

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА В КЛАССЕ НЕУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

We study the Cauchy problem for the Korteweg–deVries equation in the class of functions approaching a finite-zone periodic solution of the KdV equation as $x \rightarrow -\infty$ and 0 as $x \rightarrow +\infty$. We prove the existence of infinitely many “regularized” integrals of motion for the solutions $u(x, t)$ of the Cauchy problem, with explicit dependence on time.

Вивчається розв’язок задачі Коші для рівняння Кортевега–де Фріза у класі функцій, що прямують до скінченнозонного періодичного розв’язку цього рівняння при $x \rightarrow -\infty$ і до 0 при $x \rightarrow +\infty$. Доведено існування нескінченного числа „регуляризованих” інтегралів руху для розв’язку $u(x, t)$ задачі Коші, до яких явно входить час.

1. Введение. Известно, что решение задачи Коши для уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.1)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

имеет такое свойство: для него существует счетная серия интегралов движения, которая представима в виде

$$I_n[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(u, u_x, \dots) dx, \quad (1.2)$$

т. е. эти интегралы не зависят от времени. Здесь $P_n(u, u_x, \dots)$ – полином по u и пространственным производным от u . Первые три полинома имеют вид $P_1(u) = u$, $P_2(u) = u^2$, $P_3(u, u_x) = u^3 + \frac{1}{2} u_x^2$. Впервые этот факт был отмечен в работах [1–3], где указана общая процедура их построения. Другой подход к определению $P_n(u, u_x, \dots)$ был развит Лаксом [4]. В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев в работе [5] построили теорию уравнения КдФ, как вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Они получили вид интегралов движения, выраженных через данные рассеяния. Была введена симплектическая структура на соответствующем многообразии и показано, что эти интегралы находятся в инволюции. Третий из них играет роль гамильтониана $H[u]$ для уравнения КдФ, представимого в виде

$$u_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta H[u]}{\delta u}, \quad (1.3)$$

где символ $\frac{\delta}{\delta u}$ обозначает производную Фреше.

Отметим, что в работе [5] рассматривались убывающие при $x \rightarrow \pm\infty$ решения. В данной работе рассматриваются решения уравнения КдФ в классе неубывающих функций, а именно,

решения u , стремящиеся к 0 при $x \rightarrow +\infty$ и к периодическому фону при $x \rightarrow -\infty$. В таком случае интегралы движения вида (1.2) расходятся. В работе построены „регуляризованные” интегралы движения, в которые явно входит время. Тем не менее уравнение КдФ представляется в гамильтоновом виде (1.3). Таким образом, в указанном классе неубывающих решений уравнение КдФ можно рассматривать как неавтономную гамильтонову динамическую систему.

Опишем кратко структуру статьи. Метод обратной задачи решения задачи Коши для уравнения КдФ использует представление Лакса $L_t = [A, L]$, где L – оператор Шредингера, а A – дифференциальный оператор третьего порядка. Поэтому во втором пункте приведены необходимые сведения из теории рассеяния для уравнения Шредингера и выведены асимптотические формулы для его решений. В третьем пункте установлена эволюция по времени данных рассеяния для оператора Шредингера, потенциал для которого является решением задачи Коши. Все это используется в четвертом пункте, где приведены „регуляризованные” интегралы движения для задачи Коши в классе решений, стремящихся к периодическому фону при $x \rightarrow -\infty$ и к 0 при $x \rightarrow +\infty$. Эти интегралы явно зависят от времени. В пятом пункте рассмотрены решения, стремящиеся к постоянному фону при $x \rightarrow -\infty$, и найдены интегралы движения, не зависящие явно от времени.

2. Необходимые сведения из теории рассеяния. Введем определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Рассмотрим дифференциальное уравнение Хилла

$$-y'' + q_0(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1)$$

с вещественным периодическим потенциалом $q_0(x)$:

$$q_0(x+a) = q_0(x).$$

Без ограничения общности будем считать, что $a = 1$. Пусть $\theta(x, \lambda), \phi(x, \lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения (2.1), определенная начальными условиями

$$\theta(0, \lambda) = \phi'(0, \lambda) = 1, \quad \theta'(0, \lambda) = \phi(0, \lambda) = 0.$$

Следуя [6], обозначим $\phi = \phi(1, \lambda), \phi' = \phi'(1, \lambda), \theta = \theta(1, \lambda), \theta' = \theta'(1, \lambda)$. Решения

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) + m_{1,2}(\lambda)\phi(x, \lambda) \quad (2.2)$$

называются решениями Вейля. Здесь $m_{1,2}(\lambda) = \frac{\phi' - \theta}{2\phi} \pm \frac{\sqrt{F^2(\lambda) - 1}}{\phi}$ – функции Вейля, а

$F(\lambda) = \frac{\phi' + \theta}{2}$ – дискриминант Хилла. Множество

$$\sigma = \{\lambda : \text{Im } \lambda = 0, |F(\lambda)| \leq 1\}$$

называется спектром оператора $L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_0(x)$ в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Для решений Вейля имеют место следующие представления [6, с. 348]:

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) = \exp(\mp i\rho(\lambda)x) \chi_{12}(x),$$

где

$$\rho(\lambda) = i \ln \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right) = \arcsin \left(i \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right),$$

$\chi_{12}(x)$ – периодические функции с периодом 1.

Предположим, что потенциал $q_0(x)$ имеет производные до порядка $n - 2$ включительно, где $n > 2$ – любое фиксированное число. Уравнение Хилла (2.1) имеет линейно независимые решения $\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$, представимые в виде [7, с. 60] (Л.1.4.2)

$$\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \exp \left(\pm i \sqrt{\lambda} x + \int_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda}) d\xi \right), \quad (2.3)$$

где

$$\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{\sigma}_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{\tilde{\sigma}_n(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n}, \quad (2.4)$$

n – любое фиксированное натуральное число. При этом функции $\tilde{\sigma}_j(x)$, $1 \leq j \leq n - 1$, определяются рекуррентными соотношениями

$$\tilde{\sigma}_1(x) = q_0(x), \quad (2.5)$$

$$\tilde{\sigma}_{j+1}(x) = -\tilde{\sigma}'_j(x) - \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{\sigma}_{j-l}(x) \tilde{\sigma}_l(x)$$

и при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\tilde{\sigma}_n(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \bar{\sigma}(1) \quad (2.6)$$

равномерно по $x : |x| < N$, где $N = \text{const}$, при $\text{Im } \lambda \geq 0$.

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера на всей оси :

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.7)$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условиям

$$\int_{-\infty}^0 (1+x^2)|q^{(j)}(x) - q_0^{(j)}(x)|dx < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} (1+x^2)|q^{(j)}(x)|dx < +\infty, \quad j = \overline{0, n}, \quad (2.8)$$

где $q_0(x)$ – вещественный периодический конечнозонный потенциал для уравнения Хилла (2.1) (см., например, [11, 12]). Известно, что уравнение (2.7) имеет линейно независимые решения вида [7, с. 162]

$$\phi_{1,2}(x, \lambda) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} + \int_x^{+\infty} K^+(x, y) e^{\pm i\sqrt{\lambda}y} dy, \quad \lambda > 0, \quad (2.9)$$

где ядро $K^+(x, y)$ не зависит от спектрального параметра, и для него справедлива оценка

$$|K^+(x, y)| \leq \frac{1}{2} l \left(\frac{x+y}{2} \right) \exp \left(l_1(x) - l_1 \left(\frac{x+y}{2} \right) \right),$$

$$l(x) = \int_x^{+\infty} |q(y)| dy, \quad l_1(x) = \int_x^{+\infty} |l(y)| dy.$$

Кроме того, $K^+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} |q(y)| dy$. В работе [9] доказано, что при $\lambda \in \text{Int } \sigma$ существует фундаментальная система $\psi_{1,2}(x, \lambda)$ решений уравнения (2.7) вида

$$\psi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, y) \tilde{\psi}_{1,2}(y, \lambda) dy, \quad (2.10)$$

где $\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda)$ имеют вид (2.2), и для ядра $K^-(x, y)$ справедлива оценка

$$|K^-(x, y)| \leq C(x) \int_{-\infty}^{\frac{x+y}{2}} |q(\xi) - q_0(\xi)| d\xi. \quad (2.11)$$

Здесь $C(x)$ — непрерывная положительная монотонно убывающая функция при $x \rightarrow -\infty$. Функции $\phi_{1,2}(x, \lambda)$ составляют фундаментальную систему решений уравнения (2.7) при $\lambda > 0$, а функции $\psi_{1,2}(x, \lambda)$ — при $\lambda \in \text{Int } \sigma$, поэтому они связаны равенствами

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \lambda) &= c_{11}(\lambda) \phi_1(x, \lambda) + c_{12}(\lambda) \phi_2(x, \lambda), \quad \lambda > 0, \\ \phi_1(x, \lambda) &= c_{22}(\lambda) \psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda) \psi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \text{Int } \sigma. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Введем еще одну пару линейно независимых решений $y(x, \pm\lambda)$ для уравнения Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условиям (2.8). Это будет выполнено в лемме 2.2, доказательство которой существенно использует методы, развитые в [8]. Сначала получим необходимую уточненную асимптотическую формулу для функции Вейля $m_1(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Лемма 2.1. При $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \lambda \geq 0$ имеет место асимптотическая формула

$$m_1(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + O(|\lambda|^{-n/2}), \quad (2.13)$$

где n — любое фиксированное натуральное число, а функция $\tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda})$ определяется по формуле (2.4).

Доказательство. Как показано в [6], функция $m_1(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$m^2(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} m(\lambda) - \frac{\theta'(\lambda)}{\phi(\lambda)} = 0. \quad (2.14)$$

В силу (2.4) и (2.5) в рассматриваемом случае периодического конечнозонного потенциала $q_0(x)$ при любом натуральном n и $|\lambda| \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$\tilde{\sigma}(1, -\sqrt{\lambda}) = \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + \bar{o}(|\lambda|^{-n/2}). \quad (2.15)$$

Подставляя функцию $\nu(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda})$ в левую часть уравнения (2.14) и учитывая соотношения (2.14), (2.15), убеждаемся, что $\nu(\lambda)$ является решением уравнения

$$\nu^2(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)}\nu(\lambda) - \frac{\theta'(\lambda)}{\phi(\lambda)} = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2+1}). \quad (2.16)$$

Вычтем из уравнения (2.14) с подстановкой $m(\lambda) = m_1(\lambda)$ уравнение (2.16):

$$(m_1(\lambda) - \nu(\lambda)) \left(m_1(\lambda) + \nu(\lambda) + \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} \right) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2+1}).$$

Устремим $|\lambda|$ к ∞ и воспользуемся асимптотиками из [6]:

$$\begin{aligned} m_1(\lambda) &= -i\sqrt{\lambda} + \underline{O}(1), \\ \nu(\lambda) &= -i\sqrt{\lambda} + \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \\ \left| \frac{\theta(\lambda) - \phi'(\lambda)}{\phi(\lambda)} \right| &= \underline{O}(1). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$m_1(\lambda) - \nu(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}).$$

Следовательно, справедлива следующая уточненная асимптотическая формула для функции Вейля:

$$m_1(\lambda) = -i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}).$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Уравнение Шредингера (2.7) с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условиям (2.8), при достаточно больших $\lambda \in \text{Int } \sigma$ имеет два линейно независимых решения $y(x, \pm\sqrt{\lambda})$, представимые в виде

$$y(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{w_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}}\right), \quad (2.17)$$

где функции $\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ определяются формулами (2.4), (2.5), а функции $w_j(x)$ связаны рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} w_1'(x) &= q(x) - q_0(x), \\ w_j'(x) &= \sigma_j(x) - \tilde{\sigma}_j(x) + \sum_{l=1}^{j-1} w_l(x)(\sigma_{j-l}(x) - \tilde{\sigma}_{j-l}(x)), \quad j = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \tilde{\sigma}(\xi, \pm\sqrt{\lambda})d\xi\right) =$$

$$= \pm 2i\sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^x g_{n+1}(y, \lambda) \frac{\psi_1(x, \lambda)\psi_2(y, \lambda) - \psi_1(y, \lambda)\psi_2(x, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)} dy,$$

в которых функции $\sigma_j(x)$ определяются из рекуррентных соотношений (2.5) при $\sigma_1(x) = q(x)$ и функции $w_j(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, причем $g_{n+1}(y, \lambda) \in L_1(-\infty, 0]$.

Доказательство. 1. Решения уравнения Хилла (2.1) $\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ при достаточно больших $\lambda \in \text{Int } \sigma$ и $\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda)$ вида (2.2) и (2.3) соответственно образуют фундаментальные системы. Следовательно, одно из решений можно выразить в виде линейной комбинации других:

$$\tilde{y}(x, -\sqrt{\lambda}) = A(\lambda)\tilde{\psi}_1(x, \lambda) + B(\lambda)\tilde{\psi}_2(x, \lambda). \quad (2.19)$$

Подставляя в это равенство, а также в соответствующее равенство для производной $\tilde{y}'(x, -\sqrt{\lambda})$ значение $x = 0$ и учитывая лемму 2.1, получаем асимптотические равенства для коэффициентов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$A(\lambda) = 1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \quad B(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \quad (2.20)$$

где n – любое фиксированное натуральное число.

2. Дифференцируя равенство (2.19) по x и учитывая (2.4), (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x, -\sqrt{\lambda})(-i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(x, -\sqrt{\lambda})) &= A(\lambda)(-i\rho(\lambda))\tilde{\psi}'_1(x, \lambda) + B(\lambda)(i\rho(\lambda))\tilde{\psi}'_2(x, \lambda) + \\ &+ A(\lambda)e^{-i\rho(\lambda)x}\chi'_1(x, \lambda) + B(\lambda)e^{i\rho(\lambda)x}\chi'_2(x, \lambda). \end{aligned}$$

Поскольку равенства $\chi'_1(x, \lambda) = \overline{\chi'_2(x, \lambda)} = \underline{O}\left(\frac{1}{|\sqrt{\lambda}|}\right)$ и $\rho(\lambda) = \sqrt{\lambda} + \underline{O}(1)$ выполняются равномерно по x , то справедлива следующая оценка:

$$|\tilde{y}'(x, -\sqrt{\lambda})\tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda})| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{\lambda}} + \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (2.21)$$

3. Подставляя правую часть решения (2.3) в уравнение Хилла, убеждаемся, что функции $\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\sigma}'(x, \pm\sqrt{\lambda}) \pm 2i\sqrt{\lambda}\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda}) + \tilde{\sigma}^2(x, \pm\sqrt{\lambda}) = q_0(x). \quad (2.22)$$

Теперь подставим правую часть формулы (2.17) в уравнение (2.7). Тогда, учитывая (2.22), имеем

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^n \frac{w_j''(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} - \frac{w_{n+1}''(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - 2(\pm i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})) \times \\ & \times \left(\sum_{j=1}^n \frac{w_j'(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}'(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} \right) + \\ & + (q(x) - q_0(x)) \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{w_j(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, сдвигая индексацию суммирования, а затем приравнявая к нулю коэффициенты при степенях $(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{-j}$, $j = \overline{0, n-1}$, получаем рекуррентные соотношения

$$\frac{1}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^0} : w'_1(x) = q(x) - q_0(x),$$

$$\frac{1}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^1} : -w''_1(x) - w'_2(x) + (q(x) - q_0(x))w_j(x) = 0, \quad (2.23)$$

$$j = \overline{2, n-1} : -w''_j(x)w'_{j+1}(x) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} w'_l(x)\tilde{\sigma}_{j-l}(x) + (q(x) - q_0(x))w_j(x) = 0,$$

$$-\frac{w''_n(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n} - \frac{w''_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - 2(\pm i\sqrt{\lambda} + \tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda}))\frac{w'_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - \frac{2w'_n(x)\tilde{\sigma}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n} +$$

$$+ (q(x) - q_0(x))\frac{w_n(x)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n} + (q(x) - q_0(x))\frac{w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} +$$

$$+ \frac{P(w'_1(x), \dots, w'_n(x), \tilde{\sigma}_1(x), \dots, \tilde{\sigma}_n(x), \lambda)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^n} = 0. \quad (2.24)$$

Умножив равенство (2.24) на $\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$, получим дифференциальное уравнение для функции $v_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) \equiv w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})\tilde{y}(x, \pm\sqrt{\lambda})$:

$$-v''_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) + q(x)v_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) - \lambda v_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \pm 2i\sqrt{\lambda}g_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}), \quad (2.25)$$

в котором функции $g_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda})$ содержат оставшиеся слагаемые равенства (2.24). Учитывая, что $(1 + |x|)P \in L_1(-\infty, 0]$, и (2.21), имеем $g_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) \in L_1(-\infty, 0]$. Следовательно, вводя функцию Грина

$$G(x, y, \lambda) = \frac{\psi_2(x, \lambda)\psi_1(y, \lambda) - \psi_2(y, \lambda)\psi_1(x, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)}$$

и учитывая, что $g_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) \in L_1(-\infty, 0]$, получаем решение дифференциального уравнения (2.25) в виде

$$v_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \pm 2i\sqrt{\lambda} \int_{-\infty}^x \frac{\psi_2(x, \lambda)\psi_1(y, \lambda) - \psi_2(y, \lambda)\psi_1(x, \lambda)}{m_2(\lambda) - m_1(\lambda)} g_{n+1}(y, \pm\sqrt{\lambda}) dy,$$

стремящееся к 0 при $x \rightarrow -\infty$.

4. Равенство (2.18) докажем индукцией по j . При $j = 1$ равенство очевидным образом справедливо. Пусть равенство (2.18) справедливо при $n = \overline{1, j}$. Вычисляя $w'_{j+1}(x)$ с помощью рекуррентных соотношений (2.23), получаем

$$w'_{j+1}(x) = -w''_j(x) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} w'_l(x)\tilde{\sigma}_{j-l}(x) + (q(x) - q_0(x))w_j(x).$$

Подставляя $w'_j(x)$, а также используя рекуррентные соотношения (2.5), имеем

$$w'_{j+1}(x) = \sigma_{j+1}(x) - \tilde{\sigma}_{j+1}(x) + \sum_{l=1}^j w_l(x)(\sigma_{j+1-l}(x) - \tilde{\sigma}_{j+1-l}(x)). \quad (2.26)$$

Таким образом, лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Для коэффициента $c_{11}(\lambda)$ в соотношении (2.12) справедливо следующее асимптотическое равенство при $|\lambda| \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} 2i\sqrt{\lambda}c_{11}(\lambda) &= (\tilde{\sigma}(0, -\sqrt{\lambda}) - \sigma(0, -\sqrt{\lambda})) \times \\ &\times \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{w_j(0)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(0, -\sqrt{\lambda})}{(-2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} - \sum_{j=1}^n \frac{w'_j(0)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} - \frac{w'_{n+1}(0, -\sqrt{\lambda})}{(-2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} \right) \times \\ &\times \exp \left(- \int_0^{+\infty} \sigma(\xi, -\sqrt{\lambda}) d\xi \right) (1 + \underline{O}(|\sqrt{\lambda}|^{-n/2})), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где n – любое фиксированное натуральное число.

Доказательство. Рассмотрим вронсиан $W(\psi_1, \phi_2)$, где $W(f, g) = fg' - f'g$. Учитывая первое из равенств (2.12) и то, что вронсиан не зависит от x , при $x = 0$ получаем

$$c_{11}(\lambda) = \frac{W(\psi_1(x, \lambda), \phi_2(x, \lambda))|_{x=0}}{2i\sqrt{\lambda}}. \quad (2.28)$$

Поскольку согласно лемме 2.2 $\psi_1(x, \lambda) = \tilde{A}(\lambda)y(x, -\sqrt{\lambda}) + \tilde{B}(\lambda)y(x, \sqrt{\lambda})$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} |y(x, \sqrt{\lambda}) - \tilde{y}(x, \sqrt{\lambda})| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |y(x, -\sqrt{\lambda}) - \tilde{y}(x, -\sqrt{\lambda})| = 0$, то коэффициенты $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{B}(\lambda)$ совпадают с коэффициентами $\tilde{\tilde{A}}(\lambda)$ и $\tilde{\tilde{B}}(\lambda)$ в разложении $\tilde{\psi}_1(x, \lambda) = \tilde{\tilde{A}}(\lambda)\tilde{y}(x, -\sqrt{\lambda}) + \tilde{\tilde{B}}(\lambda)\tilde{y}(x, \sqrt{\lambda})$, т. е. для этих коэффициентов при любом фиксированном натуральном n справедливы такие же, как и в (2.20), асимптотические равенства при $|\lambda| \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\tilde{A}}(\lambda) = 1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}), \quad \tilde{\tilde{B}}(\lambda) = \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}). \quad (2.29)$$

Опираясь на задачу, приведенную в [7, с. 184], несложно показать, что решения $\phi_{1,2}(x, \lambda)$ уравнения (2.7) представимы в виде

$$\phi_{1,2}(x, \lambda) = \exp \left(\pm i\sqrt{\lambda}x - \int_x^{+\infty} \sigma(\xi, \pm\sqrt{\lambda}) d\xi \right), \quad (2.30)$$

где $\sigma(x, \pm\sqrt{\lambda})$ определяются по формулам (2.4), (2.5), в которых $\sigma_1(x) = q(x)$, а

$$\sigma_n(x, \pm\sqrt{\lambda}) = \int_0^{+\infty} \sigma_{n+1}(x + \xi) e^{\pm 2i\sqrt{\lambda}\xi} d\xi + \frac{1}{\pm 2i\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \tilde{K}_n(x, \xi) e^{\pm 2i\sqrt{\lambda}\xi} d\xi + \underline{O} \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Здесь

$$\int_0^{+\infty} (|\sigma_{n+1}(x+\xi)| + |\tilde{K}_{n+1}(x,\xi)|) d\xi < \infty.$$

Подставляя (2.29) и (2.30) в (2.28), приходим к асимптотическому равенству (2.27) для коэффициента $c_{11}(\lambda)$.

Лемма 2.3 доказана.

3. Задача Коши для уравнения КдФ. Рассмотрим задачу Коши для уравнения КдФ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.1)$$

с вещественной начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |u_0(x) - v_0(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0, \quad (3.2)$$

где $v_0(x)$ – периодический вещественный конечнозонный потенциал с периодом $a = 1$ для уравнения Хилла. Пусть $v(x, t)$ – периодическое решение уравнения КдФ с начальной функцией $v(x, 0) = v_0(x)$ (существование $v(x, t)$ доказано в [7]). В [10] доказано, что при соответствующем выборе начальной функции $u_0(x)$ задача (3.1), (3.2) имеет решения Шварцковского типа V , обладающие свойствами

$$\max_{|t| \leq T} \int_{-\infty}^0 (1 + |x|^m) \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} - \frac{\partial^j v(x, t)}{\partial x^j} \right| dx < +\infty,$$

$$\max_{|t| \leq T} \int_0^{+\infty} (1 + x^m) \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| dx < +\infty, \quad j, m = 0, 1, 2, \dots,$$

при всех неотрицательных значениях T .

Лемма 3.1. Если в уравнении Шредингера вида (2.7) потенциал $u(x, t)$ является решением задачи Коши (3.1), (3.2), принадлежащим классу V , то закон изменения во времени $c_{12}(\lambda, t)$ задается формулой

$$c_{12}(\lambda, t) = c_{12}(\lambda, 0) \exp \left(-4i(\sqrt{\lambda})^3 t + \int_0^t \left(-2(v(0, \tau) + 2\lambda) m_1(\lambda, \tau) + \frac{\partial v(0, \tau)}{\partial x} \right) d\tau \right). \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть потенциалы $u(x, t)$ семейства уравнений (2.7) являются решениями уравнения КдФ, принадлежащими классу V . Оператор $M = \frac{\partial}{\partial t} - 2(u(x, t) + 2\lambda) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ преобразует дифференцируемые по t решения уравнения Шредингера типа (2.7) в решения этого же уравнения [7, с. 287].

1. Рассмотрим решения $\psi_{1,2}(x, \lambda, t)$ вида (2.2) и покажем, что

$$M[\psi_{1,2}(x, \lambda, t)] = \left[-2(v(0, t) + 2\lambda) m_{1,2}(\lambda, t) + \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} \right] \psi_{1,2}(x, \lambda, t). \quad (3.4)$$

Для определенности рассмотрим $M_1[\psi_1(x, \lambda, t)]$. В силу леммы [7, с. 287] при $\lambda \in \text{Int } \sigma$ имеем

$$M[\psi_1] = A(\lambda, t)\psi_1(x, \lambda, t) + B(\lambda, t)\psi_2(x, \lambda, t).$$

Полагая в последнем соотношении $x = -n$ и устремляя n к $+\infty$, $n \in \mathbb{N}$, из равенства (2.10), вследствие периодичности функций $v(x, t)$, $\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$, получаем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}_1(-n, \lambda, t)}{\partial t} - 2(v(0, t) + 2\lambda) \frac{\partial \tilde{\psi}_1(-n, \lambda, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} \tilde{\psi}_1(-n, \lambda, t) = \\ = A(\lambda, t)\tilde{\psi}_1(-n, \lambda, t) + B(\lambda, t)\tilde{\psi}_2(-n, \lambda, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Согласно [6, с. 348] имеем

$$\tilde{\psi}_{1,2}(-n, \lambda, t) = \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^{\pm n},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_{1,2}(-n, \lambda, t) = \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^{\pm n} m_{1,2}(\lambda, t).$$

Поскольку функция $\left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^n$ не зависит от t , то соотношение (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned} -2(v(0, t) + 2\lambda)m_1(\lambda, t) \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^n + \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^n = \\ = A(\lambda, t) \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^n + B(\lambda, t) \left(F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \right)^{-n}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $F(\lambda) + \sqrt{F^2(\lambda) - 1} \neq \pm 1$ при $\lambda \in \text{Int } \sigma$, находим

$$A(\lambda, t) = -2(v(0, t) + 2\lambda)m_1(\lambda, t) + \frac{\partial v(0, t)}{\partial x}, \quad B(\lambda, t) = 0,$$

и, следовательно, (3.4) доказано.

2. Учитывая, что $c_{12}(\lambda, t) \neq 0$, записываем первое равенство (2.12) в виде

$$\frac{\psi_1(x, \lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} = \frac{c_{11}(\lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \phi_1(x, \lambda) + \phi_2(x, \lambda, t), \quad \lambda > 0. \quad (3.6)$$

Применяя оператор M к левой и правой частям этого равенства и учитывая соотношения (3.4) и $M[\phi_{1,2}(x, \lambda, t)] = \mp 4i(\sqrt{\lambda})^3 \phi_{1,2}(x, \lambda, t)$ [7, с. 297], находим

$$\begin{aligned} M \left[\frac{\psi_1(x, \lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \right] = \frac{\psi_1(x, \lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \left(c_{12}(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c_{12}(\lambda, t)} + \right. \\ \left. + \left(-2(v(0, t) + 2\lambda)m_1(\lambda, t) + \frac{\partial v(0, x)}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} M \left[\frac{c_{11}(\lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \phi_1(x, \lambda, t) + \phi_2(x, \lambda, t) \right] = \frac{c_{11}(\lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \phi_1(x, \lambda, t) \times \\ \times \left(\frac{c_{12}(\lambda, t)}{c_{11}(\lambda, t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c_{11}(\lambda, t)}{c_{12}(\lambda, t)} \right) - 4i(\sqrt{\lambda})^3 \right) + 4i(\sqrt{\lambda})^3 \phi_2(x, \lambda, t). \end{aligned}$$

Вследствие линейной независимости функций $\phi_1(x, \lambda, t)$ и $\phi_2(x, \lambda, t)$, сравнивая соотношения (3.7) с (3.6), приходим к дифференциальному уравнению для коэффициента $c_{12}(\lambda, t)$:

$$c_{12}(\lambda, t) \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c_{12}(\lambda, t)} = 2(v(0, t) + 2\lambda)m_1(\lambda, t) - \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} + 4i(\sqrt{\lambda})^3.$$

Интегрируя это уравнение, получаем формулу (3.3).

Лемма 3.1 доказана.

4. Регуляризованные интегралы движения. Покажем, что существует бесконечная серия интегралов движения для решения $u(x, t)$ задачи Коши (3.1), (3.2). Положим

$$Q(x, -\sqrt{\lambda}, t) \equiv \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{w_j(x, t)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^j} + \frac{w_{n+1}(x, \pm\sqrt{\lambda}, t)}{(\pm 2i\sqrt{\lambda})^{n+1}} \right),$$

где $w_j(x, t)$ определяются в виде (2.18). Тогда решения $y(x, -\sqrt{\lambda}, t)$ и $\phi_2(x, \sqrt{\lambda}, t)$, определенные в лемме 2.2 и соотношении (2.30), принимают вид

$$y(x, -\sqrt{\lambda}, t) = \exp \left(-i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \tilde{\sigma}(\xi, -\sqrt{\lambda}, t) d\xi + \int_{-\infty}^x Q(\xi, -\sqrt{\lambda}, t) d\xi \right), \quad (4.1)$$

$$\phi_2(x, \lambda, t) = \exp \left(-i\sqrt{\lambda}x - \int_x^{+\infty} \sigma(\xi, -\sqrt{\lambda}, t) d\xi \right). \quad (4.2)$$

Функции $\sigma(x, -\sqrt{\lambda}, t)$, $\tilde{\sigma}(x, -\sqrt{\lambda}, t)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ разлагаются в асимптотические ряды

$$\tilde{\sigma}(x, -\sqrt{\lambda}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\sigma}_j(x, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j}, \quad \sigma(x, -\sqrt{\lambda}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j(x, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j},$$

где $\tilde{\sigma}_j(x, t)$ и $\sigma_j(x, t)$ удовлетворяют соотношениям вида (2.4), (2.5) при $\tilde{\sigma}_1(x, t) = v(x, t)$ и $\sigma_1(x, t) = u(x, t)$. Подставляя (4.1) в уравнение Шредингера, получаем, что функция $Q(x, -\sqrt{\lambda}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q'(x, -\sqrt{\lambda}, t) - 2i\sqrt{\lambda}Q(x, -\sqrt{\lambda}, t) + 2\tilde{\sigma}(x, -\sqrt{\lambda}, t)Q(x, -\sqrt{\lambda}, t) + Q^2(x, -\sqrt{\lambda}, t) = u(x, t) - v(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $Q(x, -\sqrt{\lambda}, t)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ разлагается в асимптотический ряд

$$Q(x, -\sqrt{\lambda}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Q_j(x, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j},$$

в котором коэффициенты представляются в виде

$$Q_1(x, t) = u(x, t) - v(x, t),$$

$$Q_{j+1}(x, t) = -Q'_j(x, t) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{\sigma}_l(x, t) Q_{j-l}(x, t) - \sum_{l=1}^{j-1} Q_{j-l}(x, t) Q_l(x, t). \quad (4.3)$$

Рассмотрим первое равенство вида (2.12):

$$\psi_1(x, \lambda, t) = c_{11}(\lambda, t)\phi_1(x, \lambda, t) + c_{12}\phi_2(x, \lambda, t), \quad \lambda > 0. \quad (4.4)$$

Из формул вида (2.19) и (2.20) получаем асимптотическую формулу

$$\psi_1(x, \lambda, t) = y(x, -\sqrt{\lambda}, t)(1 + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2})),$$

где n — любое фиксированное натуральное число. Из соотношений (2.18) и (2.27) в случае, когда $u(x, t) \in V$, получаем, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ функция $c_{11}(\lambda, t)$ стремится к нулю быстрее любой степени $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Тогда из (4.4) получаем асимптотическое равенство

$$y(x, -\sqrt{\lambda}, t) = c_{12}(\lambda, t)\phi_2(x, \lambda, t) + \underline{O}(|\lambda|^{-n/2}).$$

Выразим в этом равенстве $c_{12}(\lambda, t)$ через $c_{12}(\lambda, 0)$ согласно лемме 3.1. Учитывая вид решений (4.1), (4.2) и асимптотическую формулу в лемме 2.1, имеем

$$\begin{aligned} & \exp \left(-i\sqrt{\lambda}x + \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{\tilde{\sigma}_j(\xi, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\xi + \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \frac{Q_j(\xi, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\xi \right) = \\ & = c_{12}(\lambda, 0) \exp \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{-2v(0, \tau)\tilde{\sigma}_j(0, \tau) + \tilde{\sigma}_{j+2}(0, \tau)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\tau - \sum_{j=1}^{+\infty} \int_x^\infty \frac{\sigma_j(\xi, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\xi - i\sqrt{\lambda}x \right). \end{aligned}$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$ и разлагая $\ln c_{12}(\lambda, 0)$ в ряд по степеням $-2i\sqrt{\lambda}$, получаем

$$\begin{aligned} & \exp \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{Q_j(\xi, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_j(\xi, t)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\xi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t \frac{2v(0, \tau)\tilde{\sigma}_j(0, \tau) - \tilde{\sigma}_{j+2}(0, \tau)}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} d\tau \right) \right) = \exp \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{(-2i\sqrt{\lambda})^j} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую части этого равенства при одинаковых степенях $-2i\sqrt{\lambda}$, имеем

$$\begin{aligned} I_j[u, t] &= \int_{-\infty}^0 Q_j(\xi, t) d\xi + \int_0^{+\infty} \sigma_j(\xi, t) d\xi + \\ & + \int_0^t (2v(0, \tau)\tilde{\sigma}_j(0, \tau) - \tilde{\sigma}_{j+2}(0, \tau)) d\tau = c_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, $\frac{dI_j[u, t]}{dt} = 0$, т. е. $I_j[u, t]$ — интегралы движения, хотя они явно зависят от времени. Исходя из рекуррентных соотношений вида (2.5) и (4.3), нетрудно убедиться, что

подынтегральные выражения $I_j[u, t]$ при четных j являются полными производными. Запишем интегралы движения $I_j[u, t]$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, в явном виде

$$I_1[u, t] = \int_{-\infty}^0 (u(\xi, t) - v(\xi, t)) d\xi + \int_0^{\infty} u(\xi, t) d\xi + \int_0^t (3v^2(0, \tau) - v_{\xi\xi}(0, \tau)) d\tau,$$

$$I_2[u, t] = v(0, 0),$$

$$I_3[u, t] = \int_{-\infty}^0 (-u^2(\xi, t) + v^2(\xi, t) + u_{\xi\xi}(\xi, t) - v_{\xi\xi}(\xi, t)) d\xi + \int_0^{\infty} (-u^2(\xi, t) + u_{\xi\xi}(\xi, t)) d\xi + \\ + \int_0^t (-4v^3(0, \tau) + 8v(0, \tau)v_{\xi\xi}(0, \tau) + 5v_{\xi}^2(0, \tau) - v^{(4)}(0, \tau)) d\tau,$$

$$I_4[u, t] = -2v^2(0, 0) + v_{xx}(0, 0),$$

$$I_5[u, t] = \int_{-\infty}^0 (2u^3(\xi, t) - 2v^3(\xi, t) + u_{\xi}^2(\xi, t) - v_{\xi}^2(\xi, t) + u^{(4)}(\xi, t) - v^{(4)}(\xi, t)) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\infty} (2u^3(\xi, t) + u_{\xi}^2(\xi, t) + u^{(4)}(\xi, t)) d\xi +$$

$$+ \int_0^t (9v^4(0, \tau) - 42v^2(0, \tau)v_{\xi\xi}(0, \tau) - 60v(0, \tau)v_{\xi}^2(0, \tau) + 12v(0, \tau)v^{(4)}(0, \tau) -$$

$$+ 28v_{\xi}(0, \tau)v^{(3)}(0, \tau) + 19v_{\xi\xi}^2(0, \tau) - v^{(6)}(0, \tau)) d\tau,$$

$$I_6[u, t] = \frac{16}{3} v^3(0, 0) - 8vv_{xx}(0, 0) - 5v_x^2(0, 0) + v^{(4)}(0, 0).$$

Нетрудно убедиться, что уравнение КдФ представимо в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_5[u, t]}{\delta u},$$

где символ $\frac{\delta}{\delta u}$ обозначает производную Фреше.

5. Регуляризованные интегралы движения для постоянного фона. Рассмотрим случай, когда решения задачи Коши стремятся к постоянному фону при $x \rightarrow -\infty$, т. е. $v(x, t) = c = \text{const}$. Тогда, учитывая (4.5) и рекуррентные соотношения (2.5), нетрудно убедиться, что нечетные интегралы движения зависят от времени явно по линейному закону. Первые семь

интегралов имеют вид

$$I_1[u, t] = \int_{-\infty}^0 (u(\xi, t) - c) d\xi + \int_0^{\infty} u(\xi, t) d\xi + 3c^2t, \quad I_2[u, t] = c,$$

$$I_3[u, t] = \int_{-\infty}^0 (-u^2(\xi, t) + c^2) d\xi + \int_0^{\infty} (-u^2(\xi, t)) d\xi - 4c^3t, \quad I_4[u, t] = -2c^2,$$

$$I_5[u, t] = \int_{-\infty}^0 (2u^3(\xi, t) + u_\xi^2(\xi, t) - 2c^3) d\xi + \int_0^{\infty} (2u^3(\xi, t) + u_\xi^2(\xi, t)) d\xi + 9c^4t,$$

$$I_6[u, t] = \frac{16}{3} c^3,$$

$$I_7[u, t] = \int_{-\infty}^0 (-5u^4(\xi, t) - 10u(\xi, t)(u'_\xi(\xi, t))^2 - (u''_{\xi\xi}(\xi, t))^2 + 5c^4) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} (-5u^4(\xi, t) - 10u(\xi, t)(u'_\xi(\xi, t))^2 - (u''_{\xi\xi}(\xi, t))^2) d\xi - 24c^5t.$$

Учитывая это, легко построить последовательность интегралов, не зависящую явно от времени. Запишем три первых из них:

$$J_1[u] = I_3[u, t] + \frac{4}{3} cI_1[u, t] = \int_{-\infty}^0 \left(-u^2(\xi, t) + \frac{4}{3} cu(\xi, t) - \frac{1}{3} c^2 \right) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} \left(-u^2(\xi, t) + \frac{4}{3} cu(\xi, t) \right) d\xi,$$

$$J_2[u] = I_5[u, t] - 3c^2I_1[u, t] = \int_{-\infty}^0 (2u^3(\xi, t) - 3c^2u(\xi, t) + u_\xi^2(\xi, t) + c^3) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} (2u^3(\xi, t) - 3c^2u(\xi, t) + u_\xi^2(\xi, t)) d\xi,$$

$$J_3[u] = I_7[u, t] + 8c^3I_1[u, t] =$$

$$= \int_{-\infty}^0 (-5u^4(\xi, t) - 10u(\xi, t)u_{\xi}^2(\xi, t) + 8c^3u(\xi, t) - u_{\xi\xi}^2(\xi, t) - 3c^4) d\xi + \\ + \int_0^{\infty} (-5u^4(\xi, t) - 10u(\xi, t)u_{\xi}^2(\xi, t) + 8c^3u(\xi, t) - u_{\xi\xi}^2(\xi, t)) d\xi.$$

Легко проверить, что решение задачи Коши может быть представлено в гамильтоновой форме

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx} \frac{\delta J_2[u]}{\delta u}.$$

В дальнейшем интегралы движения $J_j[u]$, $j = 1, 2, 3, \dots$, будут выражены через данные рассеяния и построена симплектическая структура.

1. Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. – 1967. – **19**. – P. 1095–1097.
2. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. Korteweg–de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys. – 1968. – **9**, № 8. – P. 1204–1209.
3. Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J. Korteweg–de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws // J. Math. Phys. – 1970. – **11**, № 3. – P. 952–960.
4. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations and solitary waves // Commun. Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 2. – P. 467–490.
5. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 4. – P. 18–27.
6. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – Т. 2. – 555 с.
7. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977.
8. Ермакова В. Д. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с неубывающим потенциалом и ее применение к интегрированию уравнения Кортевега–де Фриза: Дис... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1983.
9. Фирсова Н. Е. Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Мат. заметки. – 1974. – **18**, № 6. – С. 831–843.
10. Egorova I., Teshl G. On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments // J. d'Anal. Math. – 2011. – **115**, № 1. – P. 71–101.
11. Новиков С. П. Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, вып. 3. – P. 54–66.
12. Марченко В. А. Периодическая задача Кортевега–де Фриза // Мат. сб. – 1974. – **8**, вып. 3. – С. 331–356.

Получено 25.11.14