ позначимо

$$\gamma_{jT} = \sigma_{\alpha T}(z)(u^j + m)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}} T, \qquad j \geq 0, \tag{19}$$

і введемо події

$$W^{(0)}_{\alpha T} = \left\{\left|b^{(\alpha)}(z)\right| < \gamma_{0T}\right\}, \qquad W^{(j)}_{\alpha T} = \left\{\gamma_{j-1,T} \leq \left|b^{(\alpha)}(z)\right| < \gamma_{jT}\right\}, \qquad j \geq 1.$$

Тоді

$$\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\overline{\chi}\{W_T\} = \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W^{(j)}_{\alpha T}\right\}\overline{\chi}\{W_T\} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W_{\alpha T}^{(0)}\right\}\overline{\chi}\left\{W_T\right\}+\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W_{\alpha T}^{(j)}\right\}. \tag{20}$$

Використовуючи (17) і (19), отримуємо оцінку для першого доданка правої частини (20):

$$\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W_{\alpha T}^{(0)}\right\}\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\leq\sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z)(1+m)^{\frac{\nu+1}{2}}\ln^{\frac{\nu+1}{2}}T\cdot\mathrm{P}\left\{\overline{W}_T\right\}=$$

$$=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln^{\frac{\nu+1}{2}}T\right). \tag{21}$$

Для другого доданка правої частини (20) маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W_{\alpha T}^{(j)}\right\}\leq\sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z)\ln^{\frac{\nu+1}{2}}T\sum_{j=1}^{\infty}(u^j+m)^{\frac{\nu+1}{2}}\times$$

$$\times\mathrm{P}\left\{\left|b^{(\alpha)}(z)\right|\geq\sigma_{\alpha T}(z)\left(u^{j-1}+m\right)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\}. \tag{22}$$

За нерівністю (див., наприклад, [2])

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\leq\Delta^{-1}e^{-\frac{\Delta^2}{2}},\qquad\Delta>0,$$

що застосовується до $\Delta=\left(u^{j-1}+m\right)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T$, записуємо

$$\mathrm{P}\left\{\left|b^{(\alpha)}(z)\right|\geq\sigma_{\alpha T}(z)\left(u^{j-1}+m\right)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{2}}T\right\}\leq\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u^{j-1}+m\right)^{-\frac{1}{2}}\ln^{-\frac{1}{2}}T\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^{j-1}+m\right)\ln T\right\}\leq\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{j-1}{2}}\ln^{-\frac{1}{2}}T\cdot T^{-\frac{m}{2}}\cdot T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}},\qquad j\geq 1. \tag{23}$$

З (22) і (23) отримуємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1}\chi\left\{W_{\alpha T}^{(j)}\right\}\leq\sigma_{\alpha T}^{\nu+1}(z)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\ln^{\frac{\nu}{2}}T\cdot T^{-\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}(u^j+m)^{\frac{\nu+1}{2}}u^{-\frac{j-1}{2}}T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}}. \tag{24}$$

Оцінимо ряд у правій частині (24). Оскільки існує таке j_0, що $\frac{1}{2}\,u^{j-1}\geq j\,u^{\frac{\nu}{2}}$ для $j>j_0$, то $T^{-\frac{1}{2}\,u^{j-1}}\geq T^{-ju^{\frac{\nu}{2}}}$ для тих самих j. Таким чином,

$$\left(\sum_{j=1}^{j_0}+\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\right)\left(u^j+m\right)^{\frac{\nu+1}{2}}u^{-\frac{j-1}{2}}T^{-\frac{1}{2}u^{j-1}}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,$$

причому $\sum_1 = O\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)$,

$$\sum_2 \leq C_7 u^{1/2} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(u^{\frac{\nu}{2}} T^{-u^{\frac{\nu}{2}}}\right)^j = C_7 u^{1/2} \rho^{j_0+1} T^{-\rho(j_0+1)} \left(1 - \rho T^{-\rho}\right)^{-1}, \qquad \rho = u^{\nu/2}.$$

Це означає, що $\sum_2 = o\left(T^{-\frac{1}{2}}\right)$ і

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1} \chi\left\{W_{\alpha T}^{(j)}\right\} = O\left(T^{-\frac{m+1}{2}} \ln^{\frac{\nu}{2}} T\right). \tag{25}$$

Співвідношення (20), (21), (24) і (25) показують, що

$$\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{\nu+1} \overline{\chi}\left\{W_T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}} \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T\right) \tag{26}$$

або

$$T^{-\frac{\nu}{2}}\, \mathsf{E}\, P_\nu(z) \overline{\chi}\left\{W_T\right\} = O\left(T^{-\frac{m+\nu}{2}} \ln^{\frac{\nu+1}{2}} T\right), \qquad \nu = 1, 2. \tag{27}$$

Оцінимо тепер $\mathsf{E}\, P_0(z)\overline{\chi}\left\{W_T\right\}$. Для цього застосуємо нерівність [9, с. 205], а саме:

$$\mathrm{P}\left\{T^{-\frac{1}{2}}\left|P_0(z)\right| > \sqrt{\mathbf{D} T^{-\frac{1}{2}} P_0(z) x}\right\} \leq 2(1+\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad z \geq 0, \qquad x > 0. \tag{28}$$

За формулою Ісерліса [10, с. 34] маємо

$$\mathbf{D} T^{-\frac{1}{2}} P_0(z) = \mathsf{E}\left(T^{-1} \int_0^T \left(\varepsilon(t+z)\varepsilon(t) - B(z)\right) dt\right)^2 =$$

$$= T^{-2} \int_0^T \int_0^T \left(B^2(t-s) + B(t-s+z)B(t-s-z)\right) dt ds = T^{-1} K_T^2(z), \tag{29}$$

$$T^{-1} K_T^2(z) = T^{-1} \int_0^T \left(\int_{-t}^{t} \left(B^2(s) + B(s+z)B(s-z)\right) ds\right) dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \left(B^2(s) + B(s+z)B(s-z)\right) ds = K^2(z) < \infty. \tag{30}$$

Останнє співвідношення випливає з регулярності аналога узагальненого підсумовування рядів методом Чезаро для узагальнених значень розбіжних невласних інтегралів [11, с. 595 – 597] (п. 485).

Запишемо нерівність (28) у зручнішому вигляді

$$\mathrm{P}\left\{\left|P_0(z)\right| > \sqrt{2}K_T(z)x\right\} \le 2(1+2x)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}, \qquad z \ge 0, \qquad x > 0, \tag{31}$$

і для деякого $u > 1$ покладемо

$$\begin{gathered}\delta_{jT} = \sqrt{2}K_T(z)(u^j + m)\ln T, \qquad j \ge 0,\\ W_T^{(0)} = \left\{\left|P_0(z)\right| \le \delta_{0T}\right\}, W_T^{(j)} = \left\{\delta_{j-1,T} < \left|P_0(z)\right| \le \delta_{jT}\right\}, \qquad j \ge 1.\end{gathered} \tag{32}$$

Як і раніше, маємо

$$\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\overline{\chi}\left\{W_T\right\} = \sum_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\chi\left\{W_T^{(j)}\right\} \le$$

$$\le \mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\chi\left\{W_T^{(0)}\right\} + \sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\chi\left\{W_T^{(j)}\right\}, \tag{33}$$

$$\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\chi\left\{W_T^{(0)}\right\} \le \sqrt{2}K_T(z)(1+m)\ln T\cdot\mathrm{P}\left\{\overline{W}_T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln T\right). \tag{34}$$

Оцінимо j-й член ряду у правій частині (1) з використанням (31):

$$\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\chi\left\{W_T^{(j)}\right\} \le \sqrt{2}K_T(z)(u^j+m)\ln T\cdot\mathrm{P}\left\{\left|P_0(z)\right| > \sqrt{2}K_T(z)(u^{j-1}+m)\ln T\right\} \le$$

$$\le \sqrt{2}K_T(z)(u^j+m)\ln T\cdot 2\left(1+2(u^j+m)\ln T\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}(u^{j-1}+m)\ln T\right\} \le$$

$$\le C_8 T^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{3}{2}}T\left(u^{\frac{3}{2}}T^{-u^{\frac{3}{2}}}\right)^j \tag{35}$$

для $j > j_0$, причому стала C_8 не залежить від j. Таким чином, для ряду (1) отримуємо

$$\sum_{j=1}^{j_0} = O\left(T^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{3}{2}}T\right), \tag{36}$$

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \le C_8 T^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left(\ln^{\frac{3}{2}}T\right)u^{\frac{3}{2}(j_0+1)}T^{-u^{\frac{3}{2}(j_0+1)}}\frac{1}{1-u^{\frac{3}{2}}T^{-u^{\frac{3}{2}}}} = o\left(T^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{3}{2}}T\right). \tag{37}$$

Із (1)–(37) випливає, що

$$\mathsf{E}\left|P_0(z)\right|\overline{\chi}\left\{W_T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln T\right). \tag{38}$$

Оцінимо $\mathsf{E}\,T^{\frac{1}{2}}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)\overline{\chi}\left\{W_T\right\}$. Для цього запишемо

$$T^{\frac{1}{2}}\left|B_T(z,\widehat{\theta}_T)-B(z)\right|\le T^{\frac{1}{2}}\left|s^*(z)-B(0)\right|+T^{\frac{1}{2}}\left|s^*(0)-B(0)\right|+$$

$$+T^{-\frac{1}{2}}\Phi_T^{[0]}\left(\widehat{\theta}_T,\theta\right)+T^{-\frac{1}{2}}\Phi_{2T}^{[0]}\left(\widehat{\theta}_T,\theta\right)+3B(0)T^{\frac{1}{2}}. \qquad (39)$$

За умови **II**

$$T^{-\frac{1}{2}}\Phi_T^{[0]}\left(\widehat{\theta}_T,\theta\right)+T^{-\frac{1}{2}}\Phi_{2T}^{[0]}\left(\widehat{\theta}_T,\theta\right)\le 3C_2(0)T^{\frac{1}{2}}\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^2. \qquad (40)$$

Величину $s^*(z)$ можна розглядати як значення корелограми в нулі сепарабельного стаціонарного гауссівського процесу $\varepsilon_z(t)=\varepsilon(t+z),\ t\in\mathbb{R},\ z\in[0,H]$. Це означає, що аналогічно (38)

$$\mathsf{E}\left(T^{\frac{1}{2}}\left|s^*(z)-B(0)\right|+T^{\frac{1}{2}}\left|s^*(0)-B(0)\right|\right)\overline{\chi}\left\{W_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln T\right). \qquad (41)$$

З іншого боку,

$$\mathsf{E}\,B(0)T^{\frac{1}{2}}\overline{\chi}\left\{W_T\right\}=B(0)T^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}\left\{\overline{W}_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m-1}{2}}\right), \qquad (42)$$

і, завдяки (40), залишається оцінити $T^{\frac{1}{2}}\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^2\overline{\chi}\left\{W_T\right\}$.

Для деяких $u>1$ і $\beta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ покладемо

$$W_{0T}^*=\left\{\|\widehat{\theta}_T-\theta\|<T^{-\beta}\right\},\qquad W_{jT}^*=\left\{u^{j-1}T^{-\beta}\le\|\widehat{\theta}_T-\theta\|<u^jT^{-\beta}\right\},\quad j\ge 1. \qquad (43)$$

Тоді

$$T^{\frac{1}{2}}\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^2\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\le T^{\frac{1}{2}}\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^2\overline{\chi}\left\{W_T\right\}\chi\left\{W_{0T}^*\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}T^{\frac{1}{2}}\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^2\chi\left\{W_{jT}^*\right\}=\mathsf{E}_1+\mathsf{E}_2\,. \qquad (44)$$

Для першого доданка отримуємо

$$\mathsf{E}_1\le T^{\frac{1}{2}-2\beta}\mathrm{P}\left\{\overline{W}_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m-1+4\beta}{2}}\right). \qquad (45)$$

Оцінимо другий доданок, використавши умову **IV** при $M=u^{j-1}T^{\frac{1}{2}-2\beta}$, $j\ge 1$:

$$\mathsf{E}_2\le T^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{\infty}\left(u^jT^{-\beta}\right)^2\mathrm{P}\left\{\|\widehat{\theta}_T-\theta\|\ge u^{j-1}T^{-\beta}\right\}\le$$

$$\le C_6T^{\frac{1}{2}-2\beta}\sum_{j=1}^{\infty}u^{2j-(m-1)j}T^{-m\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}=C_6\frac{u^m}{u^{m-2}-1}T^{-\frac{(m(1-2\beta)-1+4\beta)}{2}}. \qquad (46)$$

Підставляючи оцінки (45) і (46) в (44), отримуємо

$$T^{\frac{1}{2}} \mathsf{E}\, \|\widehat{\theta}_T - \theta\|^2 \chi\left\{\overline{W}_T\right\} = O\left(T^{-\frac{(m(1-2\beta)-1+4\beta)}{2}}\right). \tag{47}$$

Знайдемо такі значення *m*, для яких серед оцінок (27), (38), (41), (42) і (47) найгрубіший порядок був не менший за порядок залишкового члена в рівності (18). Для цього запишемо розв'язок рівняння $m(1-2\beta)-1+4\beta = 3$ у вигляді $m = 4+n$, де $n = \dfrac{4\beta}{1-2\beta}$ — натуральне число, або $\beta = \dfrac{n}{2(2+n)} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Наприклад, якщо $n = 1$, то $\beta = \dfrac{1}{6}$, тощо.

Таким чином, для натуральних $m \geq 5$

$$T^{\frac{1}{2}} \mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right) = \mathsf{E}\, P_1(z) T^{-\frac{1}{2}} + O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^2 T\right),$$

тому що $\mathsf{E}\, P_0(z) = \mathsf{E}\, P_2(z) = 0$.

Теорему 3 доведено.

***Наслідок* 2.** *В умовах теореми* 3

$$\mathsf{E}\, B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = B(z) + L_T(z) T^{-1} + O\left(T^{-2} \ln^2 T\right). \tag{48}$$

***Наслідок* 3.** *Нехай умови теореми* 3 *виконано для* $k = 3$ *і* $m \geq 4$. *Тоді*

$$\mathsf{E}\, B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = B(z) + L_T(z) T^{-1} + O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^{\frac{3}{2}} T\right).$$

Доведення. Достатньо записати формулювання теореми 2 для $k = 3$ і повторити відповідні викладки. Єдина відмінність полягає в тому, що рівняння $\dfrac{1}{2}(m(1-2\beta)-1+4\beta) = 1$ має розв'язок $m = 2 + \dfrac{1}{1-2\beta}$, і якщо натуральне $n = \dfrac{1}{1-2\beta}$, то $\beta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ при $n \geq 2$.

***Наслідок* 4.** *Нехай умови теореми* 3 *виконано для* $k = 2$ *і* $m \geq 2$. *Тоді*

$$\mathsf{E}\, B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = B(z) + O\left(T^{-1} \ln T\right).$$

3. Асимптотичний розклад дисперсії корелограмної оцінки. Теореми в цьому пункті мають громіздкі формулювання, які будуть зрозумілими після проведення деяких обчислень. У подальших обчисленнях вважаємо, що виконано умови теореми 3. З виразу (13), піднесеного до квадрату, отримуємо

$$T\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = P_0^2(z) + 2P_0(z)P_1(z)T^{-\frac{1}{2}} + \left(P_1^2(z) + 2P_0(z)P_2(z)\right)T^{-1} + \overline{\zeta}_3 T^{-\frac{3}{2}},$$

$$\overline{\zeta}_3 = 2P_0(z)\zeta_3 + 2P_1(z)P_2(z) + 2P_1(z)\zeta_3 T^{-\frac{1}{2}} + 2P_2(z)\zeta_3 T^{-1} + \zeta_3^2 T^{-\frac{3}{2}}.$$

Із міркувань, викладених у попередньому пункті, випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\left|\overline{\zeta}_3\right| \geq C_8 \ln^3 T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Введемо подію $V_T = \left\{\left|\overline{\zeta}_3\right| < C_8 \ln^3 T\right\}$. Тоді

$$T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)^2\chi\left\{V_T\right\}=\sum_{\nu=0}^{2}\mathsf{E}\,P_\nu^*(z)\chi\left\{V_T\right\}T^{-\frac{\nu}{2}}+O\left(T^{-\frac{3}{2}}\ln^3 T\right),\tag{49}$$

$$P_0^*(z)=P_0^2(z),\qquad P_1^*(z)=2P_0(z)P_1(z),\qquad P_2^*(z)=P_1^2(z)+2P_0(z)P_2(z).$$

Оцінимо $\mathsf{E}\,P_\nu^*(z)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}$, $\nu=0,1,2$. Оскільки $2P_0(z)P_\nu(z)\le P_0^2(z)+P_\nu^2(z)$, $\nu=1,2$, то задача зводиться до оцінювання $\mathsf{E}\,P_\nu^2(z)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}$, $\nu=0,1,2$, причому для $\nu=1,2$ достатньо оцінити величини $\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{2(\nu+1)}\overline{\chi}\left\{V_T\right\}$, $|\alpha|=\overline{1,\nu}$. Оцінювання цих математичних сподівань не відрізняється від оцінювання відповідних величин із попереднього пункту, і замість (26) отримуємо оцінку

$$\mathsf{E}\left|b^{(\alpha)}(z)\right|^{2(\nu+1)}\overline{\chi}\left\{V_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}\ln^{\nu+1}T}\right),\qquad \nu=1,2.$$

При оцінюванні $\mathsf{E}\,P_0^2(z)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}$ будемо використовувати величини δ_{jT} і події $W_T^{(j)}$, $j\ge 0$, означені в (32). Тоді

$$\mathsf{E}\,P_0^2(z)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}\chi\left\{W_T^{(0)}\right\}\le 2K_T^2(z)(1+m)^2\ln^2 T\cdot \mathrm{P}\left\{\overline{V}_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln^2 T\right),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\,P_0^2(z)\chi\left\{W_T^{(j)}\right\}\le C_9T^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{5}{2}}T\sum_{j=1}^{\infty}u^{\frac{5}{2}j}T^{-\frac{u^{j-1}}{\sqrt{2}}}.\tag{50}$$

Оскільки $T^{-\frac{1}{\sqrt{2}}u^{j-1}}<T^{-ju^{\frac{5}{2}}}$ для $j>j_0$, то, аналогічно (36) і (37),

$$\sum_{j=1}^{j_0}=O\left(T^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{5}{2}}T\right),\qquad \sum_{j=j_0+1}^{\infty}=o\left(T^{-\frac{m+1}{\sqrt{2}}}\ln^{\frac{5}{2}}T\right).\tag{51}$$

Порівняння (50) і (51) дозволяє стверджувати, що

$$\mathsf{E}\,P_0^2(z)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln^2 T\right).\tag{52}$$

Оцінимо тепер $T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)^2\overline{\chi}\left\{V_T\right\}$. Із співвідношень (39), (40) отримуємо

$$T\left(B_T\left(z,\widehat{\theta}_T\right)-B(z)\right)^2\le 4T\left(s^*(z)-B(0)\right)^2+4T\left(s^*(0)-B(0)\right)^2+$$

$$+36C_2^2(0)T\|\widehat{\theta}_T-\theta\|^4+36B^2(0)T.$$

Аналогічно (41) із (52) випливає

$$\mathsf{E}\left(T\left(s^*(z)-B(0)\right)^2+T\left(s^*(0)-B(0)\right)^2\right)\overline{\chi}\left\{V_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m}{2}}\ln^2 T\right),$$

крім того, аналогічно (42)

$$\mathsf{E}\,T\overline{\chi}\left\{V_T\right\}=O\left(T^{-\frac{m-2}{2}}\right).$$

Залишилось оцінити $\mathsf{E}\, T\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^4 \overline{\chi}\,\{V_T\}$. Використовуючи події (43), записуємо

$$T\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^4 \overline{\chi}\,\{V_T\} \leq T\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^4 \overline{\chi}\,\{V_T\}\,\{W_{0T}^*\} + \sum_{j=1}^{\infty} T\,\mathsf{E}\,\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^4 \overline{\chi}\,\{W_{jT}^*\} = \mathsf{E}_3 + \mathsf{E}_4,$$

$$\mathsf{E}_3 \leq T^{1-4\beta}\mathrm{P}\,\{V_T\} = O\left(T^{-\frac{m-2+8\beta}{2}}\right),$$

$$\mathsf{E}_4 \leq T\sum_{j=1}^{\infty}\left(u^j T^{-\beta}\right)^4 \mathrm{P}\left\{\|\widehat{\theta}_T - \theta\| \geq u^{j-1}T^{-\beta}\right\} \leq C_6 \frac{u^m}{u^{m-4}-1} T^{-\frac{m(1-2\beta)-2+8\beta}{2}}.$$

Як і раніше, для отриманих оцінок потрібно знайти таке значення *m*, щоб їх найгрубіший порядок був не менший за порядок залишкового члена формули (49). З цією метою запишемо розв'язки рівняння $m(1-2\beta) - 2 + 8\beta = 3$ у вигляді $m = 4 + n$, де $n = \dfrac{1}{1-2\beta}$, або $\beta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ тоді, коли $n \geq 2$ і, відповідно, $m \geq 6$. Для таких *m*

$$T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = \sum_{\nu=0}^{2} \mathsf{E}\,P_\nu^*(z) T^{-\frac{\nu}{2}} + O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^3 T\right). \tag{53}$$

Запишемо рівність (11) для $k = 3$ і піднесемо її до квадрату:

$$T\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = P_0^2(z) + 2P_0(z)P_1(z)T^{-1/2} + \overline{\zeta}_2 T^{-1},$$

де випадкова величина $\overline{\zeta}_2 = P_1^2(z) + 2P_0(z)\zeta_2 + 2P_1(z)\zeta_2 T^{-1/2} + \zeta_3^2 T^{-1}$,

$$\mathrm{P}\left\{\left|\overline{\zeta}_2\right| \geq C_{10} \ln^{\frac{5}{2}} T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Якщо $m \geq 4$, то, як і при доведенні наслідку 3, можна показати, що

$$T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = \mathsf{E}\,P_0^2(z) + 2\,\mathsf{E}\,P_0(z)P_1(z)T^{-1/2} + O\left(T^{-1}\ln^{\frac{5}{2}} T\right). \tag{54}$$

Так само при $k = 2$

$$T\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = P_0^2(z) + \overline{\zeta}_1 T^{-1/2},$$

де $\overline{\zeta}_1 = 2P_0(z)\zeta_1 + \zeta_1^2 T^{-1/2}$, причому

$$\mathrm{P}\left\{\left|\overline{\zeta}_1\right| \geq C_{11} \ln^2 T\right\} = O\left(T^{-\frac{m}{2}}\right).$$

Якщо $\beta = \dfrac{1}{4}$ та $m \geq 2$, то

$$T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = \mathsf{E}\,P_0^2(z) + O\left(T^{-1/2}\ln^2 T\right). \tag{55}$$

Підрахуємо математичні сподівання правої частини рівності (53), пропускаючи в запису формули залежність від θ. За формулами (29), (30)

$$\mathsf{E}\, P_0^*(z) = \mathsf{E}\, P_0^2(z) = K_T^2(z).$$

Далі, використовуючи (15), маємо

$$\mathsf{E}\, P_1^*(z) = 2\,\mathsf{E}\, P_0(z)P_1(z) = 2\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\,\mathsf{E}\, P_0(z)b_{j_1}b_{j_2} -$$

$$-2\Lambda^{i_1j_1}\,\mathsf{E}\, P_0(z)b_{i_1}(z)b_{j_1} = \mathsf{E}\, P_{11}^*(z) - \mathsf{E}\, P_{12}^*(z).$$

Зауважимо, що

$$\mathsf{E}\, P_0(z)b_{j_1}b_{j_2} = \left(\Delta_{j_1j_2}(z) + \Delta_{j_2j_1}(z)\right)T^{-1/2},$$

де

$$\Delta_{j_1j_2}(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-s+z)B(t-u)g_{j_1}(s)g_{j_2}(u)dtdsdu. \tag{56}$$

Тепер неважко зрозуміти, що

$$\mathsf{E}\, P_{11}^*(z) = 2\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}a_{i_1i_2}(z)\Delta_{j_1j_2}(z)T^{-1/2}. \tag{57}$$

З іншого боку,

$$\mathsf{E}\, P_{12}^*(z) = 2\Lambda^{i_1j_1}\,\mathsf{E}\, P_0(z)b_{i_1}(z)b_{j_1} = 2\Lambda^{i_1j_1}\left(\varphi_{i_1j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^{4}\varphi_{i_1j_1}^{(k)}(z)\right)T^{-1/2}, \tag{58}$$

$$\varphi_{i_1j_1}^{(1)}(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-s)B(t-u)g_{i_1}(s)g_{j_1}(u)dtdsdu,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_1j_1}^{(2)}(z) &= T^{-1}\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-u+z)B(t-s-z)g_{i_1}(s)g_{j_1}(u)dtdsdu,\\
\varphi_{i_1j_1}^{(3)}(z) &= T^{-1}\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-s+z)B(t-u)g_{i_1}(s+z)g_{j_1}(u)dtdsdu,\\
\varphi_{i_1j_1}^{(4)}(z) &= T^{-1}\int_0^T\int_0^T\int_0^T B(t-u+z)B(t-s)g_{i_1}(s+z)g_{j_1}(u)dtdsdu.
\end{aligned} \tag{59}$$

Таким чином, з (57) і (58) випливає

$$\mathsf{E}\, P_1^*(z) = 2\left(\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}a_{i_1i_2}(z)\Delta_{j_1j_2}(z) - \Lambda^{i_1j_1}\left(\varphi_{i_1j_1}^{(1)} + \sum_{k=2}^{4}\varphi_{i_1j_1}^{(k)}(z)\right)\right)T^{-1/2}. \tag{60}$$

Введемо додаткову умову обмеженості похідних функції регресії:

V. $\sup_{\tau\in\Theta^c}\sup_{t\ge 0}\left|g_i(t,\tau)\right|\le C_1(e_i),\quad i=\overline{1,q}.$

Очевидно, з умови **V** випливає, що

$$\sup_{\tau\in\Theta^c} T^{-1/2}d_{iT}(\tau)\le C_1(e_i),\qquad i=\overline{1,q},\tag{61}$$

тобто умова (3) для перших похідних по τ функції g. При вивченні асимптотичних властивостей оцінки $\widehat{\theta}_T$ широко використовується умова типу

$$d_{iT}^{-1}(\theta)\sup_{\tau\in\Theta^c}\sup_{a\le t\le T}\left|g_i(t,\theta)\right|\le C(i)T^{-1/2},\qquad i=\overline{1,q}.\tag{62}$$

Тоді умова **V** з іншими сталими є наслідком умов (61) і (62).

Покажемо, що за умови **V** величини (56) і (59) обмежені. Отримуємо, наприклад,

$$\left|\Delta_{j_1j_2}(z)\right|\le C_1\left(e_{j_1}\right)C_1\left(e_{j_2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|B(s)\right|ds\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\left|B(t-u)\right|dtdu\le C_{12}.$$

Величини (59) оцінюються аналогічно. Таким чином, член $\mathsf{E}\,P_1^*(z)T^{-1/2}$ у розкладі (53) треба зсунути на крок вправо до члена $\mathsf{E}\,P_2^*(z)T^{-1}$.

Розглянемо

$$\mathsf{E}\,P_2^*(z)=\mathsf{E}\,P_1^2(z)+2\,\mathsf{E}\,P_0(z)P_2(z)=\mathsf{E}\,P_1^2(z),\tag{63}$$

тому що добуток $P_0(z)P_2(z)$ містить непарні степені гауссівських випадкових величин. Запишемо

$$P_1^2(z)=\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\Lambda^{i_4j_4}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Pi_{(i_3)(i_4)}(z)b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3}b_{j_4}-$$

$$-2\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)b_{j_1}b_{j_2}b_{j_3}b_{i_3}(z)+\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b_{i_1}(z)b_{j_1}b_{i_2}(z)b_{j_2}=I_1-2I_2+I_3.$$

Неважко бачити, що

$$\mathsf{E}\,I_1=\left(\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1j_2}\right)^2+\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\Lambda^{i_4j_4}\Pi_{(i_1)(i_4)}(z)a_{i_2i_3}(z)\Psi_{j_1j_2}\Psi_{j_3j_4},$$

$$\mathsf{E}\,I_2=\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}\Lambda^{i_3j_3}\left(\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1j_2}\Psi_{i_3j_3}(z)+a_{i_1i_2}(z)\Psi_{j_1j_3}\Psi_{i_3j_2}(z)\right).$$

Крім цього,

$$\mathsf{E}\, I_3 = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\left(\Psi_{i_1 j_1}(z)\Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z)\Psi_{i_2 j_1}(z) + \Psi_{i_2 j_2}\,\mathsf{E}\, b_{i_1}(z) b_{i_2}(z)\right),$$

$$\mathsf{E}\, b_{i_1}(z) b_{i_2}(z) = \Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi^{(1)}_{i_1 i_2}(z) + \Psi^{(2)}_{i_1 i_2}(z),$$

$$\Psi^{(1)}_{i_1 i_2}(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T B(t-s-z) g_{i_1}(t+z) g_{i_2}(s) dtds, \tag{64}$$

$$\Psi^{(2)}_{i_1 i_2}(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T B(t-s) g_{i_1}(t+z) g_{i_2}(s+z) dtds.$$

Таким чином,

$$\mathsf{E}\, I_3 = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Big(\Psi_{i_1 j_1}(z)\Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z)\Psi_{i_2 j_1}(z) + \Psi_{i_2 j_2}\Big(\Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi^{(1)}_{i_1 i_2}(z) + \Psi^{(2)}_{i_1 i_2}(z)\Big)\Big).$$

Ми отримали такий результат.

Теорема 4. *Якщо виконано умови* **I**, **II** *при* $k=4$, **III**, **IV** *при* $m \geq 6$, *а також* **V**, *то*

$$T\,\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = K_T^2(z) + \left(M_T(z) + N_T(z)\right) T^{-1} + O\left(T^{-\frac{3}{2}} \ln^3 T\right), \tag{65}$$

де

$$K_T^2(z) = T^{-1}\int_0^T\int_0^T \left(B^2(t-s) + B(t-s+z)B(t-s-z)\right) dtds,$$

$$M_T(z) = 2\left(\Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2} a_{i_1 i_2}(z)\Delta_{j_1 j_2}(z) - \Lambda^{i_1 j_1}\left(\varphi^{(1)}_{i_1 j_1} + \sum_{k=2}^{4}\varphi^{(k)}_{i_1 j_1}(z)\right)\right),$$

$$N_T(z) = \left(\Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1 j_2}\right)^2 + \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}\Lambda^{i_4 j_4}\Pi_{(i_1)(i_4)}(z) a_{i_2 i_3}(z)\Psi_{j_1 j_2}\Psi_{j_3 j_4} -$$

$$-2\Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}\left(\Pi_{(i_1)(i_2)}(z)\Psi_{j_1 j_2}\Psi_{i_3 j_3}(z) + a_{i_1 i_2}(z)\Psi_{j_1 j_3}\Psi_{i_3 j_2}(z)\right) +$$

$$+\Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\left(\Psi_{i_1 j_1}(z)\Psi_{i_2 j_2}(z) + \Psi_{i_1 j_2}(z)\Psi_{i_2 j_1}(z) + \Psi_{j_1 j_2}\left(\Psi_{i_1 i_2} + 2\Psi^{(1)}_{i_1 i_2}(z) + 2\Psi^{(2)}_{i_1 i_2}(z)\right)\right),$$

величини $\Delta_{j_1 j_2}(z)$, $\varphi^{(1)}_{i_1 j_1}$, $\varphi^{(k)}_{i_1 j_1}$, $k = 2, 3, 4$, $\Psi^{(l)}_{i_1 i_2}(z)$, $l = 1, 2$, *означено в* (56), (59), (64).

Перепишемо (65) природнішим чином.

***Наслідок* 5.** *В умовах теореми* 4

$$\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = K_T^2(z) T^{-1} + \left(M_T(z) + N_T(z)\right) T^{-2} + O\left(T^{-\frac{5}{2}} \ln^3 T\right). \tag{66}$$

З рівностей (54) і (60) випливає такий наслідок.

***Наслідок* 6.** *Якщо умови теореми* 4 *виконано для* $k = 3$ *і* $m \geq 4$, *то*

$$\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-2}\ln^{\frac{5}{2}} T\right).$$

В свою чергу з (55) маємо такий наслідок.

***Наслідок* 7.** *Якщо умови теореми* 4 *виконано для* $k = 2$ *і* $m \geq 2$, *то*

$$\mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-\frac{3}{2}}\ln^2 T\right).$$

З теорем 3 і 4 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *За умов теореми* 4

$$\mathrm{D}B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = K_T^2(z)T^{-1} + \left(M_T(z) + N_T(z) - L_T^2(z)\right)T^{-2} + O\left(T^{-\frac{5}{2}}\ln^3 T\right). \qquad (67)$$

Доведення. Дійсно,

$$\mathrm{D}B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = \mathsf{E}\left(B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2 - \left(\mathsf{E}\,B_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) - B(z)\right)^2. \qquad (68)$$

Підставляючи в (68) вирази (66) і (48), отримуємо (67).

***Наслідок* 8.** *Нехай умови теореми* 4 *виконано для* $k = 3$ *та* $m \geq 4$. *Тоді*

$$\mathrm{DB}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-2}\ln^{\frac{5}{2}} T\right).$$

Коли ті ж умови виконано для $k = 2$ *та* $m \geq 2$, *то*

$$\mathrm{DB}_T\left(z, \widehat{\theta}_T\right) = K_T^2(z)T^{-1} + O\left(T^{-\frac{3}{2}}\ln^2 T\right).$$

4. Приклад. Припустимо, що $g(t,\tau) = g(y(t),\tau)$, де $y(\cdot)\colon [0,\infty) \to \mathrm{Y}$ — борелева функція, $g(y,\tau)$ — функція, неперервна за сукупністю змінних $(y,\tau) \in \mathrm{Y} \times \Theta_\gamma$, $\mathrm{Y} \subset \mathbb{R}^m$ — компактна область планування регресійного експерименту. Нехай $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевих підмножин Y.

Розглянемо сім'ю мір $\mu_T(A) = T^{-1}\lambda\left(\{t \in [0,T]\colon y(t) \in A\}\right)$, $A \in \mathfrak{B}$, λ — міра Лебега на $[0,+\infty)$. Припустимо, що виконується наступна умова:

IV. Міра μ_T слабко збігається при $T \to \infty$ до деякої міри μ: $\mu_T \Longrightarrow \mu$.

Наведемо простий приклад виконання цієї умови при $m = 1$. Нехай $\{y_i, i \geq 1\} \subset \mathrm{Y}$ — деяка послідовність та $y(t) = y_i$, $t \in [i-1, i)$, $i \geq 1$. Введемо міру $\mu_T = T^{-1}\sum_{i=1}^{[T]}\delta_{y_i} + T^{-1}\{T\}\,\delta_{y_{[T]+1}}$, де $[T]$ та $\{T\}$ — ціла та дробова частини T відповідно. Тоді якщо $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\delta_{y_i} \Longrightarrow \mu$, при $n \to \infty$, то $\mu_T \Longrightarrow \mu$, при $T \to \infty$.

Припустимо, що функція $g(y,\tau)$ для кожного $y \in \mathrm{Y}$ має всі частинні похідні за змінними $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \in \Theta_\gamma$ до порядку $k+1$ $(k \geq 2)$ включно, причому функції $g^{(\alpha)}(y,\tau)$, $|\alpha| = \overline{1, k+1}$, неперервні за сукупністю змінних $(y,\tau) \in \mathrm{Y} \times \Theta^c$. Тоді виконуються умови **II** і **V**.

За формулою заміни міри в інтегралі Лебега

$$T^{-1}d_{iT}^2(\theta) = \int\limits_{\mathrm{Y}} g_i^2(y,\theta)\mu_T(dy) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\mathrm{Y}} g_i^2(y,\theta)\mu(dy),$$

і умова

$$\varliminf_{T\to\infty} T^{-1}d_{iT}^2(\theta) > 0, \qquad i = \overline{1,q},$$

перетворюється на умову

$$\mu\left\{y \in \mathrm{Y}\colon g_i(y,\theta) \neq 0\right\} > 0, \qquad i = \overline{1,q}.$$

З іншого боку,

$$I_T(\theta) = \left(\int\limits_{\mathrm{Y}} g_i(y,\theta)g_j(y,\theta)\mu_T(dy)\right)_{i,j=1}^{q} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int\limits_{\mathrm{Y}} g_i(y,\theta)g_j(y,\theta)\mu(dy)\right)_{i,j=1}^{q} = I(\theta),$$

і умова **III** виконується, якщо матриця $I(\theta)$ є додатно означеною.

Зауважимо далі, що серед відомих достатніх умов виконання умови $\mathbf{IV_1}$ (див. [1, 2]) в даному прикладі перевірки потребує лише умова розрізнення параметрів функцією регресії. Для даного прикладу спрощений варіант цієї умови можна записати у вигляді

$$\mathbf{IV_1}. \qquad \Phi_T^{[0]}\left(T^{-1/2}u, 0\right) = \int\limits_0^T \left(g\left(y(t), \theta + T^{-1/2}u\right) - g\left(y(t),\theta\right)\right)^2 dt \geq k_0\|u\|^2,$$

де $u \in U_T^c(\theta) = T^{1/2}\left(\Theta^c - \theta\right)$, $k_0 > 0$ — деяка стала.

Наведемо приклад виконання умови $\mathbf{IV_1}$ для нелінійної функції g. Нехай $m = q$ і $g\left(y(t),\tau\right) = e^{\langle y(t),\tau\rangle}$, $\langle y(t),\tau\rangle = \sum_{i=1}^q y_i(t)\tau_i$. Тоді

$$g\left(y(t), \theta + T^{-1/2}u\right) - g\left(y(t),\theta\right) = e^{\langle y(t),\tau\rangle}\left(e^{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle} - 1\right).$$

Оскільки $(e^x-1)^2 \geq x^2,\ x \geq 0$, та $(e^x-1)^2 > e^{2x}x^2,\ x < 0$, то

$$\left(e^{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle} - 1\right)^2 \geq \Delta\langle y(t),\tau\rangle^2 T^{-1}, \qquad \Delta = \min\left\{1, \min_{y\in Y, \tau\in\Theta^c} e^{\langle y,\tau\rangle}\right\} > 0.$$

Таким чином,

$$\Phi_T^{[0]}\left(T^{-1/2}u, 0\right) \geq \Delta^2 T^{-1}\int\limits_0^T e^{2\langle y(t),\theta\rangle}\langle y(t), u\rangle^2 dt \geq \Delta^4 \sum_{i,j=1}^q \left(\int\limits_Y y_i y_j \mu_T(d\lambda)\right) u_i u_j.$$

Якщо матриця $A = \left(\int_Y y_i y_j \mu(d\lambda)\right)_{i,j=1}^q$ додатно означена, то для достатньо великих T умова $\mathbf{IV_1}$ виконується, наприклад, при $k_0 = \dfrac{1}{2}\lambda_{\min}(A)\Delta^4$.

1. *Іванов О. В., Москвичова К. К.* Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в моделі „сигнал+шум” // Зб. тез за мат. третьої міжунівер. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики: Тез. докл. конф. (Київ, 25 – 27 квітня 2013р.). – Київ, 2013. – С. 42 – 43.

2. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 244 p.
3. *Leonenko N.N.* Limit theorems for random fields with singular spectrum. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 401 p.
4. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Robust estimators in non-linear regression models with long-range dependence // Optimal Design and Relat. Areas in Optim. and Statistics: Springer Optim. and Its Appl. – 2009. – **28**. – P. 193 – 221.
5. *Іванов О. В., Савич І. М.* Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера – Бассета параметра регресії з сильно залежним шумом // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1030 – 1050.
6. *Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Savich I. N.* Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra // Ann. Probab. – 2013. – **41**, № 2. – P. 1088 – 1114.
7. *Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Zhurakovsky B. M.* Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors // Statistics: J. Theor. and Appl. Statist. – DOI: 10.1080/02331888.2013.864656.
8. *Ivanov A. V.* Asymtotic theory of nonlinear regression. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 327 p.
9. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВіМС, 1998. – 289 с.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 656 с.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

Одержано 18.08.13,
після доопрацювання — 04.02.14