УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

МЕЖОВІ ВЕРСІЇ ТЕОРЕМИ ВОРПІЦЬКОГО ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

For a two-dimensional continued fraction, we prove a new generalization of the Worpitzky theorem and propose the limit sets for Worpitzky-like theorems when the element sets of a two-dimensional continued fraction are replaced by their boundaries.

Для двумерной непрерывной дроби доказано еще одно обобщение теоремы Ворпицкого и предложены граничные множества в теоремах типа Ворпицкого, когда множества элементов двумерной непрерывной дроби заменены их границами.

Незважаючи на те, що відому теорему збіжності неперервних дробів запропонував Ю. Ворпіцький ще у 1865 р., нові доведення, узагальнення, застосування цієї теореми знаходимо до сьогодні [1 – 3]. На випадок гіллястих ланцюгових дробів ця теорема узагальнена Д. І. Боднаром [4, с. 93], гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними — О. Є. Баран [5], двовимірних неперервних дробів — Х. Й. Кучмінською [6, 7], О. М. Сусь [8], інтегральних ланцюгових дробів — М. С. Сявавком [9, с. 25].

Сформулюємо теорему Ворпіцького у формі більш загальній, ніж класична [3, с. 135].

Теорема Ворпіцького [10, с. 136]**.** *Нехай* $\rho \in (0,1/2]$ *— деяке додатне число і у неперервному дробі*

$$\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1+\vdots}}} = \mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{1} \tag{1}$$

всі елементи a_i, $i = 1,2,\ldots$, *— комплексні числа, що задовольняють нерівності*

$$|a_i| \leq \rho(1-\rho), \quad i = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Тоді неперервний дріб (1) *збігається і його значення належить кругу* $|w| \leq \rho$.

Х. Воделанд поставив таке питання: що відбуватиметься з множиною значень неперервного дробу (1), якщо умову (2) у теоремі Ворпіцького замінити умовою $|a_i| = \rho(1-\rho)$, $i = 1,2,\ldots$? Відповідаючи на це питання, Х. Воделанд довів [10], що множиною значень для неперервного дробу (1) є кільце $\rho\dfrac{1-\rho}{1+\rho} \leq |w| \leq \rho$. У класичному випадку теореми $(\rho = 1/2)$, тобто коли всі $|a_i| = 1/4$, $i = 1,2,\ldots$, цим кільцем є $1/6 \leq |w| \leq 1/2$.

Це ж питання можна поставити і щодо множин значень багатовимірних узагальнень неперервного дробу, таких як, наприклад, гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) чи двовимірний неперервний дріб (ДНД).

Виявилося, що для ГЛД відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1 [11, с. 27]. *Нехай* $\rho \in (0,1/2]$ *і* $N \geq 2$ *— ціле число. Тоді множиною всіх можливих значень сім'ї ГЛД*

$$1+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i_1}}{1+\sum_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i_1 i_2}}{1+\sum_{i_3=1}^{N}\cfrac{a_{i_1 i_2 i_3}}{1+\ddots}}} = 1+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}}{1},$$

де $a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ *— комплексні числа*, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ *— мультиіндекс*, $a_{i(k)}$ *задовольняють умову* $a_{i(k)} = \dfrac{\rho(1-\rho)}{N}$, *є круг* $|w| \le \rho$.

Отже, у цьому випадку множина значень ГЛД не змінюється, якщо його елементи належать межі круга.

Розглянемо це питання для ДНД [12]

$$\mathop{D}_{i=0}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = 1+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i+j,i}}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}}{1}, \tag{3}$$

елементи якого є ненульовими комплексними (дійсними) числами чи функціями.

Наведемо основні означення.

Скінченний ДНД

$$f_n := \frac{A_n}{B_n} = \mathop{D}_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i,i}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

$$\Phi_i^{(m)} := 1+\mathop{D}_{j=1}^{m}\frac{a_{i+j,i}}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{m}\frac{a_{i,i+j}}{1}, \qquad \Phi_i^{(0)} = 1, \tag{5}$$

де $a_{i,i}$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, називається n-м наближенням або n-м підхідним дробом ДНД (3), A_n, B_n — чисельником і знаменником n-го наближення f_n або n-м підхідним чисельником і n-м підхідним знаменником відповідно.

Скінченні звичайні неперервні дроби

$$\begin{gathered} Q_{i+k,i}^{(0)} := 1, \quad Q_{i+k,i}^{(m+1)} := 1+\frac{a_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(m)}}, \qquad i,m = 0,1,\ldots, \quad k = 1,2,\ldots, \\ Q_{i,i+k}^{(0)} := 1, \quad Q_{i,i+k}^{(m+1)} := 1+\frac{a_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(m)}}, \qquad i,m = 0,1,\ldots, \quad k = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{6}$$

називаються одновимірними залишками скінченного дробу (5), а ДНД

$$Q_i^{(0)} := 1, \qquad Q_i^{(m+1)} := 1+\frac{a_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{(m)}}+\frac{a_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{(m)}}+\frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}}, \quad i,m = 0,1,\ldots, \tag{7}$$

називається загальним i-м залишком ДНД (4).

Для різниці між n- і m-м наближеннями ДНД (3) справджується формула [12, с. 45]

$$f_n - f_m = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i (\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}) \prod_{j=0}^{i} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{i} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} + \frac{(-1)^m \prod_{j=0}^{m} a_{j,j}}{\prod_{j=0}^{m-1} Q_j^{(n-1-j)} Q_j^{(m-1-j)}} \frac{1}{Q_m^{(n-1-m)}}. \quad (8)$$

Для ДНД (3) встановлено ознаку типу Ворпіцького [13] при умові, що всі $a_{i,j}$ обмежені: $|a_{i,j}| \le \frac{1}{2}\rho(1-\rho)$, $0 < \rho \le 1/2$. Доведемо теорему про її межову версію.

Теорема 2. *Нехай* ρ *— дійсне число з* $(0,1/2]$ *і* F_ρ *— сім'я ДНД* (3), *елементи яких задовольняють умови*

$$|a_{i,j}| = \frac{1}{2}\rho(1-\rho), \quad i, j \ge 1. \quad (9)$$

Тоді множина всіх можливих значень f *ДНД* (3) *з* F_ρ *є кільцем* A_ρ:

$$R\frac{\rho(1-\rho)}{4R-\rho(1-\rho)} \le |f| \le R, \qquad R = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2\rho(1-\rho)} + \sqrt{1-4\rho(1-\rho)}\right). \quad (10)$$

Доведення. Нехай f_0 — одне з можливих значень ДНД. Тоді всі значення f такі, що $|f| = |f_0|$, є можливими значеннями ДНД з F_ρ. Отже, множиною значень таких дробів буде круг чи кільце з центром у початку координат. З теореми типу Ворпіцького [13, с. 182] випливає, що цей круг чи кільце належить кругу $|f| \le R$, $R = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2\rho(1-\rho)} + \sqrt{1-4\rho(1-\rho)}\right)$.

Спочатку доведемо, що множина всіх значень належить кільцю A_ρ. Кожний двовимірний дріб з F_ρ можна записати у вигляді

$$\frac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)e^{i\theta}}{1+\omega}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

де $\omega = q + g$, $g \in F_\rho$, а $q = \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,0}}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{0,j}}{1}$.

Оскільки $g \in F_\rho$, то $|g| \le R$. З урахуванням умов (9) і того факту, що

$$\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}\right) = \cfrac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{1+\cfrac{-\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{1+\cfrac{-\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{1+\vdots}}} = \frac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{1} - \frac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{1} - \ldots,$$

маємо

$$|1+\omega| \geq \sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-R, \qquad |1+\omega| \leq 2-\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}+R,$$

тобто

$$|f| \leq \frac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-R} = \frac{\rho(1-\rho)}{\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}} = R,$$

$$|f| \geq \frac{\frac{1}{2}\rho(1-\rho)}{2-\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}+R} = \frac{\rho(1-\rho)}{4-\left(\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}\right)} = \frac{R\rho(1-\rho)}{4R-\rho(1-\rho)}$$

і права частина другої нерівності також належить F_ρ.

Тепер покажемо, що кільце A_ρ належить множині значень ДНД з F_ρ. Оцінимо $|\omega|$:

$$|\omega| \leq \frac{2\rho(1-\rho)}{1+\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}}+R = 1-\frac{\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}}{2} = r.$$

За допомогою відображення $\xi = 1/(1+\omega)$ коло $|\omega| = r$ відображається на коло

$$\left|\xi-\frac{1}{1-r^2}\right| = \frac{r}{1-r^2}.$$

Тоді, покладаючи $\xi \mapsto \frac{1}{2}\rho(1-\rho)e^{i\theta}\xi$, для всіх $\theta \in [0, 2\pi)$ отримуємо всі точки кільця (10), враховуючи, що

$$\frac{1}{2}\rho(1-\rho)\frac{1}{1-r} = \frac{\rho(1-\rho)}{\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}} = R,$$

$$\frac{1}{2}\rho(1-\rho)\frac{1}{1+r} = \frac{\rho(1-\rho)}{4-\left(\sqrt{1-2\rho(1-\rho)}-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}\right)} = \frac{R\rho(1-\rho)}{4R-\rho(1-\rho)}.$$

Отже, A_ρ належить множині значень ДНД із F_ρ.

Теорему доведено.

У класичному випадку $(\rho = 1/2)$ кільцем є $\left(8+\sqrt{2}\right)/124 \le |f| \le 1/2\sqrt{2}$.

Розглянемо ще одне узагальнення теореми Ворпіцького, для якого також застосуємо межову версію.

Теорема 3. *Нехай елементи ДНД* (3) *задовольняють умови*

$$\begin{gathered}\left|a_{i+1,i}\right|+\left|a_{i,i+1}\right|+\left|a_{i+1,i+1}\right| \le \rho(1-\rho) \le 1/4, \quad \left|a_{0,0}\right| \le \rho(1-\rho), \\ \left|a_{i+j,i}\right| \le \rho(1-\rho) \le \frac{1}{4}, \quad \left|a_{i,i+j}\right| \le \rho(1-\rho) \le 1/4, \quad j \ge 2, \quad 0<\rho \le 1/2.\end{gathered} \tag{11}$$

Тоді:

1) *ДНД* (3) *є абсолютно збіжним;*

2) *справджуються оцінки швидкості збіжності*

$$|f-f_m| \le (1-\rho)\frac{(1-t)t^m}{1-t^{m+1}}, \qquad m \ge 1, \quad 0<\rho(1-\rho)<\frac{1}{4}, \tag{12}$$

$$|f-f_m| \le \frac{1}{2(m+1)}, \qquad m \ge 1, \quad \rho(1-\rho)=\frac{1}{4}, \tag{13}$$

де f — *значення нескінченного ДНД* (3), f_m — *його* m*-те наближення*, $t = \dfrac{1-\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}}{1+\sqrt{1-4\rho(1-\rho)}} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$;

3) *значення ДНД* (3) *і всіх його наближень належать області*

$$|z| \le \rho. \tag{14}$$

Доведення. Для ДНД (3) можна записати мажорантний дріб

$$\frac{|a_{0,0}|}{\hat{\Phi}_0 + \mathop{D}_{i=1}^{\infty}\dfrac{-|a_{i,i}|}{\hat{\Phi}_i}}, \qquad \hat{\Phi}_i = 1+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{-|a_{i+j,i}|}{1}+\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{-|a_{i,i+j}|}{1}. \tag{15}$$

Це означає, що наближення цих дробів задовольняють співвідношення $|f_n - f_m| \le M|g_n - g_m|$, де g_n — n-те наближення ДНД (15), M — довільна стала, m, n — натуральні числа.

Дійсно, аналогічно до залишків (6), (7) ДНД (3) введемо залишки ДНД (15)

$$\hat{Q}^{(0)}_{i+k,i} := 1, \qquad \hat{Q}^{(m+1)}_{i+k,i} := 1 - \frac{|a_{i+k+1,i}|}{\hat{Q}^{(m)}_{i+k+1,i}}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{Q}^{(0)}_{i,i+k} := 1, \quad \hat{Q}^{(m+1)}_{i,i+k} := 1 - \frac{|a_{i,i+k+1}|}{\hat{Q}^{(m)}_{i,i+k+1}}, \qquad i, m = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\hat{Q}^{(0)}_{i} := 1, \qquad \hat{Q}^{(m+1)}_{i} := 1 - \frac{|a_{i+1,i}|}{\hat{Q}^{(m)}_{i+1,i}} - \frac{|a_{i,i+1}|}{\hat{Q}^{(m)}_{i,i+1}} - \frac{|a_{i+1,i+1}|}{\hat{Q}^{(m)}_{i+1}}, \quad i,\ m = 0, 1, \ldots,$$

для яких методом повної математичної індукції неважко довести, що

$$\left|Q^{(n-1-i)}_{i}\right| \ \geq\ \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i} \geq h_{n-1-i}, \qquad \left|\mathrm{Q}^{(n-1-i-k)}_{i+k,i}\right| \ \geq\ \hat{Q}^{(n-1-i-k)}_{i+k,i} \geq h_{n-1-i-k},$$

$$\left|\mathrm{Q}^{(n-1-i-k)}_{i,i+k}\right| \ \geq\ \hat{Q}^{(n-1-i-k)}_{i,i+k} \ \geq\ h_{n-1-i-k}, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{16}$$

де h_m — m-те наближення неперервного дробу

$$1 - \frac{\rho(1-\rho)}{1} - \frac{\rho(1-\rho)}{1} - \ldots.$$

Доведемо другу з цих нерівностей. Покладемо $k = n-1-i$, $k = n-2-i$, тоді матимемо

$$\left|Q^{(0)}_{n-1,i}\right| \ =\ 1\ =\ \hat{Q}^{(0)}_{n-1,i}\ =\ h_0,$$

$$\left|Q^{(1)}_{n-2,i}\right| \ =\ \left|1 + \frac{a_{n-1,i}}{Q^{(0)}_{n-1,i}}\right| \ \geq\ 1 - \frac{|a_{n-1,i}|}{\hat{Q}^{(0)}_{n-1,i}} \ =\ \hat{Q}^{(1)}_{n-2,i} \ \geq\ 1 - \frac{\rho(1-\rho)}{1} \ =\ h_1.$$

Припустимо, що ця нерівність виконується для $k = m+1$, та доведемо її для $k = m$:

$$\left|Q^{(n-1-i-m)}_{i+m,i}\right| \ =\ \left|1 + \frac{a_{i+m+1,i}}{Q^{(n-2-i-m)}_{i+m+1,i}}\right| \ \geq\ 1 - \frac{|a_{i+m+1,i}|}{\hat{Q}^{(n-2-i-m)}_{i+m+1,i}} \ =$$

$$=\ \hat{Q}^{(n-1-i-m)}_{i+m,i} \ \geq\ 1 - \frac{\rho(1-\rho)}{\hat{Q}^{(n-2-i-m)}_{i+m+1,i}} \ =\ h_{n-1-m-i}.$$

Аналогічно доводимо третю нерівність.

Для першої з нерівностей (16) при $i = n-1$ маємо $\left|Q^{(0)}_{n-1}\right| = 1 = \hat{Q}^{(0)}_{n-1} = h_0 > 0$. Припускаючи, що ця нерівність виконується для $i = k+1$, доведемо її для $i = k$:

$$\left|Q_k^{(n-1-k)}\right| = \left|1+\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(n-2-k)}}+\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(n-2-k)}}+\frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(n-2-k)}}\right| \geq$$

$$\geq 1-\frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{\hat{Q}_{k+1,k}^{(n-2-k)}}-\frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k,k+1}^{(n-2-k)}}-\frac{\left|a_{k+1,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k+1}^{(n-2-k)}} =$$

$$= \hat{Q}_k^{(n-1-k)} \geq 1-\frac{\left|a_{k+1,k}\right|}{h_{n-2-k}}-\frac{\left|a_{k,k+1}\right|}{h_{n-2-k}}-\frac{\left|c_{k+1,k+1}\right|}{h_{n-2-k}} \geq h_{n-1-k}\,.$$

Щоб оцінити зверху різницю $\left|\Phi_k^{(m-1-k)}-\Phi_k^{(n-1-k)}\right|$, використаємо формулу різниці між наближеннями для неперервних дробів [12] $(n>m)$:

$$\Phi_k^{(m-1-k)}-\Phi_k^{(n-1-k)} =$$

$$= \frac{(-1)^{m-k}\prod_{i=1}^{m-k}a_{k+i,k}}{\prod_{i=1}^{m-1-k}Q_{k+i,k}^{(m-1-i-k)}Q_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}}\,\frac{1}{Q_{m,k}^{(n-1-m)}}+\frac{(-1)^{m-k}\prod_{i=1}^{m-k}a_{k,k+i}}{\prod_{i=1}^{m-1-k}Q_{k,k+i}^{(m-1-i-k)}Q_{k,k+i}^{(n-1-i-k)}}\,\frac{1}{Q_{k,m}^{(n-1-m)}}\,.$$

Тоді знаходимо

$$\left|\Phi_k^{(m-1-k)}-\Phi_k^{(n-1-k)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\prod_{i=1}^{m-k}\left|a_{k+i,k}\right|}{\prod_{i=1}^{m-1-k}\left|Q_{k+i,k}^{(m-1-i-k)}\right|\left|Q_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}\right|}\,\frac{1}{\left|Q_{m,k}^{(n-1-m)}\right|} +$$

$$+ \frac{\prod_{i=1}^{m-k}\left|a_{k,k+i}\right|}{\prod_{i=1}^{m-1-k}\left|Q_{k,k+i}^{(m-1-i-k)}\right|\left|Q_{k,k+i}^{(n-1-i-k)}\right|}\,\frac{1}{\left|Q_{k,m}^{(n-1-m)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{(-1)^{m-k}\prod_{i=1}^{m-k}\left(-\left|a_{k+i,k}\right|\right)}{\prod_{i=1}^{m-1-k}\hat{Q}_{k+i,k}^{(m-1-i-k)}\hat{Q}_{k+i,k}^{(n-1-i-k)}}\,\frac{1}{\hat{Q}_{m,k}^{(n-1-m)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m-k}\prod_{i=1}^{m-k}\left(-\left|a_{k,k+i}\right|\right)}{\prod_{i=1}^{m-1-k}\hat{Q}_{k,k+i}^{(m-1-i-k)}\hat{Q}_{k,k+i}^{(n-1-i-k)}}\,\frac{1}{\hat{Q}_{k,m}^{(n-1-m)}} =$$

$$= \hat{\Phi}_k^{(m-1-k)}-\hat{\Phi}_k^{(n-1-k)}, \qquad k=0,1,\ldots,m-1\,.$$

Запишемо формулу різниці між n - і m -м наближеннями ДНД (3), (15) вигляду (8) та отримаємо

$$|f_n - f_m| \le \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i+1}\left(\hat{\Phi}_i^{(m-1-i)} - \hat{\Phi}_i^{(n-1-i)}\right)\prod_{j=0}^{i}\left(-|a_{j,j}|\right)}{\prod_{j=0}^{i}\hat{Q}_j^{(n-1-j)}\hat{Q}_j^{(m-1-j)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}\prod_{j=0}^{m}\left(-|a_{j,j}|\right)}{\prod_{j=0}^{m-1}\hat{Q}_j^{(n-1-j)}\hat{Q}_j^{(m-1-j)}} \frac{1}{\hat{Q}_m^{(n-1-m)}} = g_n - g_m .$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми мажорантою ДНД (15) буде періодичний неперервний дріб

$$\frac{\rho(1-\rho)}{1} - \frac{\rho(1-\rho)}{1} - \frac{\rho(1-\rho)}{1} - \ldots . \tag{17}$$

Позначаючи через P_n , Q_n , $q_n = P_n/Q_n$ відповідно n -й чисельник, n -й знаменник і n -те наближення дробу (17) і використовуючи метод математичної індукції, маємо $Q_n = \sum_{i=0}^{n}\rho^i(1-\rho)^{n-i}$, $P_n = \rho(1-\rho)Q_{n-1}$.

Записуючи формулу різниці для наближень неперервного дробу (17)

$$q_n - q_m = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)^{m+1}}{\prod_{i=0}^{m-1} h_{n-i-1}h_{m-i-1}h_{n-m-1}}$$

та враховуючи нерівності (16) і формулу різниці для ДНД (15), отримуємо

$$g_n - g_m \le \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)^{m+1}}{\prod_{i=0}^{m} h_{n-i-1}\prod_{i=0}^{m-1} h_{m-i-1}} = q_n - q_m .$$

Отже, неперервний дріб (15) мажорує ДНД (13), а тому і ДНД (3). Періодичний неперервний дріб (15) при $0 < \rho \le 1/2$ є збіжним, тому і ДНД (3) є збіжним. Оскільки $h_k = \rho(1-\rho)q_{k+1}^{-1} = \dfrac{Q_{k+1}}{Q_k}$, то безпосередньо маємо

$$g_n - g_m \le \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)^{m+1}Q_{n-m-1}}{Q_nQ_m} ,$$

тобто

$$|f_n - f_m| \le \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)^{m+1}Q_{n-m-1}}{Q_n Q_m}. \tag{18}$$

При $\rho = 1/2$ $Q_k = 2^{-k}(k+1)$.

Якщо ж $0 \le \rho < 1/2$, то, як і в [4, с. 96], виконаємо заміну $\rho = 1/t$ і отримаємо

$$Q_k = \frac{(t-1)^k}{t^k} + \frac{(t-1)^{k-1}}{t^k} + \frac{(t-1)^{k-2}}{t^k} + \cdots + \frac{1}{t^k} = \frac{(t-1)^{k+1}-1}{t^k(t-2)}, \quad t > 2.$$

Повернемося до змінної ρ і одержимо $Q_k = \left((1-\rho)^{k+1} - \rho^{k+1}\right)(1-2\rho)^{-1}$. Оцінка (18) відповідно набере вигляду

$$|f_n - f_m| \le \frac{(1-2\rho)\rho^{m+1}(1-\rho)^{m+1}\left((1-\rho)^{n-m} - \rho^{n-m}\right)}{\left((1-\rho)^{n+1} - \rho^{n+1}\right)\left((1-\rho)^{m+1} - \rho^{m+1}\right)}, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$|f_n - f_m| \le \frac{n-m}{2(m+1)(n+1)}, \quad \rho = \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Перейшовши до границі в (19), (20) при $n \to \infty$, отримаємо оцінки швидкості збіжності (12), (13).

Доведемо третє твердження теореми 3. Врахувавши (4), (5), запишемо n-те наближення ДНД (3) у вигляді

$$z = \frac{a_{0,0}}{1 + \dfrac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-2)}} + \dfrac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-2)}} + \dfrac{a_{1,1}}{Q_1^{(n-2)}}} = \frac{a_{0,0}}{1+w}.$$

З нерівностей (16) та умов (11) випливає, що $|w| \le \rho(1-\rho)/h_{n-2} = q_{n-1}$. Якщо Q — значення нескінченного дробу (17), т о, враховуючи, що $Q_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, маємо $q_n - q_{n-1} = \frac{(\rho(1-\rho))^n}{Q_n Q_{n-1}} \ge 0$, тобто послідовність $\{q_n\}$ монотонно зростає. Отже, $|w| \le Q$. Оскільки $Q = \rho(1-\rho)(1-Q)^{-1}$, то, враховуючи, що при $\rho = 0$ $Q = 0$, і розв'язуючи квадратне рівняння відносно Q, одержуємо $Q = \rho$. Тому $|w| \le \rho$, звідки неважко отримати (14).

Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай* ρ *— дійсне число з* $(0, 1/2]$ *і* F_ρ *— сім'я ДНД* (3), *елементи яких* *задовольняють умови*

$$\left|a_{i+1,i}\right|+\left|a_{i,i+1}\right|+\left|a_{i+1,i+1}\right| = \rho(1-\rho), \qquad \left|a_{0,0}\right| = \rho(1-\rho), \tag{21}$$
$$\left|a_{i+j,i}\right| = \rho(1-\rho), \qquad \left|a_{i,i+j}\right| = \rho(1-\rho), \qquad j \ge 2, \quad 0<\rho\le 1/2 .$$

Тоді множина всіх можливих значень f *ДНД* (3) *з* F_ρ *є кільцем* A_ρ:

$$\rho\frac{1-\rho}{1+\rho} \le |f| \le \rho . \tag{22}$$

Доведення. Використаємо схему доведення теореми 2. Отже, множиною значень таких дробів з F_ρ буде круг чи кільце з центром у початку координат. З теореми 3 випливає, що цей круг чи кільце належить кругу $|f|\le\rho$.

Спочатку доведемо, що множина всіх значень належатиме кільцю A_ρ. Кожний ДНД з F_ρ можна записати у вигляді

$$\frac{\rho(1-\rho)e^{i\theta}}{1+\omega}, \qquad \theta\in[0,2\pi),$$

де

$$\omega = \mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,0}}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{0,i}}{1}+\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i,i}}{D_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i+j,i}}{1}+D_{j=1}^{\infty}\frac{a_{i,i+j}}{1}} .$$

З урахуванням умов (21) і того факту, що

$$1-\rho = 1-\frac{\rho(1-\rho)}{1}\,\underset{-}{}\,\frac{\rho(1-\rho)}{1}\,\underset{-}{}\,\frac{\rho(1-\rho)}{1}\,\underset{-}{}\,\ldots,$$

маємо $|\omega|\le\frac{|a_{1,0}|}{1-\rho}+\frac{|a_{0,1}|}{1-\rho}+\frac{|a_{1,1}|}{1-\rho}=\rho$, а тому $|f|\le\rho$. Оскільки $|1+\omega|\le 1+\rho$, то $|f|\ge$ $\ge\rho\frac{1-\rho}{1+\rho}$, і права частина цієї нерівності також належить F_ρ.

Тепер покажемо, що кільце A_ρ належить множині значень ДНД з F_ρ. За допомогою відображення $\xi=1/(1+\omega)$ коло $|\omega|=\rho$ відображається на коло

$$\left| \xi - \frac{1}{1-\rho^2} \right| = \frac{\rho}{1-\rho^2} .$$

Тоді, покладаючи $\xi \mapsto \rho(1-\rho)e^{i\theta}\xi$, для всіх $\theta \in [0, 2\pi)$ отримуємо всі точки кільця (22), тобто $\rho \frac{1-\rho}{1+\rho} \leq |f| \leq \rho$.

Отже, A_ρ належить множині значень ДНД з F_ρ.

Теорему доведено.

1. *Beardon A. F.* Worpitzky theorem on continued fractions // J. Comput. and Appl. Math. – 2001. – **131**, № 1. – P. 143–148.
2. *Beardon A. F.* The Worpitzky–Pringsheim theorem on continued fractions // Rocky Mountain J. Math. – 2001. – **31**. – P. 389–399.
3. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. Vol. 1. Convergence theory. – Amsterdam; Paris: Atlantis Press / World Sci., 2008. – 308 p.
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби.— Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
5. *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.
6. *Kuchmins'ka Kh.* Worpitzky-like criterion for two-dimensional continued fraction. – Marseille, 1993. – 6 p. – (Reprint / CNRS, Centre de Physique Theorique; CPT-93/P. 2940).
7. *Кучмінська Х. Й.* Про теореми типу Ворпіцького для двовимірного неперервного дробу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 17–26.
8. *Сусь О. М.* Збіжність двовимірних ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 75–83.
9. *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – 206 с.
10. *Waadeland H.* Boundary versions of Worpitzky's theorem and of parabola theorems // Analytic Theory of Continued Fractions III. Lect. Notes Math. / Ed. L. Jakobsen. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – **1406**. – P. 135–142.
11. *Waadeland H.* A Worpitzky boundary theorem for N-branched continued fractions // Commun. Anal. Theory Contin. Fractions. – 1993. – **2**. – P. 24–29.
12. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 2010. – 218 с.
13. *Kuchminska Kh.* On sufficient conditions for convergence of two-dimensional continued fractions // Acta Appl. Math. – 2000. – **61**, № 1—3. – P. 175–183.

Одержано 15.09.13