УДК 517.9

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЯКОБИАН И СВОЙСТВО ДАРБУ

We present a simple proof of the Darboux property for the Jacobian of a differentiable mapping.

Наведено просте доведення властивості Дарбу якобіана диференційовного відображення.

Пусть задано непрерывное отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n(y)$ ограниченной области $D(x) \subset \mathbb{R}^n_1$. Назовем его изолированным в точке $x_0 \in D$, если некоторая ее окрестность $U(x_0)$ содержит единственную точку x_0 прообраза $f^{-1}f(x_0)$, и изолированным в область D, если это имеет место в каждой ее точке.

Далее, для изолированного отображения f рассмотрим соответствующую окрестность $U(x_0)$ произвольной точки $x_0 \in D$ и в ней (открытую) полиэдральную окрестность Q. Коэффициент зацепления $w\{f(\partial Q),\ f(x_0)\}$ [1] назовем локальной степенью отображения f в точке x_0 и будем обозначать ее через

$$\gamma(x_0, f) = \gamma(x_0).$$

Оказывается, что эта степень не зависит от выбора полиэдральной окрестности Q.

Для компактной в D полиэдральной подобласти D_0 аналогично определим глобальную степень относительно некоторой точки $y_0 \in \mathbb{R}^n$ как $w(f(\partial D_0), y_0)$. Она определена при условии, что $\partial D_0 \cap f^{-1}(y_0) = \varnothing$. Если прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из (конечного) числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_p$, то имеет место свойство аддитивности:

$$\Gamma(D_0, y_0) = \sum_{\substack{x_k \in f^{-1}(y_0)\\ k=1}}^{p} \gamma(x_k).$$

Лемма. *Если в некоторой точке $x \in D$ степень $\gamma(x) \neq 0$, то f открыто в этой точке.*

Доказательство. Предположим противное, тогда для некоторой шаровой окрестности $U(x)$, $\overline{U} \subset D$, точка $y = f(x)$ является граничной для компакта $\overline{V} = f(\overline{U})$.

Поскольку точка y не принадлежит компакту $f(\partial\overline{U})$, найдется шар $V_0(y)$ такой, что $\overline{V_0} \cap \cap f(\partial V) = \varnothing$. Но y является граничной точкой компакта $\overline{V}$, поэтому внутри $\overline{V_0}(y)$ найдется точка y_1, внешняя для $\overline{V}$. Первую точку пересечения отрезка $\overline{y_1 y} \subset V_0 \subset \overline{V}$ обозначим через y_0. Множество $f^{-1}(y_0)$ конечно и из построения следует, что

$$\Gamma(\overline{V}, y_0) = w(\partial V, y_0) = 0.$$

Это индекс пересечения отрезка $\overline{y_1 y_0} \subset \partial V$ [1].

С другой стороны, значения $w(\partial V, y)$ для точек y и y_0, принадлежащих одной компоненте дополнения $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial V)$, совпадают, но по условию леммы $w(\partial V, y) \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Мы рассмотрим здесь непрерывное отображение $f\colon D(x) \to \mathbb{R}^n(y)$, $D \subset \mathbb{R}^n_1$, $n > 1$, дифференцируемое в каждой точке области D, без предположения непрерывной дифференцируемости.

Наша цель — доказать и в этих условиях следующее утверждение о свойстве якобиана такого отображения: *если в области D якобиан $J(f)$ меняет знак, то в ней имеются точки, в которых он обращается в нуль.*

Отметим, что в одномерном случае из этого утверждения следовало свойство производной $f'(x)$ принимать все промежуточные значения на каждом интервале из области определения f, т. е. то, что принято называть свойством Дарбу. В многомерном случае в полной мере это уже не так; тем не менее, сформулированное свойство якобиана $J(f)$ согласились для краткости называть его свойством Дарбу [4, 5].

Основным инструментом при доказательстве этого свойства будет локальная степень отображения.

Итак, пусть в области $D \subset \mathbb{R}_1^n$ якобиан $J(f)$ непрерывного и всюду дифференцируемого отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ меняет знак. Докажем, что в D существует точка, в которой $J(f)$ обращается в нуль.

Доказательство будет основано на цепочке некоторых простых утверждений.

1. Если в точке $x_0 \in D$ якобиан $J(x_0; f) \neq 0$, то отображение f изолировано в этой точке, в ней существует локальная степень $\gamma(x_0)$, причем $\gamma(x_0) = +1$ при $J > 0$ и $\gamma(x_0) = -1$ при $J < 0$.

В самом деле, дифференциал $df|_{x_0}$ представляет невырожденное линейное отображение, переводящее каждую сферу с центром $x_0 \in D$ в невырожденный эллипсоид с центром $f(x_0) \in \in \mathbb{R}^n$, а первоначальное отображение $f(x) - f(x_0)$ представляет бесконечно малую деформацию этого эллипсоида. Поэтому индексы пересечения их с любым лучом, выходящим из точки $f(x_0)$, совпадают и равны ± 1 (в зависимости от выбора ориентаций $\mathbb{R}_1^n$, $\mathbb{R}^n$), а это и есть коэффициент зацепления циклов $f(\partial U)$ (∂U — граничная сфера шара $U(x_0)$) и точки $f(x_0)$, т. е. локальная степень $\gamma(x_0)$.

Из доказанных выше свойств локальной степени следует, что в этом случае отображение f открыто в точке x_0, а также то, что если $\gamma(x) = 0$, то и $J(x, f) = 0$.

Возвращаясь к утверждению, предположим, что в его условиях якобиан не имеет нулей и в некоторой точке x_0 локальная степень $\gamma(x_0) > 0$.

В этом случае отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ будет изолированным и открытым для всей области D. Известно [2, 3], что такое отображение имеет всюду плотное в D открытое множество точек локального гомеоморфизма, а множество B_f точек ветвления f, т. е. точек, ни в какой окрестности которых гомеоморфизма нет, имеет размерность $\dim B_f \leq n - 2$.

Но из предыдущего легко видеть, что в каждой точке ветвления якобиан $J(f)$ равен нулю. Поэтому из нашего предположения следует, что $B_f = \varnothing$.

Следовательно, данное отображение всюду в D является локальным гомеоморфизмом, поэтому во всех точках D локальная степень имеет один знак. Поскольку была выбрана точка с $\gamma(x_0) > 0$, то в результате получаем следующий вывод: если якобиан $J(f) \neq 0$ всюду в D, то всюду в D локальная степень $\gamma(x) = +1$, т. е. сохраняет знак, но это (см. выше) означает, что и якобиан сохраняет знак, что противоречит условию утверждения.

Этим основное утверждение о свойстве Дарбу, очевидно, доказано.

1. *Александров П. С.* Комбинаторная топология. – М.; Л., 1947. – С. 568 – 579.
2. *Чернавский А. В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. – 1964. – **65**. – С. 357 – 369.
3. *Väisälä G.* Discrete open mappings on manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn., I. Math. – 1966. – **392**. – P. 3 – 10.
4. *Steffen K.* Über den Zwischenwertsatz von Darboux und den Umkehrsatz für differenzierbare Functionen mehrerer Veränderlicher // Elen. Math. – 1982. – **37**, № 5. – S. 121 – 131.
5. *Роднянский А. М.* О дифференцируемых отображениях областей // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**. – С. 15 – 17.

Получено 05.06.14