УДК 512.54

В. И. Сенашов (Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Сиб. федер. ун-т, Красноярск, Россия)

О СИЛОВСКИХ ПОДГРУППАХ НЕКОТОРЫХ ГРУПП ШУНКОВА *

We study Shunkov groups with the following condition: the normalizer of any finite nonidentity subgroup has an almost layer-finite periodic part. Under this condition, we establish the structure of Sylow 2-subgroups in this group.

Вивчаються групи Шункова з умовою: нормалізатор будь-якої скінченної нетривіальної підгрупи має майже шарово скінченну періодичну частину. При цій умові у групі встановлено будову силовських 2-підгруп.

В. П. Шунков ввел класс сопряженно бипримитивно конечных групп, которые в 2000 г. стали называть его именем. В данной работе мы изучаем группы Шункова.

Группой Шункова называется группа G, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

На группу накладывается следующее условие: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть. Класс групп, удовлетворяющих этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [1] и группы, построенные А. Ю. Ольшанским [2].

Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. Этот класс групп введен С. Н. Черниковым в работе [3].

Почти слойно конечные группы — это расширения слойно конечных групп с помощью конечных групп.

Класс почти слойно конечных групп существенно шире класса слойно конечных групп. В нем содержатся все черниковские группы, в то же время легко указать пример черниковской группы, которая не является слойно конечной. Таким, например, будет расширение квазициклической группы с помощью обращающего автоморфизма.

Если произведение всех нормальных слойно конечных подгрупп группы слойно конечно, то оно называется *слойно конечным радикалом* группы.

Периодической частью группы называется множество ее элементов конечного порядка, если оно является группой.

В группах Шункова, не имеющих почти слойно конечной периодической части, нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы которых имеет почти слойно конечную периодическую часть, нас интересует строение силовских 2-подгрупп.

Ранее автором было доказано, что если в изучаемых группах силовская 2-подгруппа бесконечна, то она является расширением квазициклической 2-группы с помощью обращающего автоморфизма [4].

Автором изучались группы Шункова с сильно вложенной подгруппой [5 – 8]. Наиболее полный случай, когда группа Шункова содержит сильно вложенную подгруппу, имеющую почти слойно конечную периодическую часть, рассмотрен в [9], и этот результат мы используем в данной работе.

* Выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00509) и гранта Сибирского федерального университета (проект — алгебро-логические структуры и комплексный анализ).

Сильно вложенной называется собственная подгруппа, содержащая инволюции, которая пересекается с сопряженными с ней подгруппами по подгруппам без инволюций.

Изучались также группы Шункова при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [10] и при условии периодичности группы [11, 12], а также случай, когда в группе Шункова нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть [13].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — группа Шункова с инволюциями, не имеющая почти слойно конечной периодической части, с конечной силовской 2-подгруппой S. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы имеет почти слойно конечную периодическую часть, то справедливо, по крайней мере, одно из утверждений:*

1) *пересечение S со слойно конечным радикалом централизатора центральной инволюции из S является циклическим или обобщенной группой кватернионов;*

2) *группа S может быть одного из следующих типов:*

группой диэдра;

полудиэдральной группой;

2-группой Судзуки порядка 64;

абелевой группой типа $(2^m, 2^m), m > 1$;

$S = \langle b \rangle \wr \langle t \rangle$, *где* $b^{2^m} = t^2 = 1$, $m \geq 2$.

Аналогичная теорема для периодических групп доказана в работе [12]. Доказательство теоремы настоящей работы следует схеме доказательства из [12], но имеет специфику работы со смешанными группами. Например, мы не можем воспользоваться известной теоремой Шункова о периодической группе с почти регулярной инволюцией, которую существенно использовали в [12]. Нужно также иметь в виду, что практически при одинаковых формулировках леммы имеют доказательства, отличные от доказательств для периодического случая в работе [12]. В случае, который изучается в данной работе, мы ссылаемся на доказательства аналогичных лемм из работ [7, 13], в которых рассматривался случай смешанных групп.

В дальнейшем изучается группа Шункова G, не имеющая почти слойно конечной периодической части; нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G имеет почти слойно конечную периодическую часть.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Слойно конечные радикалы двух различных бесконечных максимальных почти слойно конечных подгрупп группы G пересекаются по единичной подгруппе.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 10 из [13, с. 98].

В леммах 2, 4 – 6 будем обозначать через V максимальную почти слойно конечную подгруппу группы G, содержащую инволюции.

Лемма 2. *Если для некоторого элемента u конечного порядка из G пересечение $C_G(u) \cap V$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(u)$ содержится в V.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 11 из [13, с. 99].

Лемма 3. *Все инволюции в G имеют централизаторы с бесконечной периодической частью.*

Доказательство совпадает с рассуждением, приведенным в [7, с. 204].

Лемма 4. *В подгруппе V нет элементарной абелевой подгруппы 8-го порядка с почти регулярной инволюцией в V.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 11 из [5, с. 477].

Почти регулярной в группе называется инволюция с конечным централизатором.

Лемма 5. 1. *Все инволюции с бесконечными централизаторами в V сопряжены в V.*

2. *Если k — инволюция из V и $C_V(k)$ конечен, то k индуцирует автоморфизм в некоторой абелевой нормальной подгруппе конечного индекса из V, переводящий каждый элемент этой подгруппы в обратный.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 14 из [5, с. 478].

Лемма 6. *Пусть b — элемент простого порядка и пересечения $C_G(b) \cap V$, $C_G(b) \cap V^g$ бесконечны. Тогда $H = H^g$.*

Доказательство следует непосредственно из лемм 1 и 2.

Лемма 7. *Все силовские 2-подгруппы в G конечны и сопряжены.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 из [14, с. 40].

Обозначим через S некоторую конечную силовскую 2-подгруппу из G, через i центральную инволюцию из S, через H максимальную почти слойно конечную подгруппу группы G, содержащую периодическую часть C группы $C_G(i)$ (такая максимальная подгруппа найдется по лемме Цорна и по теореме 1 из [13, с. 94]). Группа C является почти слойно конечной по условиям теоремы и бесконечной по лемме 3.

В силу основного результата из [9, с. 384] можем считать, что подгруппа $M = N_G(H)$ не является сильно вложенной подгруппой в группу G. Отсюда по лемме 6 непосредственно следует, что H имеет почти регулярную инволюцию. Зафиксируем за этой инволюцией обозначение j. Можем выбрать инволюцию $j \in S$ согласно лемме 7.

Пусть K — подгруппа из H, порожденная всеми инволюциями с бесконечными централизаторами в H. Слойно конечный радикал группы H будем обозначать через $R(H)$.

В леммах 8 – 10 используются введенные выше обозначения.

Лемма 8. *В H все инволюции с бесконечными централизаторами порождают абелеву подгруппу порядка не большего четырех.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 8 из [12, с. 1549].

Нам понадобится следующее определение: элемент называется *строго вещественным* относительно некоторой инволюции в группе, если он сопряжением с помощью этой инволюции переводится в обратный элемент.

Лемма 9. *Если $H \setminus R(H)$ не имеет инволюций, сопряженных с i в G, то для каждого элемента $g \in G \setminus M$ в группе G найдется инволюция t_g, сопряженная с i в G, такая, что $H^g = H^{t_g}$. Кроме того, пересечение $D_g = H \cap H^g$ является t_g-инвариантным и содержит элемент нечетного порядка, строго вещественный относительно инволюции t_g.*

Доказательство. Пусть r — инволюция из K. Рассмотрим подгруппу $F = \langle i, g^{-1}rg \rangle$. По свойствам групп диэдра $F = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle g^{-1}rg \rangle$, причем в силу того, что G является группой Шункова, элемент a имеет конечный порядок. Предположим, что a — элемент четного порядка и x — инволюция из $\langle a \rangle$. Очевидно, $x \in C_G(i)$, и если силовская 2-подгруппа из F

некоммутативна, то инволюции i, xi сопряжены в F, а значит и в G, причем $i, xi \in H$. По условию леммы $xi \in R(H)$, следовательно, $x \in R(H)$. Поскольку по лемме 2 $C_x \leq H$, где C_x — периодическая часть группы $C_G(x)$, элемент $g^{-1}rg$ из C_x также принадлежит H.

Далее, из конечности группы K по определению слойно конечного радикала и лемме 8 следует, что $r \in R(H)$. По лемме 5 i сопряжена с r, значит, $g^{-1}rg$ по условию леммы также принадлежит $R(H)$ и $g^{-1}rg \in K$. Но по лемме 5 инволюции $r, g^{-1}rg$ сопряжены в H, т. е. найдется элемент $h \in H$ такой, что $hg^{-1}rgh^{-1} = r$ и $gh^{-1} = f$, $f \in C_G(r)$.

В группе $f^{-1}Hf$ подгруппа $f^{-1}Kf$ порождена всеми инволюциями с бесконечными централизаторами в $f^{-1}Hf$ и содержится в слойно конечном радикале $R(f^{-1}Hf)$ группы $f^{-1}Hf$. Поскольку $r \in f^{-1}Kf$, то $r \in R(f^{-1}Hf)$. Теперь, учитывая, что $r \in R(H)$, по лемме 6 получаем $H = f^{-1}Hf$ и $f \in N_G(H) = M$. Поскольку $h \in N_G(H)$, убеждаемся, что $g = fh \in M$ вопреки условию леммы. Противоречие означает, что $\langle i\rangle \times \langle x\rangle$ — силовская 2-подгруппа в F. Одновременно получили, что $xi, x \in H \setminus R(H)$ и $g^{-1}rg \notin H$.

Поскольку силовские 2-подгруппы из F сопряжены в F, $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r \in \langle i\rangle \times \langle x\rangle$ для некоторого c_r нечетного порядка из $\langle a\rangle$. Если бы $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r = x$ или xi, то он содержался бы в $H \setminus R(H)$ и $r \in K < R(H)$ вопреки условиям леммы. Следовательно, $c_r^{-1}g^{-1}rgc_r = i$ и $c_r^{-2} = ig^{-1}rg = a$, т. е. a — элемент нечетного порядка, что невозможно по предположению.

Итак, a — элемент нечетного порядка и $i = c_r^{-1}g^{-1}rgc_r$, где $c_r \in \langle a\rangle$ и $r, i \in K < R(H)$. Отсюда следует, что $C_{H^{gc_r}}(i)$ бесконечен и $H = H^{gc_r}$ по лемме 6. По выбору c_r он имеет конечный нечетный порядок и $ic_ri = c_r^{-1}$, следовательно, инволюции i, t_g сопряжены в G. Теперь мы можем записать $H^g = H^{ic_r^{-1}}$ и, обозначив через t_g инволюцию ic_r^{-1}, получим первое утверждение леммы.

Рассмотрим пересечение $D_g = H \cap H^{t_g}$. Поскольку t_g является инволюцией, то $D_g^{t_g} = H^{t_g} \cap H = D_g$ и $t_g \in N_G(D_g)$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Предположим, что $H \setminus R(H)$ не имеет инволюций, сопряженных с i в G. Если V — подгруппа, сопряженная с H в G, h — нетривиальный p-элемент из $D = H \cap V$, то элемент h почти регулярен в H и V.*

Доказательство. Пусть $C_H(h)$ конечен, а $C_V(h)$ бесконечен и элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ из $C_V(h)$ такие, что $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ — различные подгруппы вида $H_n = g_n^{-1}Hg_n$, отличные от H. По лемме 9 элемент g_n имеет представление $g_n = h_n \cdot t_n$, где $h_n \in H$, t_n — инволюция, сопряженная с i в G. Отсюда $H_n = t_nHt_n$. Обозначим через D_n пересечение подгрупп H и H_n. Пусть P_n — силовская p-подгруппа из D_n, содержащая элемент h. В силу леммы 9 группа $\langle D_n, t_n\rangle$ имеет представление $D_n \leftthreetimes \langle t_n\rangle$, причем инволюцию t_n подберем таким образом, чтобы она нормализовала P_n. Тогда $t_n \in N_G(Z(P_n))$.

Среди подгрупп $Z(P_1), Z(P_2), \ldots, Z(P_n), \ldots$ существует лишь конечное число различных вследствие конечности централизатора $C_H(h)$. Множество различных подгрупп $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ также не может быть бесконечным, иначе нашлась бы подгруппа P_m, у которой бесконечен $C_H(Z(P_m))$, а это влечет включение t_m в периодическую часть нормализатора $N_G(Z(P_m))$, содержащуюся в H по лемме 2. Но тогда и g_m принадлежит H вопреки выбору g_m. Поэтому будем считать, не нарушая общности рассуждений, что

$$P = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = \ldots$$

и, значит, в нормализаторе $N_G(P)$ содержится бесконечно много инволюций $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Поскольку $N_G(P)$ имеет почти слойно конечную периодическую часть по условию теоремы, которая бесконечна по только что доказанному, вследствие конечности группы P и $C_G(P)$ также имеет бесконечную почти слойно конечную периодическую часть C_P. Группа C_P содержится в бесконечной периодической части группы $C_G(h)$ и по лемме 2 вместе с ней содержится в группе V. Получаем бесконечность пересечения $N_G(P) \cap V$. Включая периодическую часть группы $N_G(P)$ в максимальную почти слойно конечную подгруппу N, вследствие бесконечности пересечения максимальных почти слойно конечных подгрупп N и V по лемме 1 получаем включение N в V и принадлежность $t_n \in V$, $n = 1, 2, \ldots$.

Поскольку каждая из инволюций t_n, $n = 1, 2, \ldots$, сопряжена с инволюцией i в G, ни одна из них не попадает в $V \setminus R(V)$, где $R(V)$ — слойно конечный радикал группы V. Противоречие с наличием бесконечного множества инволюций в слойно конечном радикале $R(V)$ означает, что $C_H(h)$ бесконечен, но тогда $H = V$ по лемме 6. Полученное противоречие означает почти регулярность элемента h в группах H и V.

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к ***доказательству теоремы.*** Если $K = \langle i \rangle$, то H совпадает с периодической частью C централизатора $C_G(i)$ и согласно определению группы K в $R(H)$ существует только одна инволюция. Но так как конечная p-группа с единственной подгруппой порядка p является циклической или обобщенной группой кватернионов [15, с. 211], то силовские 2-подгруппы в $R(H)$ являются циклическими или обобщенными группами кватернионов.

Пусть $K \neq \langle i \rangle$. Предположим сначала, что $H \setminus R(H)$ не содержит инволюций, сопряженных с i в G. По лемме 8 K — элементарная абелева подгруппа четвертого порядка. Тогда H содержит элемент h нечетного простого порядка p, строго вещественный относительно некоторой инволюции t из $G \setminus M$, сопряженной с i в G, который найдется по лемме 9.

Обозначим через C_h периодическую часть централизатора $C_G(h)$. Группа $C_h \leftthreetimes \langle t \rangle$ почти слойно конечна по условию теоремы. В C_h возьмем силовскую 2-подгруппу Q. Подгруппа Q конечна по лемме 7. По лемме Фраттини [16, с. 225] можем считать Q t-инвариантной, т. е. $P = Q \leftthreetimes \langle t \rangle$ — 2-группа. Предположим, что Q имеет подгруппу R четвертого порядка. По лемме 7 $P^c \leq S$, где c — некоторый элемент из G.

Если R^c — четверная группа Клейна, то по теореме 2 из [16, с. 230] она имеет инволюцию r с бесконечным централизатором в H. По условиям теоремы периодическая часть C_r централизатора $C_G(r)$ почти слойно конечна и по лемме 2 $h^c \in C_r \leq H$, кроме того, $t^c \in H$. Поскольку инволюции t^c, i сопряжены в G, по предположению $t^c \in K$. Порядок K равен четырем и $t^c \in K \lhd H$. В то же время из строгой вещественности h относительно t имеем $t^c h^c t^c = (h^c)^{-1}$, что невозможно, так как h^c — элемент нечетного порядка из H.

Следовательно, R^c — циклическая группа и $h^c \in G \setminus H$. Покажем, что и это невозможно. Действительно, если $R^c \cap K \neq 1$, то по лемме 2 получаем противоречие с тем, что $h^c \in G \setminus H$. Пусть $R^c \cap K = 1$ и v — инволюция из R^c. Поскольку K — четверная группа Клейна, нормальная в H, то $K < C_G(v)$ и $|C_H(v)| < \infty$, и тогда получим противоречие с леммой 4.

Таким образом, в Q нет подгрупп четвертого порядка, следовательно, Q — подгруппа второго порядка. Если бы $p > 3$, то $K < C_G(h)$. Однако это невозможно, как мы только что заметили. Следовательно, $p = 3$. Заметим, что $h \notin R(H)$, так как в этом случае $N_G(\langle h\rangle) \cap H$ было бы бесконечным и по лемме 1 $t \in N_h \leq H$, где N_h — периодическая часть нормализатора $N_G(\langle h\rangle)$ вопреки выбору $t \in G \setminus H$. По лемме 5 все инволюции из K сопряжены между собой в H, и так как K — четверная группа Клейна, нормальная в H, то

$$H/C_H(K) = \langle \bar{b}\rangle \leftthreetimes \langle \bar{v}\rangle,$$

где $|\bar{b}| = 3, |\bar{v}| = 2$ и $\bar{v}\bar{b}\bar{v} = \bar{b}^{-1}$. Используя свойства почти слойно конечных групп и представление фактор-группы $H/C_H(K)$, убеждаемся, что H содержит пару элементов b, v такую, что b — 3-элемент, v — 2-элемент, $v^{-1}bv = b^{-1}$ и $bC_G(K) = \bar{b}, vC_G(K) = \bar{v}$.

Докажем, что v — инволюция. Если это не так, то $\langle v\rangle \cap C_G(K)$ имеет инволюцию x. Если $x \notin K$, то $C_H(x)$ конечен и получаем противоречие с леммой 4. Значит, $x \in K$ и $x \in C_G(b)$, где b — 3-элемент. Обозначим через C_K периодическую часть централизатора $C_G(K)$. Поскольку K — группа Клейна, то $K < C_H(b)$. Однако образ $\bar{b}$ элемента b неединичен в H/C_K, следовательно, $|v| = 2$.

Теперь докажем, что элемент b принадлежит $R(H)$. По лемме 5 найдется нормальная абелева подгруппа L конечного индекса в H, на которой v действует строго вещественно, т. е.

$$v^{-1}dv = d^{-1} \quad (d \in L), \qquad v^{-1}bv = b^{-1}.$$

Далее, $b^{-1}db \in L$ и $b^{-1}d^{-1}b = v^{-1}(b^{-1}db)v = bd^{-1}b^{-1}$ или $d^{-1} = b^{-2}d^{-1}b^2$, а так как b — элемент нечетного порядка, то $b \in \langle b^2\rangle < C_G(L)$, т. е. элемент b имеет централизатор, пересекающийся с H по подгруппе конечного индекса в H, значит, элемент b принадлежит $R(H)$.

Пусть A — силовская 3-подгруппа из H, содержащая элемент h. Поскольку H почти слойно конечна, в силу теоремы В. П. Шункова [17, с. 1292] силовские 3-подгруппы из H сопряжены в H и, как мы только что показали, $R(H)$ содержит 3-элемент. Следовательно, $1 \neq A \cap R(H) \lhd A$. В $Z(A)$ существует элемент s третьего порядка, и так как $h \in A$, то $s \in C_G(h)$. Возьмем в $C_G(h)$ некоторую силовскую 3-подгруппу Q, содержащую элементы h, s. Обозначим через C_h периодическую часть централизатора $C_G(h)$. Как показано выше, силовская 2-подгруппа из $C_G(h)$ может быть только группой порядка два. Отсюда и по теореме Брауэра–Судзуки [14, с. 11] $C_h = V \leftthreetimes \langle y\rangle$, где $|y| \leq 2$. Очевидно $V \lhd M = C_h \leftthreetimes \langle t\rangle$. В $N_M(Q)$ найдется инволюция t_1, сопряженная с t в M по лемме Фраттини [14, с. 225]. Если бы t_1 принадлежала H, то будучи сопряженной с i в G инволюция t_1 принадлежала бы K по предположению, а это противоречит равенствам $t_1^{-1}ht_1 = h^{-1}, \quad |h| = 3$ и почти регулярности h в H. Значит, $t_1 \notin H$.

Рассмотрим пересечение $D = Q \cap H$. Если Q не содержится в H, то по свойствам нильпотентных групп $N_H(D) \neq Q$. Возьмем элемент l из разности $N_H(D) \setminus D$ и рассмотрим пересечение $H \cap H^l$. Оно содержит элемент простого порядка s с бесконечным централизатором в H. По лемме 10 это невозможно. Значит, наше предположение неверно и Q содержится в H. Повторяя это рассуждение для инволюции t_1 вместо элемента l и подгруппы Q вместо D, получаем включение $t_1 \in H$, что противоречит доказанному выше. Это означает, что K не является четверной группой Клейна и H совпадает с периодической частью C централизатора $C_G(i)$.

Таким образом, если $H \setminus R(H)$ не содержит инволюций, сопряженных с i в G, то H совпадает с периодической частью централизатора $C_G(i)$ и силовские 2-подгруппы в $R(H)$ являются циклическими или обобщенными группами кватернионов. Выше показано, что это же справедливо, если предполагать, что $|K| = 2$.

Теперь выясним какое строение может иметь подгруппа S, если предполагать, что $|K| = 2$. Конечная 2-группа, в которой централизатор некоторой инволюции является четверной группой Клейна, либо является группой диэдра, либо полудиэдральной группой [14, с. 13]. Если $C_S(j) = \langle i\rangle \times \langle j\rangle = R$, то S — группа диэдра или полудиэдральная группа.

Пусть $C_S(j) \neq R$ и $j = g^{-1}ig, g \in G$. Поскольку $|C_H(j)| < \infty$, то $g \in G \setminus H$ и $H \neq g^{-1}Hg$. Рассмотрим $D = H \cap g^{-1}Hg$, V — силовская 2-подгруппа из D и $R < V < S$; P — силовская 2-подгруппа из H^g, содержащая V. По лемме 4 все инволюции из V содержатся в R и $R \leq Z(V)$. Следовательно, $R \lhd N_V$, где N_V — периодическая часть нормализатора $N_G(V)$.

Если $V = S = P$, то вследствие сопряженности силовских 2-подгрупп в H получаем

$$g^{-1}h^{-1}Shg = S = P,$$

где $h \in H$, т. е. $c = hg \in N_G(S)$. Элемент c не централизует R, иначе c принадлежит $C \leq H$, что невозможно. Значит c индуцирует в R нетождественный автоморфизм третьего порядка (в силу того, что S — силовская 2-подгруппа в G и $c \notin S$, элемент c не может индуцировать в R автоморфизм порядка два). Тогда S либо абелева группа, либо 2-группа Судзуки 64-го порядка [16, с. 242].

Пусть теперь $V \neq S$, значит, и $V \neq P$. Из нормализаторного условия в S и P следует, что $N_V \not\leq H$. Если бы некоторый элемент из N_V не индуцировал в R автоморфизм 3-го порядка, то, как и выше, имело бы место $N_V < H$, что невозможно, так как $N_P(V) \neq V$ и $P \cap H = V$. Следовательно, некоторый элемент из N_V индуцирует автоморфизм порядка три в R и V либо абелева типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64 [16, с. 242]. Но $C_S(j) \not< V$ и $C_S(j) \neq R$, значит, $m > 1$ и в V найдется элемент b такой, что $b^2 = j$.

Обозначим через Q силовскую 2-подгруппу из $R(H)$, причем $Q < S$. Выше показано, что она либо циклическая, либо обобщенная группа кватернионов.

Пусть сначала Q является циклической. По лемме 5 инволюция j индуцирует в некоторой абелевой нормальной подгруппе L из H автоморфизм, переводящий любой элемент в обратный. Значит, $jC_L \in Z(H/C_L)$ и по лемме 7 $X = Q \leftthreetimes \langle j\rangle \lhd S$ и содержит все инволюции из S, где C_L — периодическая часть централизатора $C_G(L)$. Рассмотрим $W = Q \leftthreetimes \langle b\rangle$. Поскольку $|b| > 2$ и Q является циклической, в силу того, что в p-группе вида $\langle c\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle$, где $|z| > 2$, все элементы порядка p порождают элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 [18, с. 763], все инволюции из W содержатся в R. Но $X < W$, следовательно, все инволюции из S содержатся в K. По предположению $C_S(R) = V \neq S$ и по доказанному выше $N_S(R)/C_S(R) = \langle\overline{d}\rangle \leftthreetimes \langle\overline{c}\rangle$, где $|\overline{d}| = 3, |\overline{c}| = 2$ и $\overline{c}^{-1}\overline{d}\overline{c} = \overline{d}^{-1}$ и c — 2-элемент из S, являющийся прообразом $\overline{c}$, d — 3-элемент из $N_G(R)$, являющийся прообразом элемента $\overline{d}$, причем $c^{-1}dc = d^{-1}$. Но $|R| = 4$ и последнее равенство невозможно, так как по доказанному выше все инволюции из S содержатся в R, а элемент d индуцирует в R автоморфизм 3-го порядка. Противоречие означает, что если Q —

циклическая группа, то $C_S(R) = V = S$ и S либо абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64.

Пусть теперь Q — обобщенная группа кватернионов. Докажем, что V абелева и $|S : V| = 2$. Возьмем в Q циклическую группу $\langle a\rangle$ наибольшего порядка, нормальную в S. Поскольку группа автоморфизмов циклической группы абелева [14, с. 7], фактор-группа $S/C_S(a)$ абелева и, значит, $j_1 = c^{-1}jc = jh$ для любого $c \in S$, где $h \in C_S(a)$. По лемме 7 j, j_1 индуцируют в некоторой абелевой подгруппе, нормальной и конечного индекса, в H автоморфизм, переводящий любой элемент в обратный. Это означает, что $h = jj_1 \in R(H)$ и $h \in C_S(a) \cap Q$. А так как $\langle a\rangle = C_S(a) \cap Q$, то $h \in \langle a\rangle$ и $T = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle j\rangle \lhd S$.

Далее, $T < M = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$. Поскольку $|b| > 2$, то снова вследствие того, что в p-группе вида $\langle c\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle$, где $|z| > 2$, все элементы порядка p порождают элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 [18, с. 763], все инволюции из M и, в частности, из T содержатся в R. Но $T \lhd S$, следовательно, $R \lhd S$. Тогда $C_S(R) = V \lhd S$ и $|S : V| = 2$. Как доказано, $N_G(V)$ содержит 3-элемент d, индуцирующий в R автоморфизм третьего порядка, причем для некоторого t из $S \quad t^{-1}dt = d^{-1}$.

Если $|t| \neq 2$, то в $\langle t\rangle \cap V$ содержится инволюция, централизующая d. Но тогда $d \in C_G(R)$, а это невозможно. Следовательно, t — инволюция из S и $t \notin V$. Таким образом, подгруппа V либо абелева группа типа $(2^m, 2^m)$, либо 2-группа Судзуки порядка 64. Подгруппа $V \cap \cap Q \lhd V$ является либо циклической порядка не меньшего четырех, либо обобщенной группой кватернионов. Но 2-группа Судзуки не имеет таких подгрупп, значит, V — абелева группа типа $(2^m, 2^m)$ и $S = \langle b\rangle \wr \langle t\rangle$.

Выясним теперь какой может быть подгруппа S в случае, когда группа K имеет строение $K = \langle i\rangle \times \langle t\rangle$ и $H \setminus R(H)$ содержит инволюции, сопряженные с i в G. По лемме 4 $R = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$ — максимальная элементарная абелева подгруппа в S и инволюция i является единственной из R с бесконечным централизатором в H. Поскольку мы предполагаем сейчас, что $H \setminus R(H)$ содержит инволюции, сопряженные с i в G, и все инволюции с бесконечными централизаторами в H сопряжены в H по лемме 5, будем считать, не нарушая общности рассуждений, что $j = g^{-1}ig$. Обозначим $D = H \cap H^g$. Заметим, что $j \in H \cap H^g$, причем периодическая часть C_j централизатора $C_G(j)$ содержится в H^g. Отсюда следует, что и инволюция $i \in C_j$ также принадлежит H^g, тогда $i \in H \cap H^g$. Пусть V — силовская 2-подгруппа из D, содержащая R, причем $i \in Z(V)$. Обозначим через P и Q силовские 2-подгруппы из H и H^g соответственно, пересечение которых совпадает с V. Очевидно, $R \leq Z(V)$ (так как $i \in Z(V)$ и $j \in Z(V^g)$, $\quad V, V^g$ сопряжены в D, следовательно, $V^g = V^h$ для некоторого $h \in D$, $i^h \neq j$ и R максимальна в V).

Поскольку $K < P$ и $t \notin C_G(j)$, то $V \neq P$, аналогично $V \neq Q$. Следовательно, из нормализаторного условия в нильпотентных группах N_V не содержится в H. Очевидно, $R \lhd N_V$.

Если бы в N_V не было элемента, индуцирующего в R автоморфизм 3-го порядка, то $N_V = = C_{N_V}(R)\langle d\rangle$, где $d \in P < H$ и $C_{N_V}(R) < C \leq H$. Следовательно, $N_V < H$ вопреки доказанному выше. Значит, в $N_G(V)$ есть элемент, индуцирующий в R автоморфизм 3-го порядка. Если бы V имела элемент 4-го порядка, то его можно было бы выбрать в V так, что $b^2 = j$, а так как $|K| = 4, K \lhd H, b \in H$, то из $b^2 = j$ следует, что $t \in K < C_j$ вопреки доказанному выше. Это противоречие означает, что $R = V = C_P(j)$.

Если в конечной 2-группе централизатор некоторой инволюции является четверной группой Клейна, то это либо группа диэдра, либо полудиэдральная группа [14, с. 13], значит, P — группа диэдра или полудиэдральная группа и $K \lhd P$. Следовательно, P — группа диэдра восьмого порядка. Вследствие сопряженности силовских подгрупп в H группа S также будет группой диэдра восьмого порядка.

Теорема доказана.

1. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
2. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группе. – М.: Наука, 1989. – 300 с.
3. *Черников С. Н.* К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. – 1945. – С. 71 – 74.
4. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых группах Шункова // Вест. СибГАУ. – 2013. – Вып. 1(47) . – С. 74 – 79.
5. *Сенашов В. И.* Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 472 – 485.
6. *Сенашов В. И.* Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискрет. математика. – 2002. – **14**, № 4. – С. 133 – 152.
7. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – **15**, № 2. – С. 203 – 210.
8. *Сенашов В. И.* О группах Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – **16**, № 3. – С. 234 – 239.
9. *Сенашов В. И.* О группах с сильно вложенной подгруппой, имеющей почти слойно конечную периодическую часть // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 384 – 391.
10. *Сенашов В.И.* Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7-8. – С. 1002 – 1008.
11. *Сенашов В. И.* Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1529 – 1533.
12. *Сенашов В. И.* О силовских подгруппах периодических групп Шункова // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1548 – 1556.
13. *Сенашов В. И., Шунков В. П.* Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. – 2003. – **15**, № 3. – С. 91 – 104.
14. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. – Новосибирск: Наука, 1992. – 132 с.
15. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
16. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**, № 2. – С. 220 – 248.
17. *Шунков В. П.* О периодических группах с некоторыми условиями конечности // Докл. АН СССР. – 1970. – **195**, № 6. – С. 1290 – 1293.
18. *Маланьина Г. А.* Полупрямые произведения циклических групп // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**. – С. 762 – 765.

Получено 27.01.14