УДК 517.911

А. В. Плотников (Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры)

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

We justify the applicability of the method of complete averaging on a finite segment for differential inclusions with fuzzy right-hand sides containing a small parameter.

Наведено обгрунтування можливості застосування методу повного усереднення на скінченному проміжку для диференціальних включень із нечіткою правою частиною, які містять малий параметр.

1. Введение. В 1990 г. J.-P. Aubin [1] и В. А. Байдосов [2, 3] ввели в рассмотрение дифференциальные включения с нечеткою правою частью. Их подход основан на сведении последних к обычным дифференциальным включениям. В 1995 г. E. Hüllermeier [4 – 6] ввел понятие R-решения аналогично тому, как это было сделано в работе [7]. В дальнейшем в работах [8 – 17] рассматривались различные свойства решений нечетких дифференциальных включений, а также их приложения при моделировании различных физических процессов.

В работах [18, 19] была доказана возможность применения схем полного и частичного усреднения для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр. При доказательстве этих теорем использовался метод доказательства, предложенный В. А. Плотниковым для обоснования схем усреднения обычных дифференциальных включений [20 – 25]. В данной работе доказывается возможность применения схемы полного усреднения для нечетких дифференциальных включений без перехода к рассмотрению отдельных решений, т. е. все оценки проводятся для R-решений соответствующих нечетких систем.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{conv}(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G)=\max\left\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}||f-g||,\sup_{g\in G}\inf_{f\in F}||f-g||\right\},$$

где под $||\cdot||$ понимается евклидова норма в пространстве R^n.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $\zeta\colon R^n\to[0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) ζ полунепрерывно сверху, т. е. для любых $x'\in R^n$ и $\varepsilon>0$ существует $\delta(x',\varepsilon)>0$ такое, что для всех $\|x-x'\|<\delta$ выполняется условие $\zeta(x)<\zeta(x')+\varepsilon$;

2) ζ нормально, т. е. существует $x_0\in R^n$ такое, что $\zeta(x_0)=1$;

3) ζ нечетко выпукло, т. е. для любых $x',x''\in R^n$ и любого $\lambda\in[0,1]$ выполняется неравенство $\zeta(\lambda x'+(1-\lambda)x'')\geq\min\{\zeta(x'),\zeta(x'')\}$;

4) замыкание множества $\{x\in R^n\ :\ \zeta(x)>0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение $\hat{0}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\in R^n\backslash 0.\end{cases}$

Определение 1. *α-Срезкой $[\zeta]^\alpha$ отображения $\zeta\in E^n$ при $0<\alpha\leq1$ назовем множество $\{x\in R^n:\zeta(x)\geq\alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $\zeta\in E^n$ назовем замыкание множества $\{x\in R^n:\zeta(x)>0\}$.*

Теорема 1 [26]. *Если* $\zeta \in E^n$, *то*:

1) $[\zeta]^\alpha \in \mathrm{conv}(R^n)$ *для всех* $0 \le \alpha \le 1$;

2) $[\zeta]^{\alpha_2} \subset [\zeta]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$;

3) *если* $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — *неубывающая последовательность, сходящаяся к* $\alpha > 0$, *то* $[\zeta]^\alpha = \bigcap_{k \ge 1} [\zeta]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ — *семейство подмножеств* R^n, *удовлетворяющих условиям* $1-3$, *то существует отображение* $\zeta \in E^n$ *такое, что* $[\zeta]^\alpha = A^\alpha$ *для* $0 < \alpha \le 1$ *и* $[\zeta]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\le 1} A^\alpha}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D\colon E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, положив

$$D(\zeta, \xi) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} h([\zeta]^\alpha, [\xi]^\alpha).$$

Из результатов [27] следует, что:

1) (E^n, D) является полулинейным полным метрическим пространством;

2) $D(\zeta + \chi, \xi + \chi) = D(\zeta, \xi), \quad D(k\zeta, k\xi) = kD(\zeta, \xi)$ для всех $\zeta,\ \xi,\ \chi \in E^n$ и $k \ge 0$.

3. Нечеткое дифференциальное включение. *R*-решение. Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \qquad x(0) \in X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T] \subset R_+$, $x \in R^n$, $F\colon [0,T] \times R^n \to E^n$, $X_0 \in E^n$.

Определение 2 [4]. *Функция* $x(\cdot)\colon [0, T] \to R^n$ *называется* α-*решением дифференциального включения* (1), *если она абсолютно непрерывна и удовлетворяет дифференциальному включению*

$$\dot{x} \in [F(t, x)]^\alpha, \qquad x(0) \in [X_0]^\alpha$$

почти всюду на $[0, T]$.

Множество α-решений дифференциального включения (1) на отрезке $[0, T]$ обозначим через X_α, а его сечение в момент времени $t \in [0, T]$ — через $X_\alpha(t)$.

Как известно [5, 6, 9], семейство $\{X_\alpha(t) : \alpha \in [0, 1]\}$ может не удовлетворять условиям теоремы 1, т. е. сечение множества решений системы (1) может не принадлежать пространству E^n, так как $X_\alpha(t)$ может быть компактным множеством в пространстве R^n, но не быть выпуклым.

В связи с этим далее будем рассматривать R-решение $X(\cdot)\colon [0, T] \to E^n$ дифференциального включения (1).

Определение 3. *R-решением дифференциального включения* (1) *назовем полунепрерывное сверху нечеткое отображение* $X(\cdot)\colon [0, T] \to E^n$, *которое удовлетворяет системе*

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} h\left([X(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x \in [X(t)]^\alpha} \left\{ x + \int_t^{t+\sigma} [F(s, x)]^\alpha ds \right\} \right) = o(\sigma), \quad X(0) = X_0, \tag{2}$$

где $\lim_{\sigma \to 0_+} \dfrac{o(\sigma)}{\sigma} = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $F(t, x)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $F(\cdot, x)$ *измеримо по* t *на* $[0, T]$;

2) $F(t, \cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* λ *на* R^n, *т. е.*

$$D(F(t, x'), F(t, x'')) \le \lambda \|x' - x''\|;$$

3) *существует* $\gamma > 0$ *такое, что для почти всех* $t \in R_+$ *и для всех* $x \in R^n$

$$D(F(t,x),\hat{0}) \leq \gamma;$$

4) *для всех* $\beta \in [0,1]$, $x', x'' \in R^n$ *и почти всех* $t \in [0,T]$

$$F(t,\beta x' + (1-\beta)x'') \supset \beta F(t,x') + (1-\beta)F(t,x'').$$

Тогда на некотором отрезке $[0,\tau] \subset [0,T]$ *существует единственное R-решение* $X(t)$ *дифференциального включения* (1).

Доказательство. Рассмотрим шар $S_r(X_0) = \{X \in E^n \colon D(X,X_0) \leq r\}$. Пусть $\tau = \min\{T, r/\gamma\}$. Из результатов [5, 6] следует, что сечение множества решений нечеткого дифференциального включения (1) принадлежит пространству E^n для всех $t \in [0,\tau]$.

Разобьем отрезок $[0,\tau]$ точками $t_k^p = k\tau 2^{-p}$ на $P = 2^p$ частей и определим обобщенные ломаные Эйлера $X^P(t)$ так, что

$$[X^P(t)]^\alpha = \bigcup_{x\in[X^P(t_k^P)]^\alpha} \left\{ x + \int_{t_k^P}^{t} [F(s,x)]^\alpha ds \right\}, \tag{3}$$

$t \in [t_k^P, t_{k+1}^P]$, $k = 0,1,\ldots,2^p$, $X^P(0) = X_0$, $\alpha \in [0,1]$.

Поскольку $X_0 \in E^n$ и $F(t,x) \in E^n$ для всех $(t,x) \in [0,\tau] \times S_r([X_0]^0)$, то $X^P(t) \in E^n$ для всех $t \in [0,\tau]$.

Известно [7, 25], что каждая последовательность $\{[X^P(\cdot)]^\alpha\}_{p=1}^\infty$ является равностепенно непрерывной и фундаментальной, а ее предел — единственным R-решением $[X(t)]^\alpha$ соответствующего дифференциального включения

$$\dot{x} \in [F(t,x)]^\alpha, \qquad x(0) \in [X_0]^\alpha,$$

которое совпадает с множеством решений данного включения, а также удовлетворяет уравнению

$$h\left([X(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x\in[X(t)]^\alpha} \left\{ x + \int_t^{t+\sigma} [F(s,x)]^\alpha ds \right\} \right) = o(\sigma), \qquad [X(0)]^\alpha = [X_0]^\alpha.$$

Теорема доказана.

Одновременно с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} \in G(t,y), \qquad y(0) \in Y_0, \tag{4}$$

где $t \in R_+^1$, $y \in R^n$, $G \colon R^1 \times R^n \to E^n$, $Y_0 \in E^n$.

Лемма 1. *Пусть* $F(t,x)$ *и* $G(t,x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 2 *и, кроме того, для почти всех* $t \in [0,T]$ *и всех* $x \in R^n$

$$D(F(t,x),G(t,x)) \leq \eta, \qquad D(X_0,Y_0) \leq \mu. \tag{5}$$

Тогда для $t \in [0,T]$ *справедлива оценка*

$$D(X(t),Y(t)) \leq \mu e^{\lambda t} + \frac{\eta}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right). \tag{6}$$

Доказательство. Разобьем промежуток $[0,T]$ на m частей точками $t_i^m = i \cdot \Delta,\ \Delta = T/m,\ i = \overline{1, m-1}$.

Тогда для $t \in [t_k^m, t_{k+1}^m) \subset [0,T]$ имеем

$$D(X(t), Y(t)) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([X(t)]^\alpha, [Y(t)]^\alpha) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left(\bigcup_{x \in [X(t_k)]^\alpha} \left\{ x + \int_{t_k}^{t} [F(s,x)]^\alpha ds \right\}, \bigcup_{y \in [Y(t_k)]^\alpha} \left\{ y + \int_{t_k}^{t} [G(s,y)]^\alpha ds \right\} \right) + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left([X(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[X(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds, [Y(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [G(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left([X(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[X(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds, [X(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) +$$

$$+ \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left([X(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds, [Y(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) +$$

$$+ \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left([Y(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds), [Y(t_k)]^\alpha + \int_{t_k}^{t} [G(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left(\int_{t_k}^{t} [F(s,[X(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds, \int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) + \sup_{\alpha \in [0,1]} h([X(t_k)]^\alpha, [Y(t_k)]^\alpha) +$$

$$+ \sup_{\alpha \in [0,1]} h\left(\int_{t_k}^{t} [F(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds), \int_{t_k}^{t} [G(s,[Y(t_k)]^\alpha)]^\alpha ds \right) + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \int_{t_k}^{t} \lambda D(X(t_k), Y(t_k)) ds + D(X(t_k), Y(t_k)) + \int_{t_k}^{t} D(F(s, Y(t_k)), G(s, Y(t_k))) ds + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \int_{t_k}^{t} \lambda D(X(t_k), Y(t_k)) ds + D(X(t_k), Y(t_k)) + \int_{t_k}^{t} \eta ds + o(\Delta) \leq$$

$$\leq ((t - t_k)\lambda + 1) D(X(t_k), Y(t_k)) + (t - t_k)\eta + o(\Delta) \leq$$

$$\leq \mu e^{\lambda t} + \frac{\eta}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1).$$

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Если $X_0 = Y_0$, то для всех $t \in [0, T]$

$$D(X(t), Y(t)) \leq \frac{\eta}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right). \tag{7}$$

4. Схема полного усреднения. Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение с малым параметром стандартного вида

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t, x), \qquad x(0) \in X_0, \tag{8}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in R_+$ — время, $x \in R^n$ — фазовый вектор, $F\colon R_+ \times R^n \to E^n$ — нечеткое отображение, $X_0 \in E^n$.

Системе (8) поставим в соответствие усредненную систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt} \in \varepsilon \overline{F}(\overline{x}), \qquad \overline{x}(0) \in X_0, \tag{9}$$

где

$$\overline{F}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(t, x) dt. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть в области* $Q = \{(t, x) \colon t \geq 0,\ x \in D \in \mathrm{conv}(R^n)\}$ *выполняются следующие условия*:

1) $F(\cdot, x)$ *измеримо по* t *на* R_+ *для всех* $x \in D$;

2) $F(t, \cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* λ *для почти всех* $t \in R_+$, *т. е.*

$$D(F(t, x'), F(t, x'')) \leq \lambda \|x' - x''\|;$$

3) *существует* $\gamma > 0$ *такое, что для почти всех* $t \in R_+$ *и для всех* $x \in D$

$$D(F(t, x), \hat{0}) \leq \gamma;$$

4) *для всех* $\beta \in [0, 1]$, $x', x'' \in R^n$ *и почти всех* $t \in [0, T]$

$$F(t, \beta x' + (1 - \beta) x'') \supset \beta F(t, x') + (1 - \beta) F(t, x'');$$

5) *равномерно относительно* x *в области* D *существует предел* (10);

6) *для всех* X_0 *таких, что* $[X_0]^0 \subset D' \subset D$, *некоторая* ρ*-окрестность 0-срезки* R*-решения включения* (9) *лежит в области* D.

Тогда для любых $0 < \eta < \rho$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon^0(\eta, L) > 0$, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ *на отрезке* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство*

$$D(X(t), \overline{X}(t)) < \eta,$$

где $X(t)$ *и* $\overline{X}(t)$ — *соответствующие* R*-решения включений* (8) *и* (9).

Доказательство. Из условий 1 – 4 и теоремы 2 следует, что R-решение системы (8) существует и единственное.

Далее, из условий 1 – 3, 5 следует, что нечеткое отображение $\overline{F}(x)$ равномерно ограничено постоянной γ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ, т. е.

$$D(\overline{F}(x),\hat{0}) \le D\left(\overline{F}(x), \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x)ds\right) + D\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x)ds, \hat{0}\right) \le \delta(T)+\gamma,$$

$$D(\overline{F}(x_1),\overline{F}(x_2)) \le D\left(\overline{F}(x_1), \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x_1)ds\right) + D\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x_1)ds, \frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x_2)ds\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(s,x_2)ds, \overline{F}(x_2)\right) \le 2\delta(T) + \lambda\|x_1-x_2\|,$$

где $\lim_{T\to\infty}\delta(T)=0$ согласно предположению 5. Кроме того, легко можно показать, что $\overline{F}(x)$ удовлетворяет условию 4, т. е. для всех $\beta\in[0,1]$, $t\in R_+$, x', $x''\in D$

$$\overline{F}(\beta x'+(1-\beta)x'') = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,\beta x'+(1-\beta)x'')dt \supset$$

$$\supset \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T (\beta F(t,x')+(1-\beta)F(t,x''))dt =$$

$$=\beta\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,x')dt + (1-\beta)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t,x'')dt = \beta\overline{F}(x')+(1-\beta)\overline{F}(x'').$$

Следовательно, R-решение для системы (9) также существует и единственное.

Теперь разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m частей точками $t_k=\dfrac{kL}{\varepsilon m}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, и определим нечеткие отображения $X^m(t)$ и $\overline{X}^m(t)$ такие, что для всех $\alpha\in[0,1]$, $t\in[t_k,t_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,m-1$

$$[X^m(t)]^\alpha = \bigcup_{x\in[X^m(t_k)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^t [F(s,x)]^\alpha ds\right\}, \qquad [X^m(0)]^\alpha=[X_0]^\alpha, \tag{11}$$

$$[\overline{X}^m(t)]^\alpha = \bigcup_{x\in[\overline{X}^m(t_k)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^t [\overline{F}(x)]^\alpha ds\right\}, \qquad [\overline{X}^m(0)]^\alpha=[X_0]^\alpha. \tag{12}$$

Тогда

$$D(X^m(t_k),X(t_k)) \le$$

$$\leq \sup_{\alpha\in[0,1]} h\left(\bigcup_{x\in[X^m(t_{k-1})]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[F(s,x)]^\alpha ds\right\}, \bigcup_{x\in[X(t_{k-1})]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[F(s,x)]^\alpha ds\right\}\right)+$$

$$+o(t_k-t_{k-1})\leq(1+\varepsilon(t_k-t_{k-1})\lambda)D(X^m(t_{k-1}),X(t_{k-1}))+$$

$$+o(t_k-t_{k-1})\leq\frac{o(t_k-t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}(\exp(\lambda L)-1). \tag{13}$$

Аналогично получаем

$$D(\overline{X}^m(t_k),\overline{X}(t_k))\leq\frac{o(t_k-t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}(\exp(\lambda L)-1). \tag{14}$$

Кроме того, для $t\in[t_k,t_{k+1}]$ имеем

$$D(X^m(t),X^m(t_k))\leq\sup_{\alpha\in[0,1]} h\left(\bigcup_{x\in[X^m(t_k)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds\right\},\ [X^m(t_k)]^\alpha\right)\leq$$

$$\leq\varepsilon\gamma(t-t_k)\leq\frac{\gamma L}{m}, \tag{15}$$

$$D(\overline{X}^m(t),\overline{X}^m(t_k))\leq\varepsilon\gamma(t-t_k)\leq\frac{\gamma L}{m}. \tag{16}$$

Из (13) – (16) следует, что для любого $\eta>0$ существует такое m_0, что при $m\geq m_0$ имеем

$$D(X^m(t),X(t))\leq\frac{\eta}{4}, \tag{17}$$

$$D(\overline{X}^m(t),\overline{X}(t))\leq\frac{\eta}{4}. \tag{18}$$

При $t=t_{k+1}$ в силу леммы 1 для любого $\nu>0$ существует такое $\varepsilon^0>0$, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ справедлива оценка

$$D(X^m(t_{k+1}),\overline{X}^m(t_{k+1}))\leq(\exp(\lambda L)-1)\nu/\lambda. \tag{19}$$

Зафиксировав $m\geq\max\{m_0,8\gamma L/\eta\}$ и выбрав затем $\nu<\dfrac{\eta\lambda}{4(\exp(\lambda L)-1)}$, из (17) – (19) получим утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если предположить, что $F(\cdot,x)$ непрерывно по t на $[0,T]$, то вместо уравнения (2) можно рассматривать более простое уравнение

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} h\left([X(t+\sigma)]^\alpha,\bigcup_{x\in[X(t)]^\alpha}\{x+\sigma[F(t,x)]^\alpha\}\right)=o(\sigma),\qquad X(0)=X_0,$$

и аналогично доказать все полученные ранее результаты.

5. Заключение. Полученные результаты дают возможность обосновать возможность применения схемы полного усреднения для систем управления нечеткими R-решениями (нечеткими пучками траекторий) [28 – 32], т. е. когда поведение объекта описывается управляемым дифференциальным включением с нечеткой правой частью, а также для некоторых нечетких задач управления, например для нечеткой задачи Майера [33 – 35].

1. *Aubin J.-P.* Fuzzy differential inclusions // Problems of Control and Inform. Theory. – 1990. – **19**, № 1. – P. 55 – 67.
2. *Байдосов В. А.* Дифференциальные включения с нечеткой правой частью // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 4. – С. 781 – 783.
3. *Байдосов В. А.* Нечеткие дифференциальные включения // Прикл. математика и механика. – 1990. – **54**, вып. 1. – С. 12 – 17.
4. *Hüllermeier E.* Towards modelling of fuzzy functions // EUFIT'95. – 1995. – P. 150 – 154.
5. *Hüllermeier E.* An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst. – 1997. – **7**. – P. 117 – 137.
6. *Hüllermeier E.* A fuzzy simulation method // First Int. ICSC Symp. on Intelligent Industrial Automation (IIA'96) and Soft Computing (SOCO'96) March 26 – 28, 1996 (Reading, United Kingdom).
7. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 3. – С. 429 – 437.
8. *Abbasbandy S., Viranloo T. A., Lopez-Pouso O., Nieto J. J.* Numerical methods for fuzzy differential inclusions // Comput. and Math. Appl. – 2004. – **48**. – P. 1633 – 1641.
9. *Agarwal R. P., O'Regan D., Lakshmikantham V.* A stacking theorem approach for fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – **55**. – P. 299 – 312.
10. *Agarwal R. P., O'Regan D., Lakshmikantham V.* Maximal solutions and existence theory for fuzzy differential and integral equations // J. Appl. Anal. – 2005. – **11**, № 2. – P. 171 – 186.
11. *Antonelli P. L., Krivan V.* Fuzzy differential inclusions as substitutes for stochastic differential equations in population biology // Open Systems and Inform. Dynamics. – 1992. – **1**, № 2. – P. 217 – 232.
12. *Colombo G., Krivan V.* Fuzzy differential inclusions and nonprobabilistic likelihood // S.I.S.S.A preprint 88/91/M.
13. *Guo M., Xue X., Li R.* Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – **138**. – P. 601 – 615.
14. *Lakshmikantham V.* Set differential equations versus fuzzy differential equations // Appl. Math. and Comput. – 2005. – **164**. – P. 277 – 294.
15. *Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.* Theory of set differential equations in metric spaces. – Cambridge Sci. Publ., 2006.
16. *Lakshmikantham V., Mohapatra R. N.* Theory of fuzzy differential equations and inclusions. – London: Taylor & Francis, 2003.
17. *Majumdar K. K., Majumder D. D.* Fuzzy differential inclusions in atmospheric and medical cybernetics // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern. B. – 2004. – **34**, № 2. – P. 877 – 887.
18. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side // J. Adv. Res. Dynam. Control Syst. – 2010. – **2**, № 2. – P. 26 – 34.
19. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Plotnikova L. I.* On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent // Iran. J. Optim. – 2010. – **2**, № 3. – P. 506 – 517.
20. *Klymchuk S., Plotnikov A., Skripnik N.* Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions. // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2012. – **241**, № 22. – P. 1932 – 1947.
21. *Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.
22. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 573 – 576.
23. *Плотников В. А.* Частичное усреднение дифференциальных включений // Мат. заметки. – 1980. – **27**, № 6. – С. 947 – 952.
24. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992.
25. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999.

26. *Negoita C. V., Ralescu D. A.* Application of fuzzy sets to systems analysis. – New York: Wiley, 1975.
27. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – **114.** – P. 409 – 422.
28. *Diamond P., Kloeden P. E.* Metric space of fuzzy sets, theory and applications. – World Sci. Publ., 1994.
29. *Молчанюк И. В., Плотников А. В.* Линейные системы управления с нечетким параметром // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 63 – 73.
30. *Молчанюк И. В., Плотников А. В.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в задачах управления с нечетким параметром // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 3. – С. 384 – 390.
31. *Najariyan M., Farahi M. H.* A new approach for the optimal fuzzy linear time invariant controlled system with fuzzy coefficients // J. Comput. and Appl. Math. – 2014. – **259**. – P. 682 – 694.
32. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Molchanyuk I. V.* Linear control differential inclusions with fuzzy right-hand side and some optimal problems // J. Adv. Res. Dynam. Control Syst. – 2011. – **3**, № 2. – P. 34 – 46.
33. *Plotnikov A. V., Komleva T. A.* The averaging of control linear fuzzy 2π-periodic differential equations // Dynam. Contin. Discrete Impulsive Syst. Ser. B: Applications & Algorithms. – 2011. – **18**, № 6. – P. 833 – 847.
34. *Plotnikov A. V., Komleva T. A., Molchanyuk I. V.* Linear control differential inclusions with fuzzy right-hand side and some optimal problems // J. Adv. Res. Dynam. Control Syst. – 2011. – **3**, № 2. – P. 34 – 46.
35. *Плотников А. В.* Усреднение нечетких управляемых дифференциальных включений с терминальным критерием качества // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 105 – 110.

Получено 04.02.14