УДК 512.544

Ф. Н. Лиман, Т. Д. Лукашова (Сум. гос. пед. ун-т им. А. С. Макаренко)

О НОРМЕ РАЗЛОЖИМЫХ ПОДГРУПП В ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

We study the relationships between the norm of decomposable subgroups and the norm of Abelian non-cyclic subgroups in the class of locally finite groups. We also describe some properties of periodic locally nilpotent groups in which the norm of decomposable subgroups is a non-Dedekind norm.

Розглядаються взаємозв'язки між нормою розкладних підгруп та нормою абелевих нециклічних підгруп у класі локально скінченних груп. Також встановлено деякі властивості періодичних локально нільпотентних груп з недедекіндовою нормою розкладних підгруп.

В теории групп достаточно большое количество результатов связано с изучением свойств групп с заданными ограничениями на их подгруппы и системы таких подгрупп. С одной стороны, группа может иметь систему подгрупп с заданными свойствами, но влияние этой системы подгрупп не является существенным, а с другой — наличие одной (как правило, характеристической) подгруппы с определенным свойством может быть определяющим фактором для строения самой группы. В последнее время список таких подгрупп может быть существенно расширен за счет разнообразных Σ-норм группы.

Напомним, что Σ-нормой группы G называется пересечение нормализаторов всех подгрупп группы, входящих в систему Σ. Очевидно, что в случае совпадения Σ-нормы с группой в последней нормальными будут все подгруппы, входящие в Σ (при условии, что система Σ непуста). Впервые группы с таким свойством были рассмотрены еще в конце XIX века Р. Дедекиндом, который дал полное описание конечных групп, все подгруппы которых нормальны (теперь их называют дедекиндовыми). Однако систематическое исследование групп с произвольными нормальными системами подгрупп было продолжено лишь во второй половине XX века, что определенным образом приостановило изучение Σ-норм. В настоящее время строение групп, совпадающих со своей Σ-нормой, известно для многих систем подгрупп Σ. Поэтому естественно было бы поставить вопрос об исследовании свойств групп, имеющих собственную Σ-норму.

Впервые такая задача была поставлена Р. Бером еще в 30-х годах прошлого века (см., например, [1]) для системы Σ всех подгрупп данной группы. Соответствующую Σ-норму он назвал нормой группы и обозначил $N(G)$. Понятно, что норма $N(G)$ содержится во всех остальных Σ-нормах, а те в свою очередь, можно считать ее обобщениями.

В настоящей работе рассматривается одно из таких обобщений — *норма разложимых подгрупп* группы. Исходя из изложенного выше, так будем называть пересечение нормализаторов всех разложимых подгрупп группы G; обозначим эту норму N_G^d. Напомним, что *разложимой* подгруппой группы G называется такая подгруппа, которую можно представить в виде прямого произведения двух нетривиальных множителей [2].

Из определения нормы N_G^d следует, что в случае $N_G^d = G$ в группе G будут нормальны все разложимые подгруппы (при условии, что система таких подгрупп непуста). Недедекиндовы группы с таким свойством были изучены в работе [2] и названы там *di-группами*.

Отметим, что в случае, когда группа G не содержит разложимых подгрупп, будем считать, что $N_G^d = G$. Строение локально конечных неабелевых групп, в которых система разложимых подгрупп пуста, описывает следующее утверждение.

Предложение 1 [2]. *Неабелева локально конечная группа, не содержащая разложимых подгрупп, является группой одного из видов*:

1) *кватернионной* 2*-группой (конечной или бесконечной)*;

2) *группой Фробениуса* $G = A \rtimes B$, *где* A — *локально циклическая* p*-группа,* B — *циклическая q-группа,* p *и* q — *простые числа и* $(p-1, q) = q$.

Группой Фробениуса (см. [3]) будем называть полупрямое произведение $G = A \rtimes B$ двух нетривиальных подгрупп A и B, где $B \cap g^{-1}Bg = E$ для любого элемента $g \in G \setminus B$ и $A \setminus E = G \setminus \bigcup_{g\in G}(g^{-1}Bg)$.

Очевидно, что группа G имеет разложимые подгруппы тогда и только тогда, когда она имеет разложимые абелевы подгруппы. Поэтому дальнейшее исследование естественно проводить в зависимости от существования в группе тех или иных разложимых абелевых подгрупп. Поскольку во многих случаях разложимые абелевы подгруппы являются нециклическими, есть основания предполагать, что норма разложимых подгрупп непосредственно связана с нормой абелевых нециклических подгрупп N_G^A. Согласно [4] так будем называть пересечение нормализаторов всех абелевых нециклических подгрупп группы G при условии, что система таких подгрупп в G непуста.

Целью настоящей статьи является установление взаимосвязей между нормами N_G^d и N_G^A в классе локально конечных групп, а также изучение свойств локально нильпотентных периодических групп, в которых норма разложимых подгрупп недедекиндова. Отметим, что в случае совпадения нормы N_G^A с группой G в последней будут нормальными все абелевы нециклические подгруппы (при условии наличия таких подгрупп в группе).

1. О взаимосвязях между нормами абелевых нециклических и разложимых подгрупп в локально конечных группах. Все группы в этом пункте будем рассматривать при условии, что они содержат хотя бы одну нециклическую абелеву подгруппу. Такое ограничение связано с определением нормы абелевых нециклических подгрупп.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть* G — *группа, содержащая неединичную* N_G^d*-допустимую подгруппу* H *такую, что* $H \cap N_G^d = E$, *где* N_G^d — *норма разложимых подгрупп группы* G. *Тогда подгруппа* N_G^d *дедекиндова.*

Доказательство. Поскольку подгруппа H является N_G^d-допустимой, $G_1 = HN_G^d = H \times N_G^d$. Пусть x — произвольный элемент нормы N_G^d и $1 \neq h \in H$. Тогда

$$\langle x, h\rangle \lhd \langle h\rangle N_G^d, \qquad \langle x, h\rangle \cap N_G^d = \langle x\rangle \lhd N_G^d.$$

Следовательно, норма N_G^d дедекиндова, что и требовалось доказать.

Взаимосвязи между нормой N_G^d разложимых подгрупп и нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп в классе p-групп (p — простое число) описывает следующее утверждение.

Теорема 1.1. *В произвольной локально конечной p-группе G нормы абелевых нециклических подгрупп и разложимых подгрупп совпадают*: $N_G^A = N_G^d$.

Доказательство теоремы будет опираться на доказанные ниже леммы 1.2 – 1.4.

Лемма 1.2. *В классе конечных p-групп нормы абелевых нециклических подгрупп N_G^A и разложимых подгрупп N_G^d совпадают.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из того, что в конечной p-группе каждая абелева нециклическая подгруппа является абелевой разложимой подгруппой и наоборот.

Лемма 1.3. *В бесконечной p-группе G нормы N_G^A и N_G^d совпадают, если выполняется одно из следующих условий*:

1) G *не содержит квазициклических подгрупп*;

2) G *содержит квазициклические подгруппы, но ни одна из них не является ее максимальной абелевой подгруппой*;

3) *среди максимальных абелевых подгрупп группы G есть нормальная в P квазициклическая подгруппа.*

Доказательство. 1. В этом случае множества разложимых абелевых и абелевых нециклических подгрупп совпадают, поэтому $N_G^A = N_G^d$.

2. Пусть P — квазициклическая подгруппа группы G. Так как по условию P не максимальная абелева подгруппа, найдется подгруппа $\langle x \rangle$ простого порядка такая, что группа $H = \langle x \rangle \times P$ абелева. Поскольку H является N_G^d-допустимой подгруппой, $H^p = P$ также N_G^d-допустима. Следовательно, все абелевы нециклические подгруппы группы G будут N_G^d-допустимыми и $N_G^A = N_G^d$.

3. Пусть G — неабелева p-группа и P — нормальная квазициклическая подгруппа, являющаяся максимальной абелевой подгруппой в G. Покажем, что в этом случае G не содержит квазициклических подгрупп, отличных от P. В самом деле, если P_1 — такая квазициклическая подгруппа группы G, что $P \neq P_1$, то из условия $[G : C_G(P)] < \infty$ следует, что $P_1 \subseteq C_G(P)$. Но в таком случае подгруппа $G_1 = P_1 \cdot P$ абелева, что противоречит максимальности P. Следовательно, P — единственная квазициклическая подгруппа в G. Поэтому норма абелевых нециклических подгрупп совпадает с пересечением нормализаторов редуцированных абелевых нециклических подгрупп, каждая из которых разложима, и потому $N_G^A = N_G^d$.

Лемма доказана.

***Следствие* 1.1.** *Неабелева локально конечная p-группа G тогда и только тогда содержит нормальную квазициклическую подгруппу, являющуюся максимальной в G абелевой подгруппой, когда $p = 2$ и $G = P\langle b \rangle$, где P — квазициклическая 2-подгруппа*,

$|b| \in \{2,4\}$, $b^2 \in P$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ *для любого элемента* $a \in P$. *При этом* $N_G^A = N_G^d$.

Доказательство. Пусть P — нормальная в G квазициклическая подгруппа, являющаяся максимальной абелевой подгруппой в G. Если $p \neq 2$, то по следствию 1.13 работы [5] $P \subseteq Z(G)$. Но в таком случае для любого элемента $x \in G \setminus P$ подгруппа $\langle x, P \rangle$ будет абелевой, что противоречит условию. Следовательно, $p = 2$.

Поскольку $P \triangleleft G$, то $[G : C_G(P)] = 2$. Из максимальности P следует, что $C_G(P) = P$. Если G содержит только одну инволюцию, то G — бесконечная кватернионная 2-группа и $N_G^d = N_G^A = G$. В противном случае существует инволюция $b \notin G \setminus P$ и $G = P \rtimes \langle b \rangle$, где $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in P$. В этом случае $N_G^d = N_G^A = \langle a_2, b \rangle$, где $a_2 \in P$ и $|a_2| = 4$. Обратное утверждение очевидно.

Следствие доказано.

Далее рассмотрим случай, когда среди максимальных абелевых подгрупп p-группы G есть квазициклические подгруппы, но ни одна из них не является нормальной. Если при этом G — локально конечная p-группа, то из теоремы 1.5 [5] следует, что группа G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Но в таком случае G содержит бесконечную элементарную абелеву подгруппу и $N_G^A \subseteq N_G^d$.

Лемма 1.4. *Если локально конечная p-группа G содержит ненормальную квазициклическую подгруппу, являющуюся максимальной абелевой подгруппой в G, то $N_G^A = N_G^d$.*

Доказательство. Пусть P — ненормальная квазициклическая подгруппа, являющаяся максимальной абелевой подгруппой группы G. Учитывая предыдущее замечание, имеем $N_G^A \subseteq N_G^d$.

Докажем, что имеет место обратное включение. При этом достаточно показать, что подгруппа P будет N_G^d-допустимой. Если $N_G^d = E$, то $N_G^A = N_G^d = E$, и утверждение доказано.

В случае $1 < \left| N_G^d \right| < \infty$ из условия $N_G^d \triangleleft G$ следует, что $P \subseteq C_G\left(N_G^d\right)$. Поскольку P — максимальная абелева подгруппа группы G, $N_G^d \subset P$, и поэтому P будет N_G^d-допустимой подгруппой в G.

Пусть $\left| N_G^d \right| = \infty$ и норма N_G^d недедекиндова. Тогда она либо не содержит разложимых подгрупп, либо в ней нормальны все разложимые подгруппы. В силу предложения 1 и леммы 2 работы [2] N_G^d содержит квазициклическую подгруппу P_1, являющуюся характеристической в N_G^d. Но в таком случае $P_1 \triangleleft G$, $P_1 \neq P$, $P \subset C_G(P_1)$ и подгруппа $G_1 = P_1 \cdot P$ абелева, что невозможно по условию.

Пусть теперь N_G^d — бесконечная дедекиндова группа. Так как по условию P — максимальная абелева подгруппа и $P \neq G$, то N_G^d не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, и потому нижний слой A нормы N_G^d является бесконечной элементарной абелевой подгруппой, нормальной в G.

В группе $H = AP$ рассмотрим подгруппы $H_k = A\langle b_k \rangle$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $P = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \rangle$, $b_{n+1}^p = b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. В силу леммы 1.9. [5] центр $Z(H_k)$ каждой из подгрупп H_k бесконечен. Значит, $Z(H_k) \cap A = A_k$, $|A_k| = \infty$ и $A_k = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \ldots$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\langle b_k \rangle \cap \langle a_i, a_j \rangle = E$ для некоторых $i \neq j$. Тогда для любого элемента $a \in A \subseteq N_G^d$ получим

$$[a, b_k] \in \langle a_i, b_k \rangle \cap \langle a_j, b_k \rangle = \langle b_k \rangle .$$

Следовательно, $P \lhd H = AP$ и по следствию 1.15 работы [5] $C_H(P)$ имеет конечный индекс в H. Но в таком случае P не является максимальной абелевой подгруппой группы G. Доказанная лемма 1.4 завершает доказательство теоремы 1.1.

Из приведенных выше рассуждений следует, что локально конечная p-группа G с бесконечной нормой N_G^d не содержит ненормальной квазициклической подгруппы P, являющейся максимальной абелевой подгруппой в G.

***Следствие* 1.2.** *Если локально конечная p-группа G содержит ненормальную квазициклическую подгруппу P, являющуюся максимальной абелевой подгруппой в G, то $\left| N_G^d \right| < \infty$.*

Примером такой группы является известная p-группа Шмидта без центра [5, с. 72], в которой $N_G^d = N_G^A = E$.

Рассмотрим теперь взаимосвязи между нормами разложимых и абелевых нециклических подгрупп в непримарных локально конечных группах.

Теорема 1.2. *Пусть G — конечная непримарная группа, содержащая абелеву нециклическую подгруппу. Тогда имеет место включение $N_G^A \supseteq N_G^d$, причем возможен случай $N_G^A \neq N_G^d$.*

Доказательство. В исследуемой группе множество абелевых нециклических подгрупп является подмножеством множества абелевых разложимых подгрупп, следовательно, $N_G^A \supseteq N_G^d$. То обстоятельство, что указанные нормы могут быть различными, подтверждает следующий пример, завершающий доказательство теоремы.

***Пример* 1.1.** Пусть $G = A \rtimes B$ — конечная группа Фробениуса, в которой A — элементарная абелева группа порядка p^2 (p — простое число), B — непримарная подгруппа, $(|B|, p) = 1$. Известно (см., например, [6]), что центр $Z(B) \neq E$. Поэтому $N_G^A = G$, а N_G^d не содержит A.

Аналогичное утверждение справедливо и в классе бесконечных периодических локально нильпотентных непримарных групп.

Теорема 1.3. *Для любой бесконечной периодической локально нильпотентной непримарной группы* G *имеет место включение* $N_G^A \supseteq N_G^d$, *причем случай* $N_G^A \neq N_G^d$ *достигается.*

Доказательство. Пусть F — абелева нециклическая подгруппа группы G. Если подгруппа F разложима, то она является N_G^d-допустимой подгруппой. Если подгруппа F неразложима, то она является квазициклической p-группой. Поскольку группа G локально нильпотентна и непримарна, найдется подгруппа $\langle b\rangle$ простого порядка $q \neq p$, перестановочная с F. Но в таком случае $F\times\langle b\rangle$ — N_G^d-допустимая подгруппа, а значит, $\langle F, b\rangle^q = F$ также является N_G^d-допустимой подгруппой. Следовательно, $N_G^A \supseteq N_G^d$.

Существование групп, в которых нормы абелевых нециклических и разложимых подгрупп различны, подтверждает пример, завершающий доказательство теоремы.

***Пример* 1.2.** В группе $G = \big((A\times\langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle \big)\times\langle d\rangle$, где A — квазициклическая p-группа, $|b| = |c| = p$, $|d| = q$, $[b, c] = a \in A$, $|a| = p$ (p и q — различные простые числа), норма абелевых нециклических подгрупп $N_G^A = G$, а норма разложимых подгрупп $N_G^d = A\times\langle d\rangle = Z(G) \neq N_G^A$.

Как показывают следующие примеры, в классе бесконечных локально конечных и не локально нильпотентных групп возможны случаи, когда $N_G^A \neq N_G^d$ и $N_G^A \subset N_G^d$ или $N_G^A \supset N_G^d$.

***Пример* 1.3.** Пусть $G = A \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса, в которой A — бесконечная элементарная абелева 7-группа, $|b| = 6$ и $b^{-1}ab = a^5$ для любого элемента $a \in A$.

Поскольку G — группа Фробениуса и $N_G(\langle b\rangle) = \langle b\rangle$, $N_G\left(\langle a^{-1}ba\rangle\right) = \langle a^{-1}ba\rangle$, $\langle b\rangle \bigcap \langle a^{-1}ba\rangle = E$ для $1 \neq a \in A$, то $N_G^d = E$. С другой стороны, $N_G^A = G$, следовательно, в этой группе $N_G^A \supset N_G^d$.

***Пример* 1.4** (см. [6]). Пусть $G = A \leftthreetimes b$ — группа Фробениуса, в которой A — бесконечная элементарная абелева p-группа $(p \neq 3)$, B — квазициклическая 3-группа.

В этой группе $N_G^d = A$. Поскольку $N_G(B) = B$, $N_G\left(a^{-1}Ba\right) = a^{-1}Ba$ и $a^{-1}Ba \bigcap B = E$ для $a \neq 1$, то $N_G^A = E$. Следовательно, в этой группе $N_G^A \subset N_G^d$.

Теорема 1.4. *В произвольной локально конечной группе* G, *содержащей абелеву нециклическую подгруппу, либо* $N_G^A = N_G^d$, *либо* $N_G^A \supset N_G^d$, *либо* $N_G^A \subset N_G^d$.

Доказательство. Достаточно показать, что не существует локально конечной группы G, в которой $N_G^A \neq N_G^d$, $N_G^A \not\supset N_G^d$ и $N_G^A \not\subset N_G^d$.

Допустим, что такая группа G существует. Тогда в силу теорем 1.1 и 1.2 группа G бесконечна и непримарна. Кроме того, из условия $N_G^A \neq N_G^d$ следует, что она содержит абелеву нециклическую подгруппу P, не являющуюся N_G^d-допустимой, и непримарную циклическую подгруппу $\langle b\rangle$, не являющуюся N_G^A-допустимой. Ясно, что P неразложима, и потому является квазициклической группой. Покажем, что P — максимальная абелева подгруппа группы G. В самом деле, иначе существует неединичная подгруппа $\langle g\rangle$ такая, что $P\bigcap\langle g\rangle = E$. Тогда подгруппа $P\times\langle g\rangle$ является N_G^d-допустимой, поэтому N_G^d-допустимой будет и подгруппа $\langle P, g\rangle^{|g|} = P$, что противоречит ее выбору. Таким образом, P — максимальная в G абелева подгруппа.

Предположим, что $\left|N_G^d\right| = \infty$. Тогда $\left[G : C_G(N_G^d)\right] < \infty$ и P принадлежит централизатору $C_G(N_G^d)$. Но это невозможно, так как подгруппа P не является N_G^d-допустимой. Таким образом, $\left|N_G^d\right| = \infty$.

Из последнего замечания следует, что N_G^d содержит бесконечную абелеву подгруппу M. Поскольку $\langle b\rangle$ непримарна, $\langle b\rangle \lhd G_1 = \langle b\rangle M$. Тогда $\left[G_1 : C_{G_1}(b)\right] < \infty$ и $C = C_{G_1}(b)$ — бесконечная непримарная абелева группа.

Пусть C не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Тогда в ней найдутся такие нециклические подгруппы C_1 и C_2, что $C_1\bigcap\langle b\rangle = C_2\bigcap\langle b\rangle = E$. В этом случае подгруппы $C_i\times\langle b\rangle,\ i = 1, 2,$ являются N_G^A-допустимыми, а значит, N_G^A-допустимой будет и подгруппа $\langle b\rangle = (C_1\times\langle b\rangle)\bigcap(C_2\times\langle b\rangle)$, что невозможно вследствие ее выбора.

Следовательно, C — группа с условием минимальности для подгрупп. Но в таком случае норма N_G^d также удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и по результатам работы [7] является конечным расширением полной подгруппы $\tilde{P}$. По следствию 1.3 [5] группа $H = PN_G^d$ также удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Далее, из того, что P — максимальная абелева подгруппа группы G, делаем вывод, что $\tilde{P} = P$. Но тогда P является нормальной подгруппой в H. Полученное противоречие доказывает, что рассматриваемый случай невозможен.

Теорема доказана.

2. Локально нильпотентные периодические группы с недедекиндовой нормой разложимых подгрупп. В работе [2] было установлено, что произвольная недедекиндова локально нильпотентная периодическая di-группа, содержащая хотя бы одну разложимую подгруппу, является p-группой, в которой нормальны все абелевы нециклические подгруппы. Негамильтоновы группы с таким свойством изучались в работе [8] и были названы $\overline{HA}$-группами. Аналогичное утверждение в классе периодических локально нильпотентных групп имеет место и для нормы N_G^d разложимых подгрупп.

Согласно теореме 1.1, описание локально конечных p-групп, имеющих недедекиндову норму N_G^d разложимых подгрупп, сводится к описанию групп с недедекиндовой нормой N_G^A абелевых нециклических подгрупп. Изучению таких групп были посвящены работы [9, 10].

Опираясь на эти результаты, нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 2.1. *Норма* N_G^d *локально конечной* p*-группы* G *недедекиндова и не содержит разложимых подгрупп тогда и только тогда, когда* $G = N_G^d$ *и* G *является кватернионной* 2*-группой порядка больше* 8 (*конечной или бесконечной*).

Доказательство. *Достаточность* условий леммы следует из предложения 1. Докажем их *необходимость*.

Пусть G — локально конечная p-группа, а ее норма N_G^d недедекиндова и не содержит разложимых подгрупп. Тогда в силу предложения 1 $p=2$ и N_G^d является кватернионной 2-группой (конечной или бесконечной), причем $N_G^d = A\langle b\rangle$, $b^2 \in A$, $|b| = 4$, $|A| > 4$, A — циклическая или квазициклическая 2-группа, $b^{-1}ab = a^{-1}$ для любого элемента $a \in A$.

Покажем, что G содержит одну инволюцию. Допустим, что это не так, и $x \in G \setminus N_G^d$, $|x| = 2$. Тогда $[x, b^2] = 1$, где b^2 — инволюция нормы N_G^d. Поскольку подгруппа $\langle x, b^2\rangle$ N_G^d-допустима, то $\langle x, b^2\rangle \lhd G_1 = \langle x\rangle N_G^d$ и $\left[G_1 : C_{G_1}(\langle x, b^2\rangle)\right] \le 2$. Если $[x,b] \ne 1$, то $[x,b] = b^2$ и $|xb| = 2$. Тогда абелева подгруппа $\langle xb, b^2\rangle$ будет N_G^d-допустимой, что невозможно, так как элемент $a \in A$, $|a| = 8$, не принадлежит нормализатору $N_G\left(\langle xb, b^2\rangle\right)$ этой подгруппы. Значит, $[x,b] = 1$. Поскольку $\langle x, b\rangle$ — разложимая абелева подгруппа, она N_G^d-допустима. Но и в этом случае нормализатору подгруппы $\langle x, b\rangle$ не принадлежит элемент $a \in A$, $|a| = 8$.

Таким образом, группа G содержит всего одну инволюцию, а значит, все ее абелевы подгруппы неразложимы. В силу предложения 1 G является кватернионной 2-группой (конечной или бесконечной). Поскольку по условию норма N_G^d недедекиндова, $|G| > 8$ и $G = N_G^d$.

Лемма доказана.

Следствие **2.1.** *Локально конечная* p*-группа* G, *имеющая недедекиндову норму* N_G^d, *не содержит разложимые подгруппы тогда и только тогда, когда такие подгруппы не содержит ее норма* N_G^d.

Лемма 2.2. *Бесконечная локально конечная* p*-группа* G, *имеющая недедекиндову норму* N_G^d *разложимых подгрупп, является конечным расширением квазициклической подгруппы.*

Доказательство. Пусть G — бесконечная локально конечная p-группа и N_G^d — ее норма разложимых подгрупп. Если норма N_G^d не содержит разложимые подгруппы, то по лемме 2.1 $G = N_G^d$ — бесконечная кватернионная 2-группа. Пусть N_G^d содержит разложимую подгруппу. По теореме 1.1 $N_G^d = N_G^A$. Следовательно, G — бесконечная локально конечная p-группа, в которой норма N_G^A абелевых нециклических подгрупп является негамильтоновой

$\overline{HA_p}$ -группой. По следствию 4 [10] G является конечным расширением квазициклической p -группы, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1. *Периодическая локально нильпотентная группа* G, *содержащая абелеву нециклическую подгруппу, тогда и только тогда имеет недедекиндову норму* N_G^d *разложимых подгрупп, когда* G *— локально конечная* p*-группа с недедекиндовой нормой* N_G^A *абелевых нециклических подгрупп.*

Доказательство. *Достаточность* условий теоремы непосредственно следует из теоремы 1.1.

Докажем их *необходимость*. Пусть G — периодическая локально нильпотентная группа с недедекиндовой нормой N_G^d разложимых подгрупп. Тогда N_G^d имеет недедекиндову силовскую p-подгруппу $(N_G^d)_p$ для некоторого простого числа p. По лемме 1.1 $N_G^d = (N_G^d)_p$, более того, G также является p-группой. Используя теперь теорему 1.1, приходим к выводу, что $N_G^A = N_G^d$. Следовательно, G является p-группой с недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп N_G^A.

Теорема доказана.

***Следствие* 2.2.** *Произвольная бесконечная периодическая локально нильпотентная группа* G, *имеющая недедекиндову норму* N_G^d, *является конечным расширением квазициклической* p*-подгруппы.*

***Следствие* 2.3.** *Если норма* N_G^d *периодической локально нильпотентной группы* G *бесконечна и недедекиндова, то в* G *нормальны все абелевы нециклические и все разложимые подгруппы.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из теоремы 2.1 и следствия 4 работы [10].

1. *Baer R.* Der Kern, eine charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – **1**. – P. 254 – 283.
2. *Лиман Ф. М.* Групи, усі розкладні підгрупи яких інваріантні // Укр. мат. журн. – 1970. – **22**, № 6. – С.725 – 733.
3. *Блудов В. В.* О группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. – 1997. – **38**, № 6. – С. 1219 – 1221.
4. *Лукашова Т.Д.* Про норму абелевих нециклічних підгруп нескінченних локально скінченних p -груп ($p \neq 2$) // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 3. – С. 35 – 39.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. *Бусаркин В. М., Старостин А. И.* О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб. – 1963. – **62(104)**, № 3. – С. 275 – 294.
7. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – № 5. – С. 579 – 615.
8. *Лиман Ф. Н.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 65 – 96.
9. *Лиман Ф. М., Лукашова Т.Д.* Про нескінченні 2-групи з недедекіндовою нормою абелевих нециклічних підгруп // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 1. – С. 56 – 64.
10. *Лиман Ф. Н., Лукашова Т . Д.* Бесконечные локально конечные группы с локально нильпотентной недедекиндовой нормой абелевых нециклических подгрупп // Вестн. Воронеж. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2012. – № 6 (72). – С. 5 – 12.

Получено 08.05.14