УДК 517.624.3

Д. С. Джумабаев
(Ин-т математики и мат. моделирования М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

We propose a method for the investigation and solution of boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations based on the partition of the interval and introduction of additional parameters. Every partition of the interval is associated with a homogeneous Fredholm integral equation of the second kind. The definition of regular partitions is given. It is shown that the set of regular partitions is nonempty. A criterion for the solvability of the analyzed problem is established and an algorithm for finding its solutions is constructed.

Запропоновано метод дослідження і розв'язання лінійної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма, що ґрунтується на розбитті інтервалу і введенні додаткових параметрів. Кожному розбиттю інтервалу поставлено у відповідність деяке однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. Наведено означення регулярного розбиття і показано, що множина регулярних розбиттів не є порожньою. Встановлено критерій розв'язності розглядуваної задачі і побудовано алгоритм знаходження її розв'язків.

1. Введение. Интегро-дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях как математическая модель различных процессов естествознания. В монографии [1] отмечена их роль при изучении процессов с последействиями и приведен обзор работ, посвященных краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма. Разрешимость краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма и приближенные методы нахождения их решений изучены в работах многих авторов [2–11]. В монографии [12] рассмотрены линейные краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач и построены алгоритмы нахождения их решений.

В настоящей статье рассматривается линейная двухточечная краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int\limits_0^T K(t,s)x(s)\,ds + f(t), \qquad x \in R^n, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

где матрицы $A(t)$, $K(t,s)$ непрерывны на $[0,T]$ и $[0,T]\times[0,T]$ соответственно, $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Через $C([0,T],R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x\colon [0,T] \to R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Решением задачи (1), (2) является непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $x(t) \in C([0,T],R^n)$, удовлетворяющая интегро-дифференциальному уравнению (1) и краевому условию (2).

Основными методами исследования и решения краевой задачи (1), (2) являются метод А. И. Некрасова [13] и метод функций Грина. Использование этих методов требует однозначной разрешимости некоторых промежуточных задач.

В методе А. И. Некрасова предполагается однозначная разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(t) = \int\limits_0^T M(t,s)y(s)\,ds + \widetilde{f}(t),$$

с ядром $M(t,s) = \int_s^T K(t,\tau)X(\tau)\,d\tau X^{-1}(s)$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица дифференциальной части (1), $\widetilde{f}(t) \in C([0,T],R^n)$.

Метод функций Грина применим к задаче (1), (2) при предположении однозначной разрешимости краевой задачи для дифференциальной части интегро-дифференциального уравнения (1), т. е. этот метод предполагает однозначную разрешимость краевой задачи (1), (2), когда $K(t,s) = 0$.

Поскольку однозначная разрешимость промежуточных задач не является необходимым условием существования решения исходной краевой задачи, методы А. И. Некрасова и функций Грина не позволяют установить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2).

В [14] предложен метод исследования и решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Метод основан на разбиении интервала $[0,T]$ с шагом $h>0: Nh = T$ и введении дополнительных параметров. Здесь также требуется однозначная разрешимость некоторой промежуточной задачи — специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от вышеуказанных промежуточных задач, эта промежуточная задача однозначно разрешима для всех $h>0$, удовлетворяющих неравенству

$$\beta The^{\alpha h} < 1, \tag{3}$$

где $\beta = \max_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]} \|K(t,s)\|$, $\alpha = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$.

Это свойство специальной задачи Коши позволило получить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2). Отметим, что ограничение на шаг разбиения требуется также и в [15, 16].

Целью работы является обобщение метода и результатов статьи [14] на случай, когда шаг $h>0$, вообще говоря, не удовлетворяет неравенству (3).

С этой целью для каждого разбиения интервала $[0,T]$ по исходным данным интегро-дифференциального уравнения (1) составляется однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода и вводится определение регулярного разбиения.

2. Специальная задача Коши и множество регулярных разбиений. Разобьем интервал $[0,T]$ равномерно на N частей и обозначим через Δ_N это разбиение:

$$\Delta_N = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_N = T\},$$

где $t_s = \dfrac{sT}{N}$.

Через $x_r(t)$ обозначим сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[t_{r-1},t_r)$, т. е. $x_r(t) = x(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$.

Вводя параметры $\lambda_r\hat{=}x_r(t_{r-1})$ и выполняя замену функции $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$ на каждом r-м интервале, получаем краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)(u_r+\lambda_r)+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}K(t,s)(u_j(s)+\lambda_j)\,ds+f(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\tag{4}$$

$$u_r(t_{r-1})=0,\qquad r=\overline{1,N},\tag{5}$$

$$B\lambda_1+C\lambda_N+C\lim_{t\to T-0}u_N(t)=d,\tag{6}$$

$$\lambda_p+\lim_{t\to t_p-0}u_p(t)-\lambda_{p+1}=0,\qquad p=\overline{1,N-1},\tag{7}$$

где (7) являются условиями непрерывности решения во внутренних точках разбиения Δ_N.

Через $C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\ldots$ $\ldots,x_N(t))$, где $x_r\colon[t_{r-1},t_r)\to R^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to t_r-0}x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2=\max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|x_r(t)\|$. Очевидно, что пространство $C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ является полным.

Если $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2), то составим вектор $\lambda^*=(x^*(t_0),x^*(t_1),\ldots$ $\ldots,x^*(t_{N-1}))\in R^{nN}$ и систему функций $u^*[t]=(u_1^*(t),u_2^*(t),\ldots,u_N^*(t))$, где $u_r^*(t)$ — сужение функций $x^*(t)-x^*(t_{r-1})$ на r-й интервал. Очевидно, что $u^*[t]\in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ и пара $(\lambda^*,u^*[t])$ является решением задачи (4)–(7). Если пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$ с элементами $\widetilde{\lambda}=$ $=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)\in R^{nN}$, $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ldots,\widetilde{u}_N(t))\in C([0,T],\Delta_N,R^{nN})$ — решение задачи (4) – (7), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t),\qquad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N},\qquad \widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_N+\lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_N(t),$$

является решением исходной краевой задачи (1), (2).

Отметим, что условия непрерывности решения (7) и интегро-дифференциальные уравнения (4) обеспечивают также и непрерывность производных во внутренних точках разбиения Δ_N.

Введение дополнительных параметров [17] позволяет получить начальные данные (5). Теперь при фиксированных значениях параметров $\lambda\in R^{nN}$ систему функций $u[t]$ можно определить из специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (4), (5). Используя фундаментальную матрицу $X(t)$ дифференциального уравнения $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$, сводим задачу (4), (5) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$u_r(t)=X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1\lambda_r+$$

$$+X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau_1)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}K(\tau_1,s)(u_j(s)+\lambda_j)\,dsd\tau_1+$$

$$+X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)\,d\tau_1, \qquad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}. \tag{8}$$

В системе (8) предположим $t=\tau$. Умножая обе части на $K(t,\tau)$, интегрируя по τ на отрезке $[t_{r-1},t_r]$ и суммируя по r, получаем

$$\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)u_r(\tau)\,d\tau=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1,s)u_j(s)\,ds d\tau_1 d\tau+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau\lambda_r+$$

$$+\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\left(\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1,s)\,ds\lambda_j+f(\tau_1)\right)d\tau_1 d\tau, \qquad t\in[0,T]. \tag{9}$$

Изменим порядок суммирования в последней сумме (9) и введем обозначения

$$\Phi(\Delta_N,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)u_j(s)\,ds,$$

$$D_r(\Delta_N,t)=\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} K(\tau_1,s)\,ds d\tau_1 d\tau,$$

$$F(\Delta_N,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)\,d\tau_1 d\tau.$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$\Phi(\Delta_N,t)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\Phi(\Delta_N,\tau_1)\,d\tau_1 d\tau+$$

$$+\sum_{r=1}^{N} D_r(\Delta_N,t)\lambda_r+F(\Delta_N,t), \qquad t\in[0,T]. \tag{10}$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, имеем

$$\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\Phi(\Delta_N,\tau_1)\,d\tau_1 d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\int\limits_{\tau_1}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\,d\tau\right)X^{-1}(\tau_1)\Phi(\Delta_N,\tau_1)\,d\tau_1.$$

Равенствами

$$M(\Delta_N,t,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t_j} K(t,\tau_1)X(\tau_1)\,d\tau_1 X^{-1}(\tau), \qquad t\in[0,T], \quad \tau\in[t_{j-1},t_j), \quad j=\overline{1,N},$$

$$M(\Delta_N,t,T)=0$$

определим квадратную матрицу размерности n на $[0,T]\times[0,T]$. Для каждого фиксированного разбиения Δ_N матрица $M(\Delta_N,t,\tau)$ является непрерывной по $t\in[0,T]$ и кусочно-непрерывной по $\tau\in[0,T]$.

Теперь, уравнение (10) записывается в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\Phi(\Delta_N,t) = \int\limits_0^T M(\Delta_N,t,\tau)\Phi(\Delta_N,\tau)\,d\tau + D(\Delta_N,t)\lambda + F(\Delta_N,t), \qquad t\in[0,T], \tag{11}$$

где $D(\Delta_N,t) = (D_r(\Delta_N,t))$, $r=\overline{1,N}$, — непрерывная на $[0,T]$ матрица размерности $n\times nN$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)\in R^{nN}$, $F(\Delta_N,t)\in C([0,T],R^n)$. Решением уравнения (11) является непрерывная на $[0,T]$ вектор-функция $\Phi(\Delta_N,t)$ размерности n.

Очевидно, что если $u[t]=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_N(t))$ — решение специальной задачи Коши (4), (5) при заданных λ, $f(t)$, то вектор-функция $\Phi(\Delta_N,t)=\sum_{j=1}^N\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)u_j(s)\,ds$ будет решением уравнения (11). Верно и обратное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\widetilde{\Phi}(\Delta_N,t)$ — *решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода* (11). *Тогда система функций* $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ldots,\widetilde{u}_N(t))$ *с элементами*

$$\widetilde{u}_r(t) = X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)\,d\tau_1\lambda_r +$$

$$+\sum_{j=1}^N X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1,s)\,ds d\tau_1\lambda_j + X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)\,d\tau_1 +$$

$$+X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1)\widetilde{\Phi}(\Delta_N,\tau_1)\,d\tau_1, \qquad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}, \tag{12}$$

будет решением специальной задачи Коши (4), (5).

Доказательство. Покажем, что правая часть (12) будет решением системы интегральных уравнений (8). Поскольку уравнение (11) эквивалентно (10), можно подставить вместо $\widetilde{\Phi}(\Delta_N, \tau_1)$ в (12) правую часть (10):

$$\widetilde{u}_r(t) = X(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1) A(\tau_1)\, d\tau_1 \lambda_r +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} X(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, s)\, ds d\tau_1 \lambda_j +$$

$$+ X(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau +$$

$$+ X(t) \int\limits_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau_1) \Bigg\{ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(s) \widetilde{\Phi}(\Delta_N, s)\, ds d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(s) A(s)\, ds d\tau \lambda_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{k-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_2) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_2, s)\, ds d\tau_2 d\tau \lambda_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(s) f(s)\, ds d\tau \Bigg\} d\tau_1.$$

Используя равенство

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{k-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_2) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_2, s)\, ds d\tau_2 d\tau \lambda_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) X(\tau) \int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_2) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} K(\tau_2, s)\, ds d\tau_2 d\tau \lambda_k$$

и представление (12) функции $\widetilde{u}_r(t)$, убеждаемся, что выражение в фигурной скобке равно $\sum_{j=1}^{N} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(\tau_1, \tau) \widetilde{u}_j(\tau)\, d\tau$, т. е. система функций $\widetilde{u}[t] = \big(\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_N(t)\big)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений (8). Отсюда и из эквивалентности специальной задачи Коши (4), (5) и систем интегральных уравнений (8) следует утверждение леммы.

Лемма 1 доказана.

Возьмем произвольное разбиение Δ_N интервала $[0,T]$ и рассмотрим соответствующее однородное интегральное уравнение Фредгольма

$$\Phi(\Delta_N,t)=\int\limits_0^T M(\Delta_N,t,\tau)\Phi(\Delta_N,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Определение 1. *Разбиение Δ_N называется регулярным, если интегральное уравнение* (13) *имеет только тривиальное решение.*

Поскольку любая фундаментальная матрица дифференциального уравнения имеет вид $X(t)=X^0(t)\cdot C$, где нормальная фундаментальная матрица $X^0(t)$ удовлетворяет условию $X^0(0)=I$, C — произвольная обратимая матрица и

$$M(\Delta_N,t,\tau)=\int\limits_\tau^{t_r} K(t,\tau_1)X(\tau_1)\,d\tau_1 X^{-1}(\tau)=\int\limits_\tau^{t_r} K(t,\tau_1)X^0(\tau_1)\,d\tau_1(X^0(\tau))^{-1},$$

то $(n\times n)$-матрица $M(\Delta_N,t,\tau)$ не зависит от выбора фундаментальной матрицы дифференциальной части уравнения (1). Поэтому регулярность разбиения Δ_N также не зависит от выбора фундаментальной матрицы.

Множество регулярных разбиений Δ_N обозначим через $\sigma([0,T])$. Как следует из общей теории интегральных уравнений, если $\Delta_N\in\sigma([0,T])$, то уравнение (11) имеет единственное решение при любых $\lambda\in R^{nN}$, $F(\Delta_N,t)\in C([0,T],R^n)$, и это решение представимо в виде

$$\Phi(\Delta_N,t)=D(\Delta_N,t)\lambda+F(\Delta_N,t)+\int\limits_0^T \Gamma(\Delta_N,t,s,1)(D(\Delta_N,s)\lambda+$$

$$+F(\Delta_N,s))\,ds,\quad t\in[0,T], \tag{14}$$

где $\Gamma(\Delta_N,t,s,1)$ — резольвента интегрального уравнения Фредгольма (11).

Отметим, что при $N=1$ уравнение (13) принимает вид

$$\Phi(\Delta_1,t)=\int\limits_0^T\left(\int\limits_\tau^T K(t,\tau_1)X(\tau_1)\,d\tau_1\right)X^{-1}(\tau)\Phi(\Delta_1,\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Если (15) имеет только нулевое решение $\Phi=0$, то соответствующее неоднородное интегральное уравнение однозначно разрешимо и, следовательно, метод А. И. Некрасова применим к задаче (1), (2). Таким образом, условие $\Delta_1\in\sigma([0,T])$ совпадает с предположением метода А. И. Некрасова.

Лемма 2. *Множество $\sigma([0,T])$ не пусто.*

Доказательство. Пусть число $N_0\in\mathbb{N}$ удовлетворяет неравенству $\delta(N_0)=\beta T\dfrac{T}{N_0}e^{\alpha T/N_0}<$ <1. Докажем, что для любого $N\geq N_0$ разбиение Δ_N принадлежит $\sigma([0,T])$. Используя равенство

$$X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(\tau_1)\tilde{F}(\tau_1)\,d\tau_1 = \int\limits_a^t \tilde{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int\limits_a^t A(\tau_1)\int\limits_a^{\tau_1}\tilde{F}(\tau_2)\,d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+\int\limits_a^t A(\tau_1)\int\limits_a^{\tau_1} A(\tau_2)\int\limits_a^{\tau_2}\tilde{F}(\tau_3)\,d\tau_3 + \ldots, \quad a, t \in [0,T],$$

справедливое для любой непрерывной на $[0,T]$ вектор-функции $\tilde{F}(t)$, получаем оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\int\limits_0^T \widetilde{K}(\Delta_N,t,\tau)\Phi(\Delta_N,\tau)\,d\tau\right\| =$$

$$= \max_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{j=1}^N \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1)\Phi(\Delta_N,\tau_1)\,d\tau_1 d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \beta T\frac{T}{N}e^{\alpha T/N}\max_{t\in[0,T]}\|\Phi(\Delta_N,t)\| \leq \delta(N_0)\max_{t\in[0,T]}\|\Phi(\Delta_N,t)\|.$$

Поскольку $\delta(N_0) < 1$, для любого $N \geq N_0$ однородное интегральное уравнение (13) имеет только нулевое решение, т. е. $\Delta_N \in \sigma([0,T])$.

Лемма 2 доказана.

3. Разрешимость краевой задачи. Предположим, что $\Delta_N \in \sigma([0,T])$. Подставим вместо $\displaystyle\sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)u_j(s)\,ds$ в (8) правую часть (14). Получим представление функции $u_r(t)$ через $\lambda \in R^{nN}$, $f(t) \in C([0,T],R^n)$:

$$u_r(t) = X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau)A(\tau)\,d\tau\lambda_r + \sum_{j=1}^N X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau)\widehat{D}_j(\Delta_N,\tau)\,d\tau\lambda_j +$$

$$+X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^t X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau)\,d\tau, \qquad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}, \tag{16}$$

где

$$\widehat{D}_j(\Delta_N,t) = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,ds + D_j(\Delta_N,t) + \int\limits_0^T \Gamma(\Delta_N,\tau_1,s,1)\,d_j(\Delta_N,s)\,ds,$$

$$\widehat{F}(\Delta_N,t) = f(t) + F(\Delta_N,t) + \int\limits_0^T \Gamma(\Delta_N,\tau_1,s,1)F(\Delta_N,s)\,ds.$$

Из (16) определим $\lim_{t\to T-0} u_N(t)$, $\lim_{t\to t_p-0} u_p(t)$, $p=\overline{1,N-1}$. Подставляя их в (6), (7) и умножая обе части (6) на $h=\dfrac{T}{N}$, получаем линейную систему уравнений относительно введенных параметров λ_r, $r=\overline{1,N}$:

$$h\left(B+CX(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T} X^{-1}(\tau)\widehat{D}_1(\Delta_N,\tau)\,d\tau\right)\lambda_1+$$

$$+hC\sum_{k=2}^{N-1} X(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T} X^{-1}(\tau)\widehat{D}_k(\Delta_N,\tau)d\tau\lambda_k+$$

$$+hC\left(I+X(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T} X^{-1}(\tau)\Big(A(\tau)+\widehat{D}_N(\Delta_N,\tau)\Big)\,d\tau\right)\lambda_N=$$

$$=hd-hCX(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T} X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau)\,d\tau, \tag{17}$$

$$\left[I+X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} X^{-1}(\tau)\Big(A(\tau)+\widehat{D}_p(\Delta_N,\tau)\Big)d\tau\right]\lambda_p-$$

$$-\left[I-X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} X^{-1}(\tau)\widehat{D}_{p+1}(\Delta_N,\tau)d\tau\right]\lambda_{p+1}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p\\ j\neq p+1}}^{N} X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} X^{-1}(\tau)\widehat{D}_k(\Delta_N,\tau)\,d\tau\lambda_j=$$

$$=-X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p} X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau)\,d\tau, \qquad p=\overline{1,N-1}, \tag{18}$$

где I — единичная матрица размерности n.

Соответствующую левой части систем (17), (18) матрицу размерности $nN\times nN$ обозначим через $Q^*(\Delta_N)$, и эту систему запишем в виде

$$Q^*(\Delta_N)\lambda=-F^*(\Delta_N), \qquad \lambda\in R^{nN}, \tag{19}$$

где

$$F^*(\Delta_N)=\left(-hd+hCX(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T}X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau)\,d\tau, X(t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{0}^{t_1}X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau))\,d\tau,\ldots,X(t_{N-1})\int\limits_{t_{N-2}}^{t_{N-1}}X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau))\,d\tau\right)\in R^{nN}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\Delta_N\in\sigma([0,T])$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *вектор* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_N^*)\in R^{nN}$, *составленный из значений решения* $x^*(t)$ *задачи* (1), (2) *в точках разбиения* $\lambda_r^*=x^*(t_{r-1})$, $r=\overline{1,N}$, *удовлетворяет системе* (19);

2) *если* $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)\in R^{nN}$ *является решением системы уравнений* (19), *а система функций* $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ \ldots,\widetilde{u}_N(t))$ — *решением специальной задачи Коши* (4), (5) *при* $\lambda_r=\widetilde{\lambda}_r$, $r=\overline{1,N}$, *то функция* $\widetilde{x}(t)$, *определяемая равенствами* $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}_r+\widetilde{u}_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T)=\widetilde{\lambda}_N+\lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_N(t)$, *является решением задачи* (1), (2).

Доказательство. 1. Пусть $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2). Тогда пара $((\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_N^*),$ $(u_1^*(t),u_2^*(t),\ldots,u_N^*(t))$ с элементами $\lambda_r^*=x^*(t_{r-1})$, $u_r^*(t)=x^*(t)-x^*(t_{r-1})$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,N}$, будет решением эквивалентной краевой задачи с параметрами (4) – (7). Учитывая, что $\Delta_N\in\sigma([0,T])$, и повторяя вышеприведенные рассуждения, убеждаемся, что $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots$ $\ldots,\lambda_N^*)\in R^{nN}$ удовлетворяет системе уравнений (19).

2. Пусть $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)\in R^{nN}$ — решение системы уравнений (19). Поскольку $\Delta_N\in$ $\in\sigma([0,T])$, согласно лемме 1 специальная задача Коши (4), (5) имеет единственное решение при любых $\lambda\in R^{nN}$ и $f(t)\in C([0,T],R^n)$. Ее решение при $\lambda=\widetilde{\lambda}=(\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\ldots,\widetilde{\lambda}_N)$ обозначим через $\widetilde{u}[t]=(\widetilde{u}_1(t),\widetilde{u}_2(t),\ldots,\widetilde{u}_N(t))$. Покажем, что пара $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$ является решением задачи (4) – (7). В силу выбора $\widetilde{u}[t]$ по $\widetilde{\lambda}$ выполняются (4), (5). Если $\widetilde{\lambda}\in R^{nN}$ удовлетворяет (19), то справедливо уравнение

$$B\widetilde{\lambda}_1+C\widetilde{\lambda}_N+C\left\{X(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T}X^{-1}(\tau)A(\tau)\,d\tau\widetilde{\lambda}_N+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{N}X(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T}X^{-1}(\tau)\widehat{D}_j(\Delta_N,\tau)\,d\tau\widetilde{\lambda}_j+X(T)\int\limits_{t_{N-1}}^{T}X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau))\,d\tau\right\}=d.$$

Теперь, учитывая представление (16), справедливое для пары $(\widetilde{\lambda},\widetilde{u}[t])$, убеждаемся, что выражение в фигурной скобке равно $\lim_{t\to T-0}\widetilde{u}_N(t)$ и выполняется краевое условие (6). Для $\widetilde{\lambda}\in R^{nN}$ справедливы также следующие равенства:

$$\widetilde{\lambda}_p+\left(X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}X^{-1}(\tau)A(\tau)\,d\tau\widetilde{\lambda}_p+\sum_{j=1}^{N}X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}X^{-1}(\tau)\widehat{D}_j(\Delta_N,\tau)\,d\tau\widetilde{\lambda}_j+\right.$$

$$\left.+X(t_p)\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}X^{-1}(\tau)\widehat{F}(\Delta_N,\tau)\,d\tau\right)-\widetilde{\lambda}_{p+1}=0,\qquad p=\overline{1,N-1}.$$

Отсюда на основе (16) следует выполнение условий непрерывности (7). В силу эквивалентности задач (1), (2) и (4)–(7) функция $\widetilde{x}(t)$, построенная с помощью пары $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, будет решением задачи (1), (2).

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Если при разбиении* $\Delta_N \in \sigma([0,T])$ *матрица* $Q^*(\Delta_N)\colon R^{nN} \to R^{nN}$ *обратима, то задача* (1), (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Возьмем $\Delta_N \in \sigma([0,T])$ и для заданных $f(t) \in C([0,T], R^n)$, $d \in R^n$ построим систему (19). Использовав обратимость $(nN \times nN)$-матрицы $Q^*(\Delta_N)$, найдем ее единственное решение $\lambda^* = -(Q^*(\Delta_N))^{-1} F^*(\Delta_N)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*)) \in R^{nN}$. Решая специальную задачу Коши (4), (5) при $\lambda_r = \lambda_r^*$, $r = \overline{1,N}$, получаем систему функций $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t))$. Согласно лемме 3 функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N^*(t)$, будет решением задачи (1), (2).

Установим единственность решения. Пусть задача (1), (2) кроме $x^*(t)$ имеет некоторое другое решение $\widetilde{x}(t)$. Тогда пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, составленная по функции $\widetilde{x}(t)$, также является решением краевой задачи с параметром (4)–(7). По лемме 3 как λ^*, так и $\widetilde{\lambda}$ удовлетворяют системе уравнений (19):

$$Q^*(\Delta_N)\lambda^* = -F^*(\Delta_N), \qquad Q^*(\Delta_N)\widetilde{\lambda} = -F^*(\Delta_N).$$

Отсюда вследствие обратимости матрицы $Q^*(\Delta_N)$ следует равенство $\lambda^* = \widetilde{\lambda}$. Единственность решения специальной задачи Коши (4), (5) при $\Delta_N \in \sigma([0,T])$ обеспечивает выполнение равенств $u_r^*(t) = \widetilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $\lim_{t\to T-0} u_N^*(t) = \lim_{t \to T-0} \widetilde{u}_N(t)$. Поэтому $x^*(t) = \widetilde{x}(t)$ для всех $t \in [0,T]$.

Теорема 1 доказана.

Определение 2. *Задача* (1), (2) *называется однозначно разрешимой, если для любой пары* $(f(t), d)$, *где* $f(t) \in C([0,T], R^n)$, $d \in R^n$, *она имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Для однозначной разрешимости задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $Q^*(\Delta_N)\colon R^{nN} \to R^{nN}$ *была обратимой для любого* $\Delta_N \in \sigma([0,T])$.

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем $\Delta_N \in \sigma([0,T])$ и построим $(nN \times nN)$-матрицу $Q^*(\Delta_N)$. Предположим, что существует такое $\Delta_{\widetilde{N}}$, принадлежащее $\sigma([0,T])$, при котором матрица $Q^*(\Delta_{\widetilde{N}})$ не имеет обратную. Тогда однородная система уравнений

$$Q^*(\Delta_{\widetilde{N}})\lambda = 0 \tag{20}$$

имеет ненулевое решение $\widetilde{\lambda} = \left(\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N\right) \in R^{n\widetilde{N}}$.

Как видно из (17), (18), для однородной краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)\,ds, \qquad Bx(0) + Cx(T) = 0 \tag{21}$$

правая часть (19) — вектор $F^*(\Delta_N) = 0$ и система (19) имеет вид (20). Поэтому согласно лемме 3 функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{\lambda}_r + \widetilde{u}_r(t), \qquad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = \overline{1,\widetilde{N}}, \qquad \widetilde{x}(T) = \widetilde{\lambda}_{\widetilde{N}} + \lim_{t \to T-0} \widetilde{u}_{\widetilde{N}}(t),$$

где система функций $\widetilde{u}[t] = \big(\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_{\widetilde{N}}(t)\big)$ — решение специальной задачи Коши (4), (5) при $\lambda_r = \widetilde{\lambda}_r$, $r = \overline{1, \widetilde{N}}$, $f(t) = 0$, будет ненулевым решением краевой задачи (21). Это противоречит однозначной разрешимости задачи (1), (2), так как задача (21) кроме построенного ненулевого решения $\widetilde{x}(t)$ имеет и решение $x(t) = 0$.

Достаточность условий теоремы для однозначной разрешимости задачи (1), (2) следует из теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Матрица $Q^*(\Delta_N)$ существует при любом $\Delta_N \in \sigma([0,T])$, и справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Возможны лишь два случая*:

1) $\det Q^*(\Delta_N) \neq 0$ *для всех* $\Delta_N \in \sigma([0,T])$;

2) $\det Q^*(\Delta_N) = 0$ *для всех* $\Delta_N \in \sigma([0,T])$.

В первом случае задача (1), (2) *однозначно разрешима. Во втором случае задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда вектор* $F^*(\Delta_N) \in R^{nN}$, *составленный из заданной пары* $(f(t), d)$, $f(t) \in C([0,T], R^n)$, $d \in R^n$, *ортогонален ядру транспонированной матрицы* $(Q^*(\Delta_N))'$, *т. е. для любого* $\Theta \in \mathrm{Ker}\,(Q^*(\Delta_N))'$ *справедливо равенство* $(F^*(\Delta_N), \Theta) = 0$, *где* $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* R^{nN}.

Доказательство. Если при некотором $\Delta_{\widehat{N}} \in \sigma([0,T])$ имеет место неравенство $\det Q^*(\Delta_{\widehat{N}}) \neq 0$, то матрица $Q^*(\Delta_{\widehat{N}})$ обратима и по теореме 1 задача (1), (2) имеет единственное решение для любой пары $(f(t), d)$, $f(t) \in C([0,T], R^n)$, $d \in R^n$. Тогда согласно теореме 2 матрица $Q^*(\Delta_N)$ обратима, тем самым выполнено неравенство $\det Q^*(\Delta_N) \neq 0$ при всех $\Delta_N \in \sigma([0,T])$.

Предположим, что $\det Q^*(\Delta_{\widetilde{N}}) = 0$ при некотором $\Delta_{\widetilde{N}} \in \sigma([0,T])$ и существует $\Delta_{N_*} \in \sigma([0,T])$, при котором $\det Q^*(\Delta_{N_*}) \neq 0$. Тогда по доказанному выше неравенству $\det Q^*(\Delta_{\widetilde{N}}) \neq 0$. Это противоречит введенному предположению. Поэтому в этом случае $\det Q^*(\Delta_N) = 0$ для всех $\Delta_N \in \sigma([0,T])$.

Теорема 1 обеспечивает однозначную разрешимость задачи (1), (2) в первом случае.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что задача (1), (2) имеет решение. Тогда по лемме 3 система линейных уравнений (19) имеет решение. Это возможно если только вектор $F^*(\Delta_N)$, составленный по $f(t)$, d, ортогонален ядру транспонированной матрицы $(Q^*(\Delta_N))'$. Пусть $F^*(\Delta_N) \perp \mathrm{Ker}(Q^*(\Delta_N))'$. Тогда система линейных уравнений относительно параметров (19) разрешима и согласно лемме 3 задача (1), (2) имеет решение.

Теорема 3 доказана.

Нахождение решения задачи (1), (2) осуществляется следующим образом.

Из множества $\sigma([0,T])$ выбирается разбиение интервала Δ_N и по исходным данным задачи (1), (2) составляются $(nN \times nN)$-матрица $Q^*(\Delta_N)$ и nN-вектор $F^*(\Delta_N)$. Если матрица $Q^*(\Delta_N)$ обратима, то из системы (19) определяется единственное ее решение $\lambda^* = -(Q^*(\Delta_N))^{-1} F^*(\Delta_N)$.

Решая специальную задачу Коши (4), (5) при $\lambda = \lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, находим систему функций $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t))$.

Равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1, N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N^*(t)$ определяем решение задачи (1), (2).

Если матрица $Q^*(\Delta_N)$ не имеет обратную, то находятся все решения однородной системы

$$(Q^*(\Delta_N))' \cdot \mu = 0$$

и составляется $\mathrm{Ker}(Q^*(\Delta_N))'$. Проверяется ортогональность вектора $F^*(\Delta_N)$ ядру $(Q^*(\Delta_N))'$. Если это условие выполняется, то система (20) имеет решение. Для каждого решения этой системы находится соответствующее решение специальной задачи Коши (4), (5) и по ним определяется решение исходной задачи (1), (2).

Если условие ортогональности $F^*(\Delta_N)$ к $\mathrm{Ker}(Q^*(\Delta_N))'$ не выполняется, то решение задачи (1), (2) не существует.

4. Интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром. Рассмотрим случай, когда ядро интегрального члена уравнения (1) вырождено, т. е.

$$K(t,s)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\cdot\psi_k(s), \tag{22}$$

где $(n\times n)$-матрицы $\varphi_k(t),\ \psi_k(s)$ непрерывны на $[0,T]$. Здесь при разбиении Δ_N с шагом $h=\dfrac{T}{N}>0$ решение функционального уравнения (11) имеет вид

$$\Phi(\Delta_N,t)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)u_j(s)\,ds.$$

Введем обозначение $\mu_k=\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)u_j(s)\,ds$ и систему интегральных уравнений (8) запишем в виде

$$u_r(t)=\sum_{k=1}^{m}X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\varphi_k(\tau)\,d\tau\mu_k+$$

$$+X(t)\int\limits_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\left(A(\tau)\lambda_r+\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)\,ds\lambda_j+f(\tau)\right)d\tau, \tag{23}$$

$$t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,N}.$$

Умножая обе части (4) на $\psi_p(t)$, интегрируя на интервале $[t_{r-1},t_r]$ и суммируя по r, получаем систему линейных уравнений относительно $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)\in R^{nm}$

$$\mu_p=\sum_{k=1}^{m}G_{p,k}(\Delta_N)\cdot\mu_k+\sum_{r=1}^{N}V_{p,r}(\Delta_N)\lambda_r+\Psi_p(f,\Delta_N),\qquad p=\overline{1,m}, \tag{24}$$

с $(n\times n)$-матрицами

$$G_{p,k}(\Delta_N)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)X(\tau)\int\limits_{t_{r-1}}^{\tau}X^{-1}(s)\varphi_k(s)\,dsd\tau,$$

$$V_{p,r}(\Delta_N) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X(\tau) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(s) A(s)\, ds d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_p(\tau) X(\tau) \int\limits_{t_{j-1}}^{\tau} X^{-1}(\tau_1) \varphi_k(\tau_1)\, d\tau_1 d\tau \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s)\, ds$$

и векторами размерности n

$$\Psi_p(f, \Delta_N) = \sum_{r=1}^{N} \int\limits_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) X(\tau) \int\limits_{t_{r-1}}^{\tau} X^{-1}(s) f(s)\, ds d\tau.$$

По матрицам $G_{p,k}(\Delta_N)$, $V_{p,r}(\Delta_N)$ составим матрицы $G(\Delta_N) = (G_{p,k}(\Delta_N))$, $p, k = \overline{1, m}$, $V(\Delta_N) = (V_{p,r}(\Delta_N))$, $p = \overline{1, m}$, $r = \overline{1, N}$, размерности $nm \times nm$, $nm \times nN$ соответственно, и систему (24) запишем в виде

$$(I - G(\Delta_N))\mu = V(\Delta_N)\lambda + \Psi(f, \Delta_N), \tag{25}$$

где I — единичная матрица размерности nm,

$$\Psi(f, \Delta_N) = \Big(\Psi_1(f, \Delta_N), \Psi_2(f, \Delta_N), \ldots, \Psi_m(f, \Delta_N) \Big) \in R^{nm}.$$

Итак, если ядро интегрального члена интегро-дифференциального уравнения имеет вид (22), нахождение вектор-функции $\Phi(\Delta_N, t)$ сводится к нахождению решения системы (25) относительно вектора $\mu \in R^{nm}$.

Если через $g(m, [0, T])$ обозначить множество разбиений Δ_N, при котором матрица $(I - G(\Delta_N))$ обратима, то нетрудно установить, что для интегро-дифференциального уравнения (1) с ядром (22) справедливо равенство $g(m, [0, T]) = \sigma([0, T])$.

Таким образом, если ядро интегрального члена в (1) вырождено, то существование только тривиального решения интегрального уравнения (13) эквивалентно обратимости $(nm \times nm)$-матрицы $(I - G(\Delta_N))$ при выбранном Δ_N.

5. Пример. Рассмотрим на $[0, 1]$ двухточечную краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = -ax + \alpha \int\limits_0^1 x(s)\, ds + at^2 + 2t - \frac{\alpha}{3}, \tag{26}$$

$$x(0) - bx(1) = -b, \tag{27}$$

где a, α, b — произвольные числа.

Пусть имеют место неравенства

$$a \neq 0, \qquad \frac{\alpha}{a}\Big[1 + \frac{1}{a}\big(e^{-a} - 1\big)\Big] \neq 1, \tag{28}$$

обеспечивающие регулярность Δ_1.

Обозначив $x(0)$ через λ и выполнив замену $u(t) = x(t) - \lambda$, получим эквивалентную краевую задачу с параметром

$$\frac{du}{dt} = -a(u+\lambda) + \alpha \int_0^1 [u(s)+\lambda]ds + at^2 + 2t - \frac{\alpha}{3}, \tag{29}$$

$$u(0) = 0, \tag{30}$$

$$\lambda - b\lambda - bu(1) = -b. \tag{31}$$

Задача Коши (29), (30) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}d\tau\alpha\int_0^1 u(s)\,ds+$$

$$+e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}d\tau(\alpha-a)\lambda + e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}\Big(a\tau^2+2\tau-\frac{\alpha}{3}\Big)d\tau. \tag{32}$$

Введем обозначение $\mu = \displaystyle\int_0^1 u(s)\,ds$. Проинтегрировав обе части (32), получим

$$\mu = \frac{\alpha}{a}\left[1+\frac{1}{a}\big(e^{-a}-1\big)\right]\mu + \frac{\alpha-a}{a}\left[1+\frac{1}{a}\big(e^{-a}-1\big)\right]\lambda + \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{3a}\left[1+\frac{1}{a}\big(e^{-a}-1\big)\right]. \tag{33}$$

В силу (28) μ из (33) определяется единственным образом. Заменив в (32) интеграл от функции $u(s)$ соответствующим выражением из (33), после некоторых вычислений установим, что

$$u(t) = \frac{a(\alpha-a)}{a^2-\alpha(a+e^{-a}-1)}\big(1-e^{-at}\big)\lambda + t^2. \tag{34}$$

Подставив в краевое условие (31) правую часть (34) при $t=1$, будем иметь

$$Q(\Delta_1)\cdot\lambda = 0, \tag{35}$$

где $Q(\Delta_1) = 1 - b\left[1+\dfrac{a(\alpha-a)(1-e^{-a})}{a^2-\alpha(a+e^{-a}-1)}\right]$.

При $Q(\Delta_1)\neq 0$ уравнение (35) имеет единственное решение $\lambda = 0$, а функция $x(t) = t^2$ является единственным решением краевой задачи (26), (27). При $Q(\Delta_1) = 0$ краевая задача (26), (27) имеет семейство решений

$$x(t) = \frac{a(\alpha-a)}{a^2-\alpha(a+e^{-a}-1)}\big(1-e^{-at}\big)C + C + t^2,$$

где C — произвольное число.

Теперь рассмотрим случай, когда $a\neq 0$ и имеет место равенство

$$\frac{\alpha}{a}\left[1+\frac{1}{a}\big(e^{-a}-1\big)\right] = 1. \tag{36}$$

При выполнении этого равенства Δ_1 не является регулярным.

Интервал $[0,1]$ разобьем на две части с шагом $h = 0{,}5$ и исследуем эквивалентную краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_1}{dt} = -a(u_1+\lambda_1) + \alpha\left[\int\limits_0^{0,5} u_1(s)\,ds + \frac{1}{2}\lambda_1 + \int\limits_{0,5}^{1} u_2(s)\,ds + \frac{1}{2}\lambda_2\right] +$$

$$+at^2 + 2t - \frac{\alpha}{3}, \qquad t \in [0; 0{,}5), \tag{37}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -a(u_2+\lambda_2) + \alpha\left[\int\limits_0^{0,5} u_1(s)\,ds + \frac{1}{2}\lambda_1 + \int\limits_{0,5}^{1} u_2(s)\,ds + \frac{1}{2}\lambda_2\right] +$$

$$+at^2 + 2t - \frac{\alpha}{3}, \qquad t \in [0{,}5; 1), \tag{38}$$

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0{,}5) = 0, \tag{39}$$

$$\lambda_1 - b\lambda_2 - b\lim_{t\to 1-0} u_2(t) = -b, \tag{40}$$

$$\lambda_1 + \lim_{t\to 0,5-0} u_1(t) - \lambda_2 = 0. \tag{41}$$

Введем обозначение $\mu = \int_0^{0,5} u_1(s)\,ds + \int_{0,5}^1 u_2(s)\,ds$ и из (37)–(39) получим

$$u_1(t) = e^{-at}\int\limits_0^t e^{a\tau}d\tau\alpha\mu + e^{-at}\int\limits_0^t e^{a\tau}d\tau\left[-a\lambda_1 + \frac{\alpha}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\right] +$$

$$+e^{-at}\int\limits_0^t e^{a\tau}\left(a\tau^2 + 2\tau - \frac{\alpha}{3}\right)d\tau, \qquad t \in [0; 0{,}5), \tag{42}$$

$$u_2(t) = e^{-at}\int\limits_{0,5}^t e^{a\tau}d\tau\alpha\mu + e^{-at}\int\limits_{0,5}^t e^{a\tau}d\tau\left[-a\lambda_2 + \frac{\alpha}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\right] +$$

$$+e^{-at}\int\limits_{0,5}^t e^{a\tau}\left(a\tau^2 + 2\tau - \frac{\alpha}{3}\right)d\tau, \qquad t \in [0{,}5; 1). \tag{43}$$

Из (42), (43) вытекает уравнение

$$\mu = \frac{\alpha}{a}\left[1 + \frac{2}{a}\left(e^{-a/2}-1\right)\right]\mu + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(e^{-a/2}-1\right)\right](\alpha - a)(\lambda_1+\lambda_2) +$$

$$+\frac{1}{3}\left\{1 - \frac{\alpha}{a}\left[1 + \frac{2}{a}\left(e^{-a/2}-1\right)\right]\right\} + \frac{1}{4a}\left(e^{-a/2}-1\right). \tag{44}$$

Нетрудно установить, что из (36) следует неравенство

$$\frac{\alpha}{a}\left[1+\frac{2}{a}\big(e^{-a/2}-1\big)\right]\neq 1. \tag{45}$$

Поскольку (45) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (44), то Δ_2 — регулярное разбиение интервала $[0,1]$.

Из (44) найдем μ и, подставив соответствующее ему выражение в (42), (43), получим представление $u_1(t)$, $u_2(t)$ через λ_1, λ_2. Используя (40), (41), имеем систему уравнений

$$Q(\Delta_2)\cdot\lambda=-F, \qquad \lambda\in R^2. \tag{46}$$

Элементы матрицы $Q(\Delta_2)=(q_{ij})$, $i,j=1,2$, и вектора $F=(F_i)$, $i=1,2$, определяются равенствами

$$q_{11}=1-b\cdot\beta, \qquad q_{12}=-b\cdot e^{-a/2}-b\cdot\beta,$$

$$q_{21}=e^{-a/2}+\beta, \qquad q_{22}=-1+\beta,$$

$$F_1=\frac{b}{4}\big(e^{-a/2}+\beta\big) \qquad F_2=\frac{1}{4}\big(1-\beta\big),$$

где $\beta=\dfrac{\alpha(1-e^{-a/2})^2}{a^2-\alpha(a+2e^{-a/2}-2)}$.

Если $\det Q(\Delta_2)\neq 0$, то система (46) имеет единственное решение $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\dfrac{1}{4}$, а решением задачи (26), (27) является только $x(t)=t^2$.

Если $\det Q(\Delta_2)=0$, то несложные вычисления показывают, что F ортогонален к $\mathrm{Ker}(Q(\Delta_2))'$ и краевая задача (26), (27) имеет семейство решений. Вследствие громоздкости выражения, приведем его для случая $a=0$. В этом случае регулярность разбиения зависит только от α.

Если $\alpha\neq 2$, то Δ_1 будет регулярным и уравнение относительно λ имеет вид

$$\left(1-b\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\lambda=0.$$

При $1-b\dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}\neq 0$ задача (26), (27) имеет единственное решение $x(t)=t^2$.

При $1-b\dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}=0$ задача (26), (27) имеет семейство решений

$$x(t)=\left(1+\frac{2\alpha t}{2-\alpha}\right)C+t^2,$$

где C — произвольное число.

При $a=0$, $\alpha=2$ регулярным будет разбиение Δ_2.

Система уравнений относительно вводимых параметров имеет вид

$$(1-b)\lambda_1-2b\lambda_2=-\frac{1}{2}b,$$

$$2\lambda_1=0.$$

Если $b \neq 0$, то эта система имеет единственное решение $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{4}$, а задача (26), (27) — единственное решение $x(t) = t^2$.

Если $b = 0$, то задача (26), (27) имеет семейство решений

$$x(t) = 2t \cdot C + t^2 - \frac{1}{2}t,$$

где C — произвольное число.

Автор выражает искреннюю признательность академику А. М. Самойленко за предложенный пример.

1. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. – 328 с.
2. *Виграненко Т. И.* Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Зап. Ленингр. горн. ин-та. – 1956. – **33**, вып. 3. – С. 177 – 187.
3. *Кривошеин Л. Е.* Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1962. – 184 с.
4. *Шароглазов В. С., Васильев В. В.* Об одном методе приближенного решения краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. и интегр. уравнения. – 1975. – Вып. 3. – С. 212 – 217.
5. *Артыков А. Ж.* Условия разрешимости краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – 1994. – Вып. 25. – С. 110 – 113.
6. *Liz E., Nieto J. J.* Boundary value problems for second order integro-differential equations of Fredholm type // J. Comput. and Appl. Math. – 1996. – **72**. – P. 215 – 225.
7. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Проекційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями та керуванням // Нелінійні коливання. – 2008. – **11**, № 2. – С. 208 – 216.
8. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Побудова розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням проекційно-ітеративним методом // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 83 – 91.
9. *Yulan W., Chaolu T., Jing P.* New algorithm for second order boundary value problems of integro-differential equation // J. Comput. and Appl. Math. – 2009. – **229**. – P. 1 – 6.
10. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, № 4. – С. 550 – 564.
11. *Pedas A., Tamme E.* A discrete collocation method for Fredholm integro-differential equations with weakly singular kernels // Appl. Numer. Math. – 2011. – **61**. – P. 738 – 751.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: WSP, 2004. – 317 p.
13. *Некрасов А. И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. – 1934. – Вып. 190. – С. 1 – 25.
14. *Джумабаев Д. С.* Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2010. – **50**, № 7. – С. 1209 – 1221.
15. *Джумабаев Д. С.* Об одном алгоритме нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2013. – **53**, № 6. – С. 914 – 937.
16. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* О признаках однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2013. – **49**, № 9. – С. 1125 – 1140.
17. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – **29**, № 1. – С. 50 – 66.

Получено 23.09.13,
после доработки — 03.12.13