УДК 517.5

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

К ВОПРОСУ О ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКАХ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We establish order estimates for the linear widths of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some relationships between parameters p, q, and θ.

Отримано порядкові оцінки лінійних поперечників класів $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p, q, θ.

1. Введение. В настоящей работе продолжаются исследования линейных поперечников классов Никольского – Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые изучались в работах [1, 2]. Более конкретно об этом будет сказано в замечаниях к полученным результатам, а сначала приведем необходимые обозначения и определения исследуемых функциональных классов и аппроксимативной характеристики.

Пусть $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, обозначает d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0,\, 2\pi)$, обозначим пространство 2π-периодических по каждой переменной функций f, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \bigl|f(x)\bigr|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} \bigl|f(x)\bigr| < \infty.$$

Далее будем предполагать, что для $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Множество таких функций будем обозначать через $L^0_p(\pi_d)$.

Для функции $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j-й переменной с шагом h

$$\triangle_{h,j} f(x) = f\bigl(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d\bigr) - f(x)$$

и определим разность l-го порядка

$$\triangle^l_{h,j} f(x) = \underbrace{\triangle_{h,j} \ldots \triangle_{h,j}}_{l} f(x)$$

в точке x_j с шагом h. Далее, если $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \ldots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\triangle^k_h f(x) = \triangle^{k_1}_{h_1,1} \cdots \triangle^{k_d}_{h_d,d} f(x).$$

Пусть задан вектор $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, и параметры $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le \infty$. Будем говорить, что функция $f \in L^0_p(\pi_d)$ принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$, если выполнены условия

$$\left(\int\limits_{\pi_d} \| \triangle^k_h f \|^\theta_p \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \le 1, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\sup_h \| \triangle^k_h f \|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \le 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом предполагается, что для координат векторов $k = (k_1, \ldots, k_d)$ и $r = (r_1, \ldots, r_d)$ выполнены неравенства $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$. Отметим, что классы $B^r_{p,\theta}$ являются аналогами классов, введенных О. В. Бесовым [3], а при $\theta = \infty$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, где H^r_p — аналоги классов, введенных С. М. Никольским (см., например, [4, с. 189]). В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться эквивалентным определением классов $B^r_{p,\theta}$, для формулировки которого приведем необходимые обозначения.

Для векторов

$$s = (s_1, \ldots, s_d), \quad s_j \in \mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad k = (k_1, \ldots, k_d), \quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1,d},$$

положим

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \right\}$$

и для $f \in L^0_p(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Пусть $p \in (1, \infty)$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда с точностью до абсолютных постоянных классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [5]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f)\|^\theta_p \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f \colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f)\|_p \le 1 \right\}.$$

Отметим, что при соответствующем видоизменении „блоков" $\delta_s(f)$ приведенное определение классов $B^r_{p,\theta}$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$ (см., например, [5], замечание 2.1).

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена вида

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \Big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \Big)$$

и для $f \in L^0_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, положим

$$A_s(f) = f * A_s,$$

где $*$ обозначает операцию свертки. Тогда при $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$,

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \big\| A_s(f) \big\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}$$

при $1 \le \theta < \infty$ и

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f\colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)} \big\| A_s(f) \big\|_p \le 1 \right\}.$$

Ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots, r_d)$, которые содержатся в определении классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$.

Вектору $r = (r_1, \ldots, r_d)$ сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, где $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$.

Теперь дадим определение аппроксимативной характеристики, которую будем исследовать. Пусть W — центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X. Тогда линейный поперечник множества W в пространстве X определяется по формуле

$$\lambda_n(W, X) = \inf_A \sup_{x \in W} \|x - Ax\|_X,$$

где инфимум берется по всем действующим в X линейным операторам A, размерность области значений которых не превышает n. Напомним, что поперечник $\lambda_n(W, X)$ введен в 1960 г. В. М. Тихомировым [6] и к настоящему времени его исследования имеют богатую историю, с которой можно ознакомиться, например, в книгах [7, 8], а также в работах [1, 2, 6, 9 – 11], где приведена обширная библиография.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C > 0$ такая, что $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что $\mu_1 \ll \mu_2$ и

$\mu_1 \gg \mu_2$. Заметим, что все постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться далее, могут зависеть только от параметров, содержащихся в определении классов, метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Если $\mathfrak{M}$ — некоторое конечное множество, то через $|\mathfrak{M}|$ будем обозначать количество его элементов.

2. Вспомогательные утверждения. Здесь мы приведем ряд утверждений, которые будем использовать при доказательстве полученных результатов.

Теорема А [4, c. 65]. *Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда существуют положительные постоянные $C_1(p)$ и $C_2(p)$ такие, что для любой функции $f \in L^0_p(\pi_d)$ справедлива оценка*

$$C_1(p)\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s \left|\delta_s(f)\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2(p)\|f\|_p.$$

Эта теорема является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда – Пэли (см. [12], гл. 15, § 2).

Теорема Б [13]. *Между пространством тригонометрических полиномов вида*

$$f(t) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,t)}$$

и пространством $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ существует изоморфизм, сопоставляющий функции f вектор $\delta_s f^j = \left\{f_n(\tau_j)\right\} \in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$,

$$f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \qquad l = \overline{1,d}, \quad n = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \qquad j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s_i - 1},$$

и при этом имеет место соотношение

$$\|\delta_s(f)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\delta_s f^j|^p \right)^{1/p}, \ p \in (1, \infty).$$

Теорема В [14]. *Пусть $n = (n_1, \ldots, n_d)$, n_l, $l = \overline{1,d}$, — целые неотрицательные числа и*

$$t(x) = \sum_{|k_l| \leq n_l} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p < \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{l=1}^d n_l^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q.$$

Это неравенство установлено С. М. Никольским и названо „неравенством разных метрик”. В одномерном случае и при $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [15].

Лемма А [16, с. 25]. *Пусть* $1 \le p < q < \infty$ *и* $f \in L_p^0(\pi_d)$. *Тогда имеет место порядковое неравенство*

$$\|f\|_q^q \ll \sum_s \left(\left\| \delta_s(f) \right\|_p 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \right)^q,$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$.

Лемма Б. *Пусть* $1 < q < \infty$, $q_1 = \max\{2, q\}$, $q_2 = \min\{2, q\}$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\left(\sum_s \left\| \delta_s(f) \right\|_q^{q_1} \right)^{1/q_1} \ll \left\| \sum_s \delta_s(f) \right\|_q \ll \left(\sum_s \left\| \delta_s(f) \right\|_q^{q_2} \right)^{1/q_2}.$$

Эти неравенства являются следствием теоремы А (см. [17, с. 17]).

Лемма В [16, с. 11]. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{(s,\gamma') \ge n} 2^{-\beta(s,\gamma)} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu - 1}, \quad \beta > 0.$$

Лемма Г [16, с. 11]. *Имеет место оценка*

$$\sum_{(s,\gamma') \le n} 2^{(s,\gamma)} \ll 2^n n^{\nu - 1}.$$

Для формулировки следующих утверждений приведем необходимые обозначения и напомним определение еще одной аппроксимативной характеристики — колмогоровского поперечника.

Пусть l_p^m, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, обозначает пространство $\mathbb{R}^m$, снабженное нормой

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^m обозначим единичный шар в l_p^m, т. е. множество элементов $x \in l_p^m$, для которых $\|x\|_{l_p^m} \le 1$.

Далее, для $m, n \in \mathbb{N}$ и $1 \le p, q \le \infty$ через $l_{p,q}^{m,n}$ будем обозначать пространство $\mathbb{R}^{mn}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{p,q}^{m,n}} = \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k \in \Delta_l} |x_k|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q}, \tag{1}$$

где

$$\Delta_l = \left\{ k \in \mathbb{N} \colon (l-1)m \le k < l\,m,\ l = \overline{1, n} \right\}.$$

Соответственно через $B_{p,q}^{m,n}$ обозначим единичный шар в $l_{p,q}^{m,n}$. Заметим, что при $q = \infty$ либо $p = \infty$ подразумевается естественная модификация нормы (1) и, кроме того, в случае $p = q$ имеет место тождество

$$\|x\|_{l^{m,\,n}_{p,\,p}} \equiv \|x\|_{l^{m\,n}_{p}}.$$

Пусть W — центрально-симметричное множество банахова пространства X. Тогда величина

$$d_n(W,X) = \inf_{L_n} \sup_{f\in W} \inf_{u\in L_n} \|f-u\|_X,$$

где L_n — подпространства размерности n пространства X, называется колмогоровским поперечником множества W в пространстве X. Поперечник $d_n(W,X)$ введен в 1936 г. А. Н. Колмогоровым [18].

Легко видеть, что непосредственно из определений имеем

$$d_n(W,X) \le \lambda_n(W,X). \tag{2}$$

Пусть $s\in\mathbb{N}^d$ и $\mathcal{J}(\rho(s))$ обозначает множество функций f вида

$$f(x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Как следствие определения линейного поперечника и теорем А, Б легко получить следующее утверждение (см., например, [9]).

Лемма Д. *Пусть $s\in\mathbb{N}^d$, $f\in\mathcal{J}\big(\rho(s)\big)$, $M_s\in\mathbb{Z}_+$, $M_s\le 2^{(s,1)}$. Тогда при $1<p,\ q<\infty$ существует линейный оператор $\Lambda_{M_s}\colon \mathcal{J}\big(\rho(s)\big)\to\mathcal{J}\big(\rho(s)\big)$, размерность области значений которого не превышает M_s и такой, что*

$$\|f-\Lambda_{M_s}f\|_q \asymp \lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}\right) 2^{(s,1)\left(\frac1p-\frac1q\right)}\|f\|_p.$$

Теорема Г [19]. *Пусть $n<m$, $1\le p<2\le q<\infty$ и $\dfrac1p+\dfrac1q\ge1$. Тогда справедлива оценка*

$$\lambda_n(B_p^m, l_q^m) \asymp \max\left\{m^{\frac1q-\frac1p}, \min\left\{1,\, m^{\frac1q}n^{-\frac12}\right\}\sqrt{1-\frac{n}{m}}\right\}.$$

Отметим, что в случае $p=1$, $q>2$ соответствующий результат следует из утверждения о колмогоровском поперечнике октаэдра B_1^m в пространстве l_q^m, установленного Б. С. Кашиным [20].

Теорема Д [21]. *Пусть $M=\left[\dfrac{mn}{2}\right]$. Тогда существует положительная постоянная C_3 такая, что выполняются неравенства*

$$C_3 m\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m} \le d_M\left(B^{n,m}_{1,\infty},\, l^{n,m}_{2,1}\right) \le m.$$

(Здесь и далее символ $\log$ обозначает логарифм по основанию 2.)

Для формулировки следующего утверждения напомним определение поляры множества.

Определение. *Пусть A — некоторое множество в нормированном пространстве X. Тогда полярой множества A называется множество A^0 в сопряженном пространстве X^* вида*

$$A^0 = \left\{x^*\in X^*\colon \left|\langle x,x^*\rangle\right| \le 1\ \forall x\in A\right\},$$

где $\langle x,x^*\rangle$ — значение линейного функционала x^* на элементе x.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема Е [22]. *Пусть* BX *и* BY — *единичные шары в банаховых пространствах* X *и* Y *соответственно,* $(BX)^0$, $(BY)^0$ — *поляры этих множеств и пространство* Y^* *вложено в пространство* X. *Тогда*

$$\lambda_n\big((BY)^0, X\big) = \lambda_n\big((BX)^0, Y\big).$$

3. Основные результаты. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $p' < q < \infty$, $r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}$. *Тогда при* $\theta \in (q, \infty)$ *имеют место оценки*

$$\frac{\sqrt{\log\log\log M}}{\log\log M}\, \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}} \ll \lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll$$

$$\ll \big(M^{-1}\log^{\nu-1} M\big)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}, \tag{3}$$

где $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$.

Доказательство. При установлении оценок как сверху, так и снизу будем применять метод дискретизации, суть которого состоит в сведении исходной задачи к задаче оценок линейных поперечников соответствующих конечномерных множеств.

Итак, установим в (3) сначала оценку сверху. С этой целью подберем число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $M \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$ и сопоставим каждому вектору $s \in \mathbb{N}^d$ число

$$M_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s,\gamma') \leq n, \\ \big[2^{n+\alpha(n-(s,\gamma))}\big], & (s,\gamma') > n, \end{cases} \tag{4}$$

где $[a]$ — целая часть числа a и $\alpha > 0$ — число, которое будет уточнено в процессе доказательства. Тогда, воспользовавшись леммами В и Г, можем записать

$$\sum_s M_s \leq \sum_{(s,\gamma')\leq n} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,\gamma')>n} 2^{n+\alpha(n-(s,\gamma))} \ll$$

$$\ll 2^n\, n^{\nu-1} + 2^{n+\alpha\, n} \sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^n\, n^{\nu-1} \asymp M.$$

Пусть $f \in B^r_{p,\theta}$. Рассмотрим линейный оператор Λ_M ранга M, действующий на функцию f по формуле

$$\Lambda_M f = \sum_s \Lambda_{M_s} \delta_s(f),$$

где Λ_{M_s} — операторы из леммы Д.

Оценим $\|f - \Lambda_M\, f\|_q$. Воспользовавшись сначала леммой А (с заменой индекса p на p') и затем леммой Д, можем записать

$$\|f - \Lambda_M\, f\|_q \ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}\right)} \big\|\delta_s(f) - \Lambda_{M_s}\, \delta_s(f)\big\|_{p'}\right)^q\right)^{1/q} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}\right)}\, 2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\, \lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}},\, l_{p'}^{2^{(s,1)}})\, \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\, \lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}},\, l_{p'}^{2^{(s,1)}})\, \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q}. \qquad (5)$$

Прежде чем продолжить оценку (5) заметим, что для некоторых векторов s таких, что $(s,\gamma') > n$, может быть $M_s \geq 2^{(s,1)}$. Тогда, согласно определению линейного поперечника, будет выполняться соотношение

$$\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}},\, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right) = 0.$$

Для всех остальных векторов s, входящих в последнюю сумму (5), воспользовавшись теоремой Г, можем записать

$$\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}},\, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right) \ll 2^{\frac{\|s\|_1}{p'}}\, M_s^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, с учетом сделанного замечания оценка (5) преобразуется к виду

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\, 2^{\frac{\|s\|_1}{p'}}\, M_s^{-\frac{1}{2}} \|\delta_s(f)\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)}\, M_s^{-\frac{1}{2}} \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q}. \qquad (6)$$

Подставив в (6) вместо M_s соответствующие значения и выполнив элементарные преобразования, будем иметь

$$\|f-\Lambda_M f\|_q \ll \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)}\, 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}\left(n-(s,\gamma)\right)} \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\alpha n}{2}} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)}\, 2^{\frac{\alpha}{2}(s,\gamma)} \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\alpha n}{2}} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{(s,\gamma)\left(1-\frac{1}{q}+\frac{\alpha}{2}\right)} \big\|\delta_s(f)\big\|_p \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}-\frac{\alpha n}{2}} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} \left(2^{-(s,\gamma)\left(r_1-1+\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{2}\right)}\, 2^{(s,r)} \|\delta_s(f)\|_p \right)^q \right)^{1/q}. \qquad (7)$$

Чтобы продолжить оценку (7), выберем параметр α из соотношения $r_1 - 1 + \dfrac{1}{q} - \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Тогда, используя неравенство Гельдера с показателем $\dfrac{\theta}{q}$ и лемму В, получаем

$$\|f - \Lambda_M f\|_q \ll 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\alpha n}{2}} \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{-(s,\gamma)\left(r_1 - 1 + \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\theta q}{\theta - q}} \right)^{\frac{\theta - q}{\theta q}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,\gamma')>n} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta_s(f)\big\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{n}{2} - \frac{\alpha n}{2} - n\left(r_1 - 1 + \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{2}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \leq$$

$$\leq 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)} n^{(\nu-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}}.$$

Отсюда следует искомая оценка сверху поперечника $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$.

Переходя к установлению в (3) оценки снизу, заметим, что ее достаточно получить при $p = 2$ и $\nu = d$. Выберем число $\mu \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^\mu \mu^{d-1} \asymp M$ таким образом, чтобы количество элементов множества $Q_\mu = \bigcup\limits_{s \in \Omega_\mu} \rho(s)$ было не меньше $2M$ $\big($здесь Ω_μ — набор векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, вида $\Omega_\mu = \{s\colon (s,1) = \mu\}\big)$.

Пусть $\mathcal{J}_\mu$ обозначает множество функций

$$\mathcal{J}_\mu = \left\{ f\colon f = \sum_{s \in \Omega_\mu} \delta_s(f) \right\}$$

и P_μ — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{J}_\mu$. Тогда, согласно определению линейного поперечника, можем записать

$$\lambda_M(B^r_{2,\theta}, L_q) \geq \lambda_M(B^r_{2,\theta} \cap \mathcal{J}_\mu, L_q). \tag{8}$$

С другой стороны, для $t \in \mathcal{J}_\mu$ имеем

$$\|f - t\|_q \gg \|P_\mu f - t\|_q. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует соотношение

$$\lambda_M(B^r_{2,\theta}, L_q) \gg \lambda_M(B^r_{2,\theta} \cap \mathcal{J}_\mu, L_q \cap \mathcal{J}_\mu). \tag{10}$$

Далее, для $f \in \mathcal{J}_\mu$ в силу теоремы Б можем записать

$$\|f\|_{B^r_{2,\theta}} = \left(\sum_{s \in \Omega_\mu} 2^{(s,r)\theta} \big\|\delta_s(f)\big\|_2^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{\mu r_1} \left(\sum_{s \in \Omega_\mu} \big\|\delta_s(f)\big\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp 2^{\mu\, r_1} \left(\sum_{s\in\Omega_\mu} \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s\, f^j\right|^2 \right)^{\theta/2} \right)^{1/\theta} =$$

$$= 2^{\mu\, r_1 - \frac{\mu}{2}} \left(\sum_{s\in\Omega_\mu} \left(\sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s\, f^j\right|^2 \right)^{\theta/2} \right)^{1/\theta}. \qquad (11)$$

Следовательно, согласно (11) единичному шару из $B^r_{2,\theta} \cap \mathcal{J}_\mu$ сопоставляется шар радиуса $C_4\, 2^{\mu\, r_1 - \frac{\mu}{2}}$, $C_4 > 0$, из пространства $l_{2,\theta}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|}$.

С другой стороны, используя по отношению к $f \in \mathcal{J}_\mu$ сначала лемму Б, а затем теорему Б, имеем

$$\|f\|_q = \left\| \sum_{s\in\Omega_\mu} \delta_s(f) \right\|_q \gg \left(\sum_{s\in\Omega_\mu} \left\|\delta_s(f)\right\|_q^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-\frac{\mu}{q}} \left(\sum_{s\in\Omega_\mu} \sum_{j=1}^{2^\mu} \left|\delta_s\, f^j\right|^q \right)^{1/q}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что между нормами функций из $L_q \cap \mathcal{J}_\mu$ и нормами соответствующих элементов из $l_q^{2^\mu\,|\Omega_\mu|}$ имеет место соотношение

$$\|\cdot\|_q \gg 2^{-\frac{\mu}{q}}\, \|\cdot\|_{l_q^{2^\mu\,|\Omega_\mu|}}. \qquad (13)$$

Таким образом, согласно (10) – (13) получаем

$$\lambda_M(B^r_{2,\theta},\, L_q) \gg \lambda_M(B^r_{2,\theta} \cap \mathcal{J}_\mu,\, L_q \cap \mathcal{J}_\mu) \gg$$

$$\gg 2^{-\mu\left(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)}\, \lambda_M\left(B_{2,\theta}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|},\, l_q^{2^\mu\,|\Omega_\mu|}\right). \qquad (14)$$

Чтобы продолжить оценку (14), воспользуемся следующими соотношениями.

Сначала заметим, что непосредственно из неравенства

$$\|\cdot\|_{l_{2,\theta}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|}} \le |\Omega_\mu|^{\frac{1}{\theta}}\, \|\cdot\|_{l_{2,\infty}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|}}$$

следует вложение

$$|\Omega_\mu|^{-\frac{1}{\theta}}\, B_{2,\infty}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|} \subset B_{2,\theta}^{2^\mu,\,|\Omega_\mu|}. \qquad (15)$$

Далее, отправляясь от неравенства

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^\mu}} \ge \|\cdot\|_{l_\infty^{2^\mu}}, \quad 1 \le q \le \infty,$$

можем записать

$$\|\cdot\|_{l_q^{2^\mu|\Omega_\mu|}} \equiv \|\cdot\|_{l_{q,q}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}} \geq \|\cdot\|_{l_{\infty,q}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}} \geq \|\cdot\|_{l_{\infty,1}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}} |\Omega_\mu|^{\frac{1}{q}-1}. \tag{16}$$

Следовательно, согласно (14)–(16) и теореме Е, находим

$$\lambda_M(B_{2,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-\mu\left(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} |\Omega_\mu|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} \lambda_M\left(B_{2,\infty}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}, l_{\infty,1}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}\right) \geq$$

$$\geq 2^{-\mu\left(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} |\Omega_\mu|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} \lambda_M\left(B_{1,\infty}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}, l_{2,1}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}\right). \tag{17}$$

Поэтому в силу (2) оценка (17) преобразуется к виду

$$\lambda_M(B_{2,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-\mu\left(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} |\Omega_\mu|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} d_M\left(B_{1,\infty}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}, l_{2,1}^{2^\mu,|\Omega_\mu|}\right). \tag{18}$$

Наконец, используя теорему Д, из (18) получаем

$$\lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \gg 2^{-\mu\left(r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} |\Omega_\mu|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}-1} \frac{|\Omega_\mu|\sqrt{\log\log|\Omega_\mu|}}{\log|\Omega_\mu|} \asymp$$

$$\asymp (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}} (\log^{d-1} M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\sqrt{\log\log\log M}}{\log\log M}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

Приведем комментарии к полученному результату. Во-первых, заметим, что оценки в теореме 1 не реализуются M-мерным подпространством тригонометрических полиномов с „номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов (см. [23]). Во-вторых, как нижняя, так и верхняя оценки в (3) уступают (по степени $\log M$) точным по порядку оценкам колмогоровских поперечников классов $B_{p,\theta}^r$ в пространстве L_q (см., например, [24], § 4.2).

Следующее утверждение получим, воспользовавшись теоремой 1 и известными оценками приближения функций из классов $B_{p,\theta}^r$ их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье.

Теорема 2. *Пусть* $2 \leq p < q < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$. *Тогда при* $\theta \in (q, \infty)$ *справедливы оценки*

$$\frac{\sqrt{\log\log\log M}}{\log\log M} (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll \lambda_M(B_{p,\theta}^r, L_q) \ll$$

$$\ll (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} (\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}. \tag{19}$$

Доказательство. Оценка сверху реализуется с помощью приближения функций $f \in B_{p,\theta}^r$ их ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f,x) = \sum_{(s,\gamma)<n} \delta_s(f,x)$, где число n подобрано из условия $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Соответствующий результат содержится в [23] (см. также [24], § 1.4).

Для доказательства в (19) оценки снизу воспользуемся теоремой 1.

Пусть $f \in B_{p,\theta}^r$, $2 \leq p < \infty$. Тогда в силу теоремы В можем записать

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \, 2^{\|s\|_1 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\theta} \left\|\delta_s(f)\right\|_2^\theta \right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_s 2^{\left(s, r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)} \left\|\delta_s(f)\right\|_2^\theta \right)^{1/\theta} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}},$$

где $r - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}$ — вектор с координатами $r_j - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}$, $j = \overline{1,d}$.

Отсюда следует вложение

$$B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \subset B^r_{p,\theta}$$

и, таким образом, используя оценку снизу в (3), получаем

$$\lambda_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) \gg \lambda_M\left(B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, L_q\right) \gg$$

$$\gg \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\sqrt{\log\log\log M}}{\log\log M}.$$

Теорема доказана.

Замечание. При $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_p, утверждения, соответствующие теоремам 1, 2, доказаны в работе [10] (см. также [11]). В случае $2 \le \theta \le q$ точные по порядку оценки величин $\lambda_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ для тех же значений параметров p и q, что и в теоремах 1 и 2, получены в работе [2].

В заключение отметим, что в одномерном случае $(d = 1)$ в работе [2] были установлены точные порядки величин $\lambda_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_q)$ при $1 \le \theta < \infty$. Случай $\theta = \infty$ изучен в [10]. Сформулируем соответствующее утверждение.

Теорема Ж. *Пусть* $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\lambda_M(B^{r_1}_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} M^{-r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & p \le 2, \quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} < 1, \quad r_1 > 1 - \dfrac{1}{q}, \\ M^{-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 2 \le p < q < \infty, \quad r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}. \end{cases}$$

1. *Романюк А. С.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 2. – С. 93 – 114.
2. *Романюк А. С.* Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Anal. Math. – 2011. – **37**. – P. 181 – 213.
3. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
4. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
6. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.

7. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 206.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 423 с.
9. *Галеев Э. М.* О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1987. – **4**. – С. 13 – 16.
10. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 189 – 199.
11. *Галеев Э. М.* Поперечники функциональных классов и конечномерных множеств // Владикавказ. мат. журн. – 2011. – **13**, № 2. – С. 3 – 14.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.; Т. 2. – 537 с.
13. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\overline{r}}$ и $\widetilde{H}_p^{\overline{r}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
14. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
15. *Jackson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 2. – P. 889 – 906.
16. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
17. *Темляков В. Н.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ., Inc., 1993. – 419 p.
18. *Kolmogoroff A.* ʼUber die beste Annaherung von Funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – **37**. – S. 107 – 111.
19. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 2. – С. 180 – 189.
20. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1980. – **15**, № 5. – С. 379 – 394.
21. *Изаак А. Д.* Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. – 1994. – **55**, № 1. – С. 43 – 52.
22. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
23. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
24. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93**. – 352 с.

Получено 01.10.13