УДК 517.98

В. І. Рабанович (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РОЗКЛАДИ СКАЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА В СУМУ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ЗІ СКІНЧЕННИМ СПЕКТРОМ

We consider a problem of classification of nonequivalent representations of a scalar operator λI in the form of a sum of k self-adjoint operators with at most $n_1, \ldots, n_k$ points in their spectra, respectively. It is shown that this problem is $*$-wild for some sets of spectra if $(n_1, \ldots, n_k)$ coincides with one of the following k-tuples: $(2, \ldots, 2)$ for $k \geq 5$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 11, 11)$, $(5, 5, 5)$, or $(4, 6, 6)$. It is demonstrated that, for the operators with points 0 and 1 in the spectra and $k \geq 5$, the classification problems are $*$-wild for every rational $\lambda \in [2, 3]$.

Рассмотрена задача о классификации неэквивалентных представлений скалярного оператора λI в виде суммы k самосопряженных операторов с не более чем $n_1, \ldots, n_k$ точками в спектрах. Доказано, что такая задача является $*$-дикой при некотором множестве спектров, если $(n_1, \ldots, n_k)$ совпадает с одним из следующих наборов: $(2, \ldots, 2)$ при $k \geq 5$, $(2, 2, 2, 3)$, $(2, 11, 11)$, $(5, 5, 5)$, $(4, 6, 6)$. Показано, что для $k \geq 5$ и спектров операторов, состоящих из точек 0 и 1, такие классификационные задачи являются $*$-дикими при всех рациональных значениях $\lambda \in [2, 3]$.

1. Вступ. Розкладу обмеженого оператора у гільбертовому просторі в суму або іншу лінійну комбінацію операторів спеціального типу присвячено багато робіт (див., наприклад, $[1-3]$). В [2] показано, що будь-який обмежений оператор є лінійною комбінацією 14 операторів, унітарно еквівалентних довільному фіксованому оператору T (T не є скалярним плюс компактним).

У цій роботі ми розглядаємо зображення оператора A у вигляді суми самоспряжених операторів A_i зі скінченними спектрами $\sigma(A_i) \in M_i$, $i = 1, \ldots, n$. При великому значенні n задачу про пошук такого зображення можна звести до задачі про зображення скалярного оператора λI у вигляді суми операторів при різних λ. Справді, як було доведено в [4], кожен самоспряжений оператор A є лінійною комбінацією 5-ти ортопроекторів, тобто

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_5 P_5. \tag{1}$$

Отже, для знаходження розкладу A в суму A_i достатньо знайти розклад оператора $\lambda_s P_s$ в суму $\sum_{j \in N_s} A_j$ для кожного $s = 1, \ldots, 5$ з умовами $N_s \cap N_r = \varnothing$, $s \neq r$. Оператор $\lambda_s P_s$ на підпросторі $H_s = \operatorname{Im} P_s$ діє як скалярний. Тому якщо B_j самоспряжений, $\sigma(B_j) \in M_j$, $j = 1, \ldots, n$, та скалярний оператор $\lambda_s I_{H_s} = \sum_{j \in N_s} B_j$ для кожного $j = 1, \ldots, 5$, то оператор A є сумою операторів зі спектрами, які є підмножинами множин $M_i \cup \{0\}$.

Таким чином, далі будемо розглядати тільки розклади скалярного оператора

$$\lambda I = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k. \tag{2}$$

Знаходження такого розкладу еквівалентне знаходженню $*$-зображення алгебри

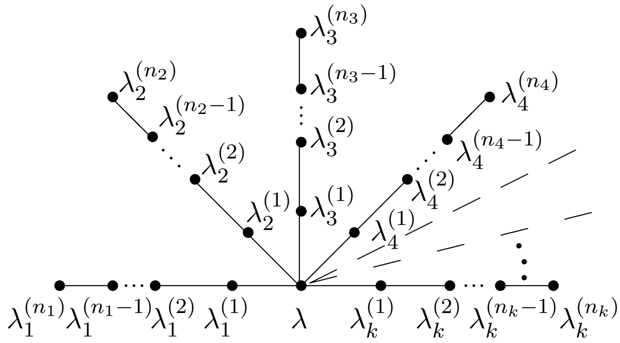
$$\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_k, \lambda} = \mathbb{C} \left\langle a_1, \ldots, a_k \mid a_i = a_i^*,\ R_i(a_i) = 0, a_1 + \ldots + a_k = \lambda e \right\rangle,$$

де e — одиниця в алгебрі і $R_i(x) = \prod_{\lambda_j \in M_i} (x - \lambda_j)$. Задача класифікації розкладів зводиться до знаходження всіх незвідних унітарно нееквівалентних $*$-зображень алгебр $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_k, \lambda}$. У зв'язку з цим можна виділити два основних питання щодо дослідження задач розкладу:

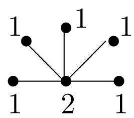
1. Чи існують $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{M_1, \ldots, M_k, \lambda}$ при фіксованих M_1, $M_2, \ldots, M_k$ і при різних $\lambda \in \mathbb{R}$?

2. При якій кількості точок в $M_1, M_2, \ldots, M_k$ хоча б для одного набору точок у відповідних спектрах з'являється дуже багато розв'язків рівняння (2) і відповідна алгебра $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_k,\lambda}$ є $*$-дикою? Чи можна знайти мінімальні в певному сенсі значення $|M_1|$, $|M_2|, \ldots, |M_k|$, якщо алгебри $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_k,\lambda}$ є $*$-дикими?

Для якісного опису результатів зручно використовувати графічне зображення параметрів задачі [5–8]. Наприклад, якщо всі M_i містять 0, то параметри рівняння (2) можна записати у вигляді зірчастого графа з k гілками



де $\lambda_i^{(j)}$ — ненульові елементи множини M_i. Відповідь на перше питання залежить від конкретних значень $\lambda_i^{(j)}$ і знайдена тільки в часткових випадках (див. ґрунтовне обговорення у [8]). Відповідь на друге питання зводиться до розгляду графів з чотирма або трьома гілками, оскільки графи з 5-ма або більшою кількістю гілок вже задають $*$-дикі алгебри $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_k,\lambda}$ при деяких M_1, $M_2, \ldots, M_k$. Так, для графа



класифікація всіх нееквівалентних розкладів оператора $2I$ в суму 5-ти ортопроекторів є $*$-дикою задачею [9], тобто задачею, яка містить класифікацію незвідних пар самоспряжених операторів без співвідношень. Справді, одиничний оператор I можна подати у вигляді суми двох ортопроекторів $I = P_1 + P_2$ і суми трьох ортопроекторів $I = P_3 + P_4 + P_5$. При цьому $P_1 \perp P_2$, $P_3 \perp P_4 \perp P_5$. Зауважимо, що ніяких обмежень на вибір P_1 і P_3 немає, а P_4 повинен бути тільки ортогональним до P_3, тобто така задача про класифікацію всіх розкладів еквівалентна в певному сенсі знаходженню всіх незвідних нееквівалентних $*$-зображень алгебри

$$\mathcal{P}_{3,\perp} = \mathbb{C}\left\langle p_1, p_2, p_3 \mid p_i^2 = p_i^* = p_i, p_2 \perp p_3 \right\rangle.$$

В роботі [9] показано, що ця алгебра є $*$-дикою, як і алгебра $\mathcal{P}_3$, породжена 3-ма ортопроекторами без співвідношень.

У першому пункті ми доведемо, що для будь-якого раціонального $\lambda \in [2, 3]$ алгебра

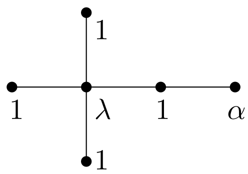
$$\mathcal{P}_{5,\lambda} = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_5 \mid p_i^2 = p_i^* = p_i, p_1 + \ldots + p_5 = \lambda e \right\rangle$$

є $*$-дикою, а якщо $k > 4$, то алгебра $\mathcal{P}_{k+1,\lambda}$ є $*$-дикою для всіх раціональних λ з відрізка $[(k - \sqrt{k^2 - 4k})/2, (k + \sqrt{k^2 - 4k})/2]$, за винятком скінченного числа значень λ (див. для порівняння [10]).

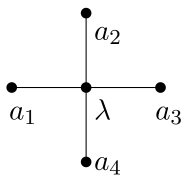
У другому пункті ми розглянемо алгебру

$$\mathcal{P}_{4,\lambda,\alpha} = \mathbb{C}\left\langle p_1, \ldots, p_5 \mid p_i^2 = p_i^* = p_i, p_4 \perp p_5, p_1 + \ldots + p_4 + \alpha p_5 = \lambda e \right\rangle$$

з відповідним графом G_1

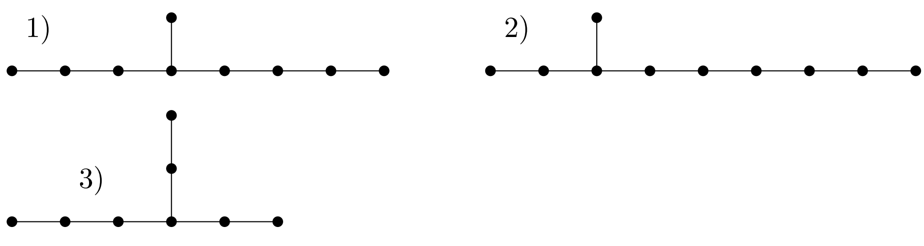


і покажемо, що для $\alpha = 1+2(\lambda-2)/3$ і деяких раціональних $\lambda \in [2,3]$ алгебра $\mathcal{P}_{4,\lambda,\alpha}$ є $*$-дикою. Тобто задача про класифікацію розкладів скалярного оператора в суму 4-х самоспряжених з 2- і 3-ма точками в спектрах може бути $*$-дикою. Зауважимо, що задачі з графом



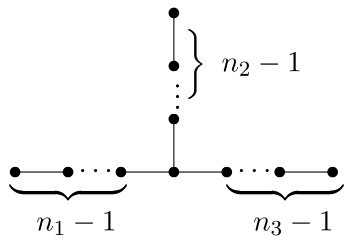
розглядалися в літературі (див., наприклад, [11 – 13]) і незвідних розв'язків існує або скінченна кількість, або тільки одно- і двовимірні.

У третьому пункті ми зупинимося на сумах 3-х самоспряжених операторів. Як було доведено в [5, 14], для розширених графів Динкіна при будь-якій розстановці додатних чисел на ребрах відповідні $*$-алгебри мають лише скінченновимірні зображення. С. А Кругляком і Ю. С. Самойленком було сформульовано гіпотезу, що якщо кількість точок у множинах M_1, M_2 і M_3 така, що відповідний граф містить як власний підграф розширену діаграму Динкіна $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ або $\tilde{E}_8$, то існує така розстановка чисел на графі, що алгебра $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,\lambda}$ є $*$-дикою. Щоб довести цю гіпотезу, достатньо довести $*$-дикість алгебр $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ для графів



і деякої трійки множин M_1, M_2, M_3, які складаються з: 1) $(2,4,5)$ точок відповідно; 2) $(2,3,7)$ точок ; 3) $(3,3,4)$ точок.

Ми доведемо (теореми 4 – 6), що для деяких M_i алгебра $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ із графом



є $*$-дикою, якщо (n_1, n_2, n_3) збігається з однією з трійок $(2, 11, 11)$, $(4, 6, 6)$, $(5, 5, 5)$. Таким чином, ми довели згадану гіпотезу для графів з трьома довгими гілками, але залишили відкритим питання про її справедливість для серії графів, наприклад для графів з довжиною гілок $(2, 3, k_1)$, $k_1 = 7, 8, 9, \ldots$.

Нагадаємо, що матричні алгебри над $*$-дикими алгебрами також є $*$-дикими. Тому досить побудувати голоморфне відображення досліджуваної алгебри $\mathcal{A}$ на матричну $*$-дику алгебру $M_n(\mathfrak{U})$, тобто щоб голоморфний образ $\mathcal{A}$ збігався з $M_n(\mathfrak{U})$. Такі відображення наведено в кожному з наступних пунктів при доведенні теорем.

Далі в роботі будуть розглядатися $*$-зображення алгебр або співвідношень обмеженими операторами гільбертового комплексного простору (скінченновимірного або сепарабельного). В матричній алгебрі $M_n(\mathbb{C})$ матричні одиниці позначаються як E_{ij}, одинична матриця позначається через I_n або E, а нульова $(m \times m)$-матриця — через 0_m. Також ми використовуємо позначення $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ для діагональної матриці з елементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на діагоналі і $M_n(W_1, \ldots, W_s)$ для матричної $*$-алгебри над $*$-алгеброю, породженою елементами $W_1, \ldots, W_n$. Блок-матрицю $E_{ij} \otimes I$, тобто матрицю з одиничним блоком на (i, j)-му місці, будемо записувати як $E_{i,j}$.

2. Суми п'яти або більше операторів. Алгебра $\mathcal{P}_{5,2}$ є $*$-дикою. Крім того, в [15] побудовано відображення $\mathcal{P}_{5,\lambda}$ в матричну алгебру $M_3(\mathcal{Q}_2)$ над $*$-алгеброю Кунца $\mathcal{Q}_2$ для $\lambda \in [7/4, 7/3]$. Таким чином, $\mathcal{P}_{5,\lambda}$ має не менше різних зображень, ніж $\mathcal{Q}_2$. Аналогічний результат було отримано для $\mathcal{P}_{6,\lambda}$ з $\lambda \in [2, 4]$ (див. [15, 16]). Отже, розкладів скалярного оператора в суму 5-, 6-ти або більшого числа ортопроекторів є досить багато. Наступна теорема є посиленням згаданих результатів.

Теорема 1. *Нехай $\lambda \in [2, 3] \cap \mathbb{Q}$. Тоді алгебра $\mathcal{P}_{5,\lambda}$ є $*$-дикою.*

Доведення. Оскільки P_i і $I - P_i$ є одночасно ортопроекторами, то досить довести теорему лише для $\lambda \in [2, 5/2]$. Нехай x_i, y_i, n_i — послідовності, задані співвідношеннями

$$y_1 = \lambda - 2, \quad x_i = y_i + \lambda - n_i, \quad y_{i+1} = x_i + \lambda - 2, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$n_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо} \quad y_i < 1, \\ 3, & \text{якщо} \quad y_i > 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad y_i = 1. \end{cases}$$

Існує ціле число i^* таке, що $y_{i^*+1} = 1$ або $x_{i^*} = 1$. Справді, використовуючи означення, маємо

$$y_{i^*+1} = (\lambda - 2) + i^*(2\lambda - 4) - \sum_1^{i^*}(n_i - 2) = (2i^* + 1)(\lambda - 2) - \sum_1^{i^*}(n_i - 2), \tag{3}$$

$$x_{i^*} = 2i^*(\lambda - 2) - \sum_{1}^{i^*}(n_i - 2). \tag{4}$$

Звідси при $\lambda = m/n$, покладаючи $i^* = [n/2]$, отримуємо, що одна з величин (3) або (4) є цілою ((3) при непарному n і (4) при парному n). Зауважимо, що $0 < x_i < 2$, $0 < y_i < 2$ при $0 < 2\lambda - 4 < 1$, тобто при $\lambda \in [2, 5/2)$. Тому отримуємо $y_{i^*+1} = 1$ або $x_{i^*} = 1$. Нехай $\psi_{\pm}(x)$ — функції, задані формулами

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} x/2 & \sqrt{x/2 - x^2/4} \\ \sqrt{x/2 - x^2/4} & 1 - x/2 \end{pmatrix},$$

$$\psi_-(x) = \begin{pmatrix} x/2 & -\sqrt{x/2 - x^2/4} \\ -\sqrt{x/2 - x^2/4} & 1 - x/2 \end{pmatrix}.$$

При $x \in [0, 2]$ матриці $\psi_{\pm}(x)$ є ортопроекторами. Нехай H — гільбертів простір і Q_1, Q_2, Q_3 — ортопроектори на ньому. Побудуємо зображення алгебри $\mathcal{P}_{5,\lambda}$ на просторі $\tilde{H} = \underbrace{H \oplus H \oplus \ldots \oplus H}_{n \text{ разів}}$ таким чином: (при непарному n)

$$\pi(p_1) = \operatorname{diag}(I, \psi_+(x_1) \otimes I, \ldots, \psi_+(x_{i^*})),$$

$$\pi(p_2) = \operatorname{diag}(Q_1, \psi_-(x_1) \otimes Q_2, \ldots, \psi_-(x_{i^*})),$$

$$\pi(p_3) = \operatorname{diag}(\psi_+(y_1) \otimes I, \ldots, \psi_+(y_{i^*}) \otimes I, Q_3),$$

$$\pi(p_4) = \operatorname{diag}(\psi_-(y_1) \otimes I, \ldots, \psi_-(y_{i^*}) \otimes I, I - Q_3),$$

$$\pi(p_5) = \operatorname{diag}(I - Q_1, \psi_-(x_1) \otimes (I - Q_2), (n_2 - 2)I, 0,$$

$$(n_3 - 2)I, 0, \ldots, (n_{i^*} - 2)I, 0);$$

(при парному n)

$$\pi(p_1) = \operatorname{diag}(I, \psi_+(x_1) \otimes I, \ldots, \psi_+(x_{i^*-1}) \otimes I, Q_3),$$

$$\pi(p_2) = \operatorname{diag}(Q_1, \psi_-(x_1) \otimes Q_2, \ldots, \psi_-(x_{i^*-1}) \otimes I, I - Q_3),$$

$$\pi(p_3) = \operatorname{diag}(\psi_+(y_1) \otimes I, \ldots, \psi_+(y_{i^*})),$$

$$\pi(p_4) = \operatorname{diag}(\psi_-(y_1) \otimes I, \ldots, \psi_-(y_{i^*})),$$

$$\pi(p_5) = \operatorname{diag}(I - Q_1, \psi_-(x_1) \otimes (I - Q_2), (n_2 - 2)I, 0,$$

$$(n_3 - 2)I, 0, \ldots, (n_{i^*} - 2)I).$$

За побудовою

$$\pi(p_1+p_2+p_5) = \mathrm{diag}\,(2, x_1 I, (2-x_1)I, (x_2+n_2-2)I, (2-x_2)I, \ldots),$$

$$\pi(p_3+p_4) = \mathrm{diag}\,(y_1 I, (2-y_1)I, y_2 I, (2-y_2)I, \ldots),$$

тобто з початкових співвідношень маємо $\pi(p_1+\ldots+p_5) = \lambda\tilde{I}$.

Також якщо m і n є взаємно простими, то $x_j - x_i \notin \mathbb{Z}$, $i \neq j$. Справді, нехай $x_j - x_i = = 2(j-i)(\lambda-2) - \sum_{i+1}^{j}(n_l - 2) \in \mathbb{Z}$, тоді $2(j-i)(\lambda-2) \in \mathbb{Z}$, що не виконується за припущенням. Звідси робимо висновок, що на діагоналі у оператора $\pi(p_1+p_2+p_5)$ стоять скалярні оператори $\lambda_s I$ з попарно різними λ_s. Отже, існує такий поліном R_i, що $R_s(\lambda_i) = 0$ для $s \neq i$ і $R_s(\lambda_s) = 1$. Тому $R_s(\pi(p_1+p_2+p_5)) = E_{ss} \otimes I \in \pi(\mathcal{P}_{5,\lambda})$, $s = 1, \ldots, n$.

Оскільки $E_{i,i+1} = E_{i\ i+1} \otimes I$ кратне $E_{i,i}\pi(p1+p_3)E_{i+1,i+1}$, то $E_{i,j} \in \pi(\mathcal{P}_{5,\lambda})$. Як наслідок отримуємо $\pi(\mathcal{P}_{5,\lambda}) = M_n(Q_1, Q_2, Q_3)$, і внаслідок довільності вибору Q_i це приводить до $*$-дикості алгебри $\mathcal{P}_{5,\lambda}$.

Залишилося показати, що алгебра $\mathcal{P}_{5,5/2}$ є $*$-дикою. Для цього розглянемо в гільбертовому просторі H три ортопроектори L_1, L_2, L_3 такі, що $L_1 \perp L_2$. Зображення π алгебри $\mathcal{P}_{5,5/2}$ у просторі $H \oplus H$ задаємо на твірних таким чином: $\pi(p_1) = \mathrm{diag}\,(L_1, L_3)$, $\pi(p_2) = \mathrm{diag}\,(L_2, I-L_3)$, $\pi(p_3) = \mathrm{diag}\,(I-L_1-L_2, I)$, $\pi(p_4) = \psi_+(3/2)\otimes I$ і $\pi(p_5) = \psi_-(3/2)\otimes I$. Тоді $\pi(p_1+p_2+p_3) = = \mathrm{diag}\,(I, 2I)$ і $\pi(p_4+p_5) = \mathrm{diag}\,(3/2I, I/2)$. Легко показати, що $\pi(\mathcal{P}_{5,5/2}) = M_n(R_1, R_2, R_3)$, тобто $\pi(\mathcal{P}_{5,5/2})$ є $*$-дикою алгеброю.

***Наслідок* 1.** *Алгебра $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ є $*$-дикою для $k \geq 5$ і $\lambda \in [2, k-2] \cap \mathbb{Q}$.*

Справді, якщо $k > 5$ і $\lambda > 3$, то, поклавши $P_{k-s+1} = P_{k-s+2} = \ldots = P_k = I$, будемо мати $\lambda - s \in [2,3]$ для деякого $s \leq k-5$ і, використавши теорему 1, отримаємо необхідне твердження.

Можна посилити наслідок 1. Нагадаємо, що алгебра $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ має незвідні $*$-зображення тоді і тільки тоді, коли λ належить множині Σ_k, яка складається з точок відрізка

$$\left[(k-\sqrt{k^2-4k})/2, (k+\sqrt{k^2-4k})/2\right]$$

і послідовностей точок $\alpha_i, \beta_i, k-\alpha_i, k-\beta_i$, де α_i і β_i — послідовності, задані співвідношеннями $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_{i+1} = \dfrac{k-\alpha_i}{k-1-\alpha_i}$ і $\beta_{i+1} = \dfrac{k-\beta_i}{k-1-\beta_i}$ (див. [15]). Якщо λ подати у вигляді нескоротного дробу $\dfrac{m}{n}$, то існує незвідне $*$-зображення $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ розмірності n. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $k \geq 4$ і $\lambda \in \Sigma_k \cap \mathbb{Q}$. Якщо існує скінченновимірне незвідне $*$-зображення π алгебри $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ з умовою $\mathrm{tr}\,\pi(p_j) \geq 3$ для деякого j, то алгебра $\mathcal{P}_{k+1,\lambda}$ є $*$-дикою.*

Доведення. Розглянемо незвідне зображення π алгебри $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ в $\mathbb{C}^n$. В деякому базисі $\pi(p_1)$ — діагональна матриця. Без обмежень загальності можна вважати, що

$$\pi(p_1) = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{і} \qquad \mathrm{tr}\,(\pi(p_1)) = s \geq 3.$$

Оскільки π — незвідне $*$-зображення, то існують поліноми R_{ij} такі, що $\pi(R_{ij}(p_1, \ldots, p_k)) = E_{ij}$.

Нехай тепер H — гільбертів простір і $P_1, \ldots, P_s$ — ортопроектори в H. Зображення π можна природним чином продовжити до зображення $\tilde{\pi}$ на $\tilde{H} = H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$, якщо вважати елементи матриць $\pi(p_j)$ скалярними операторами, тобто $\pi(p_j) \otimes I$, де I — одиничний оператор в H. Використовуючи це міркування, ми можемо задати зображення алгебри $\mathcal{P}_{k+1,\lambda}$ таким чином:

$$\tilde{\pi}(p_1) = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_s, 0 \ldots, 0),$$

$$\tilde{\pi}(p_j) = \pi(p_j) \otimes I, \ i = 2, \ldots, k,$$

$$\tilde{\pi}(p_{k+1}) = \operatorname{diag}(I - P_1, \ldots, I - P_s, 0 \ldots, 0).$$

Зауважимо, що $\tilde{\pi}(p_1 + p_{k+1}) = \pi(p_1) \otimes I$, і тому

$$E_{ij} \otimes I = \tilde{\pi}(R_{ij}(p_1 + p_{k+1}, p_2, \ldots, p_k)).$$

Таким чином, $\tilde{\pi}(\mathcal{P}_{k+1,\lambda})$ є матричною алгеброю над $\mathbb{C}\langle P_1, \ldots, P_s\rangle$ і внаслідок довільності вибору P_j така алгебра є $*$-дикою при $s \geq 3$. Отже, алгебра $\mathcal{P}_{k+1,\lambda}$ також є $*$-дикою.

Наслідок 2. *Нехай $\lambda \in \Sigma_k$. Лише для скінченної кількості раціональних значень λ алгебра $\mathcal{P}_{k+1,\lambda}$ не є $*$-дикою.*

Справді, нехай $\dfrac{m}{n}$ — нескоротний дріб і $\dfrac{m}{n} \in \Sigma_k$. Розглянемо незвідне зображення π алгебри $\mathcal{P}_{k,\lambda}$ розмірності n. Якщо $n \geq 2k+1$, то ранг одного з ортопроекторів $\pi(p_i)$ більший за 2.

Таким чином, $*$-алгебри $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_k,\lambda}$ з $k \geq 5$ можуть бути $*$-дикими, навіть коли M_i є двоточковими. Міркування з доведення теореми 2 вказують на більш загальне твердження, а саме, утворення нової $*$-алгебри шляхом додавання одного ортопроектора без додаткових співвідношень приводить до $*$-диких алгебр (див. аналогічне твердження 6 в [17]).

Твердження 1. *Нехай $\mathcal{A}$ — довільна $*$-алгебра, яка породжена елементами $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Припустимо, що існує незвідне n-вимірне $*$-зображення π алгебри $\mathcal{A}$, $n \geq 2$. Тоді $*$-алгебра $\mathcal{B} = \mathbb{C} < a_1, \ldots, a_k, p \mid p^2 = p^* = p >$ є $*$-дикою.*

Доведення. Нехай H — гільбертів простір і A та U — самоспряжені оператори на ньому, $U^2 = I_H$, $\sigma(A) = \{1/4, 1/3, 1/2\}$. Оператор

$$P = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} A & \sqrt{A - A^2}U \\ U^*\sqrt{A - A^2} & I_H - U^*AU \end{bmatrix},\ 0, \ldots, 0\right)$$

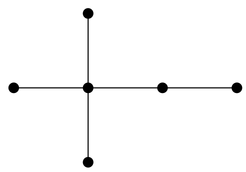
є ортопроектором у прямій сумі $\tilde{H} = H^n$. Задамо $*$-зображення $\tilde{\pi}$ алгебри $\mathcal{B}$ в H^n за формулами

$$\tilde{\pi}(a_i) = \pi(a_i) \otimes I_H, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad \tilde{\pi}(p) = P.$$

Оскільки π є незвідним, то існують поліноми R_{ij} такі, що $R_{ij}(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)) = E_{ij} \in$ $\in M_n(\mathbb{C})$, $i, j = 1, \ldots, n$. Отже, $\tilde{\pi}(\mathcal{B}) = M_n(A, \sqrt{A - A^2}U, U^*\sqrt{A - A^2}, U^*AU)$. Спектр A є дискретним, тому існує поліном R такий, що $R(A) = (\sqrt{A - A^2})^{-1}$. Звідси $\tilde{\pi}(\mathcal{B}) = M_n(A, U)$. З іншого боку, A однозначно задає і однозначно задається ортопроекторами P_1, P_2 на власні підпростори, які відповідають власним значенням $1/4$, $1/3$, а U задається ортопроектором $P_3 = (U + I_H)/2$. Як наслідок маємо $\tilde{\pi}(\mathcal{B}) = M_n(P_1, P_2, P_3)$ з умовою $P_1 \perp P_2$. Внаслідок довільності вибору A і U отримуємо $*$-дикість алгебри $\mathcal{B}$.

Твердження доведено.

3. Суми чотирьох операторів. Задача про зображення скалярного оператора лінійною комбінацією чотирьох ортопроекторів розглядалася в багатьох роботах [6, 7, 11 – 13]. Зокрема, існує тільки скінченна кількість нееквівалентних незвідних розкладів у матрицях розміру більше ніж 2, а такі розклади у (2×2)-матрицях можна параметризувати двома дійсними параметрами. Для алгебр $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_4,\lambda}$, що відповідають графу



вже існує набір $M_1, \ldots, M_4$, для яких ця алгебра має зображення для будь-яких λ з певного відрізка дійсної осі [18, 19]. Теорема 3 стверджує, що насправді алгебра $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_4,\lambda}$ є $*$-дикою при деяких M_i. Перш ніж сформулювати теорему, покажемо як побудувати незвідне $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{4,\lambda,\alpha}$ з прямої суми незвідних зображень $\mathcal{P}_{4,\lambda,\alpha}$, використовуючи певне сплетення ортопроекторів, яке не впливає на їхню суму. Нехай $\lambda = 2 + 1/13$ і $\alpha = 1 + 2/39$. Розглянемо послідовності $x_0 = 1$, $x_i = 1 + 2i/13$, $y_i = x_i + 1/13$, $i = 1, \ldots, 6$. За цими послідовностями можна побудувати зображення $\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}$ в $H_1 = \mathbb{C}^{13}$ таким чином:

$$\pi_1(p_5) = 0_{13},$$

$$\pi_1(p_1) = 1 \oplus \bigoplus_1^6 \psi_+(x_i), \qquad \pi_1(p_2) = 0 \oplus \bigoplus_1^6 \psi_-(x_i),$$
$$\pi_1(p_3) = \bigoplus_1^6 \psi_+(y_i) \oplus 1, \qquad \pi_1(p_4) = \bigoplus_1^6 \psi_-(y_i) \oplus 1. \tag{5}$$

З початкових умов безпосередньо випливає, що π_1 є $*$-зображенням. Щоб побудувати інше зображення π_2 алгебри $\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}$, введемо функції ϕ_+, ϕ_-. Нехай $x \in [0,1] \cup [1 + 2/39, 2 + + 2/39]$ і h_1, h_2 визначаються за формулами

$$h_1 = \frac{x(41/39 - x)}{1 + 1/39 - x}, \qquad h_2 = \frac{2x - h_1}{1 + 2/39}.$$

З безпосередніх обчислень випливає

$$\psi_+(h_1) + (1 + 2/39)\psi_-(h_2) = \operatorname{diag}(x, 2 + 2/39 - x).$$

За означенням покладемо $\phi_+(x) = \psi_+(h_1)$ і $\phi_-(x) = \psi_-(h_2)$.

Тепер задамо послідовності $z_0 = 1$, $z_i = 1 + 2i/13 - 2i/39$, $t_i = z_{i-1} + 1/13$, $i = 1, \ldots, 9$, і матриці зображення в $H_2 = \mathbb{C}^{19}$:

$$\pi_2(p_4) = \operatorname{diag}(0_{18}, 1),$$

$$\pi_2(p_1) = 1 \oplus \bigoplus_1^9 \psi_+(z_i), \qquad \pi_2(p_2) = 0 \oplus \bigoplus_1^9 \psi_-(z_i), \tag{6}$$

$$\pi_2(p_3) = \bigoplus_1^9 \phi_+(t_i) \oplus 1, \qquad \pi_2(p_5) = \bigoplus_1^9 \phi_-(t_i) \oplus 0.$$

За побудовою

$$\pi_2(p_1 + p_2) = \operatorname{diag}(z_0, z_1, 2 - z_1, \ldots, z_9, 2 - z_9),$$

$$\pi_2(p_3 + 41p_5/39) = \operatorname{diag}(t_1, 2 + 2/39 - t_1, \ldots, t_9, 2 + 2/39 - t_9, 1).$$

Звідси та з (5) маємо $\pi_2(p_1 + \ldots + p_4 + 41p_5/39) = (2 + 1/13)I_{19}$.

Зображення π_2 є незвідним. Справді, послідовність $t_1, \ldots, t_9$ монотонно зростає. Існують поліноми $R_s(x)$, кратні $x(x-1)$, такі, що

$$R_{2i}(2 + 2/39 - t_i) = 1, \qquad R_{2i-1}(t_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, 9,$$

$$R_{2i}(2 + 2/39 - t_j) = 0, \qquad R_{2i-1}(t_j) = R_{2i}(t_j) = 0,$$

$$R_{2i-1}(2 + 2/39 - t_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Тому $R_i(\pi_2(p_3 + p_5)) = E_{ii}$, $i = 1, \ldots, 18$. Матриця $\pi_2(p_1 + p_3)$ є тридіагональною з додатними числами на бічній діагоналі. Отже, $E_{ii}\pi_2(p_1 + p_3)E_{i+1\ i+1}$ ненульовий і кратний $E_{i\ i+1}$,

$$E_{18\ 18}(\pi_2(p_1) - \pi_2(p_1)E_{18\ 18}) = \sqrt{z_9/2 - z_9^2/4}E_{18\ 19}.$$

Звідси $E_{ij} \in \pi_2(\mathcal{P}_{4,27/13,41/39})$ для $i, j = 1, \ldots, 25$, і, отже, π_2 є незвідним.

Аналогічно доводиться незвідність π_1. Для побудови незвідного зображення з прямої суми $\pi_1 \oplus \pi_1 \oplus \pi_2$ ми використаємо унітарні оператори повороту, які діють тільки на парі базисних векторів. Нехай U_{ij} — унітарна матриця, дія якої залишає всі, крім двох, базисні вектори $\vec{e}_k$ на місці, а на підпросторі $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ діє як $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$. Тоді ортогональне перетворення блочної діагональної (4×4)-матриці $A = \operatorname{diag}(A_1, A_1)$ буде мати такий вигляд:

$$U_{24}^* \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} U_{24} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{3}{5}a_{12} & 0 & \frac{4}{5}a_{12} \\ \frac{3}{5}a_{21} & a_{22} & \frac{4}{5}a_{21} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}a_{12} & a_{11} & -\frac{3}{5}a_{12} \\ \frac{4}{5}a_{21} & 0 & -\frac{3}{5}a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Зауважимо, що при $a_{12} \neq 0, a_{21} \neq 0$ на місцях $(1,4)$ і $(2,3)$ матриці $U_{24}^* A U_{24}$ стоять ненульові елементи, а на місцях $(1,3)$ і $(2,4)$ — нулі.

Задамо зображення π алгебри $(\mathcal{P}_{4,27/13,41/39})$ на $H_1 \oplus H_1 \oplus H_2$ за формулами

$$\pi(p_1) = U_{22\ 39}^* U_{5\ 33}^* (\pi_1(p_1) \oplus \pi_1(p_1) \oplus \pi_2(p_1)) U_{5\ 33} U_{22\ 39},$$

$$\pi(p_2) = U_{22\ 39}^* U_{5\ 33}^* (\pi_1(p_2) \oplus \pi_1(p_2) \oplus \pi_2(p_2)) U_{5\ 33} U_{22\ 39},$$

$$\pi(p_3) = \pi_1(p_3) \oplus \pi_1(p_3) \oplus \pi_2(p_3),$$

$$\pi(p_4) = \pi_1(p_4) \oplus \pi_1(p_4) \oplus \pi_2(p_4),$$

$$\pi(p_5) = \pi_1(p_5) \oplus \pi_1(p_5) \oplus \pi_2(p_5).$$

Твердження 2. *Зображення π є незвідним.*

Доведення. Позначимо $\mathfrak{R} = \pi(\mathcal{P}_{4,27/13,41/39})$. Зауважимо, що $\pi_1(p_5) = 0_{13}$, тому

$$\pi(p_3 + p_5) = \pi_1(p_3) \oplus \pi_1(p_3) \oplus \pi_2(p_3 + p_5).$$

Звідси за означенням R_i маємо $R_i(\pi(p_3+p_5)) = E_{i+26\ i+26} \in \mathfrak{R}$, $i = 1, \ldots, 18$. Оператори $U_{5\ 33}$ і $U_{22\ 39}$ не змінюють 44- і 45-й стовпчики матриці $\pi(p_1)$. Тому, як і в попередньому пункті, $E_{44\ 44}(\pi(p_1) - \pi(p_1)E_{44\ 44})$ кратна $E_{44\ 45}$. На місцях $(i, i+1)$, $i = 27, \ldots, 44$, матриці $\pi(p_1+p_3)$ стоять ненульові елементи. Отже, $E_{ij} \in \mathfrak{R}$ для кожного $i, j > 26$. Основна ідея доведення полягає в тому, щоб показати, що всі матричні одиниці лежать в $\mathfrak{R}$ і тому $\mathfrak{R} = M_{45}(\mathbb{C})$.

Нехай

$$B = (b_{ij})_1^{45} = \mathrm{diag}\,(I_{26}, 0_{19})\pi(p_1)\mathrm{diag}\,(I_{26}, 0_{19}).$$

Матриця $B \in \mathfrak{R}$, оскільки

$$\mathrm{diag}\,(0_{26}, I_{19}) \in \mathfrak{R} \qquad \text{та} \qquad E - \mathrm{diag}\,(0_{26}, I_{19}) = \mathrm{diag}\,(I_{26}, 0_{19}) \in \mathfrak{R}.$$

Із зауваження, наведеного після формули (7), випливає, що в 33-му стовпчику матриці B стоїть лише один ненульовий елемент, тобто $BE_{33\ 33} = b_{4\ 33}E_{4\ 33}$. Отже, $E_{4\ 33} \in \mathfrak{R}$ і тому $E_{4\ 33}(E_{4\ 33})^* = E_{4\ 4} \in \mathfrak{R}$. Аналогічно для 32-, 38- і 39-го стовпчиків маємо $E_{5\ 32}$, $E_{21\ 39}$ і $E_{22\ 38} \in \mathfrak{R}$ і, як наслідок, $E_{5\ 5}$, $E_{21\ 21}$ і $E_{22\ 22} \in \mathfrak{R}$.

Тепер розглянемо матрицю

$$\hat{B} = B - b_{4\ 33}E_{4\ 33} - b_{33\ 4}E_{33\ 4} - b_{5\ 32}E_{5\ 32} - b_{32\ 5}E_{32\ 5} -$$

$$- b_{21\ 39}E_{21\ 39} - b_{39\ 21}E_{39\ 21} - b_{22\ 38}E_{22\ 38} - b_{38\ 22}E_{38\ 22}.$$

Вона, як і матриця $\pi(p_3)$, має блочно-діагональний вигляд із блоками розміру 1×1 і 2×2. Справджуються рівності

$$(\pi(p_3) - E_{4\ 4}\pi(p_3))E_{4\ 4} = \sqrt{y_2/2 - y_2^2/4}E_{3\ 4},$$

$$E_{5\ 5}(\pi(p_3) - \pi(p_3)E_{5\ 5}) = \sqrt{y_3/2 - y_3^2/4}E_{5\ 6},$$

звідки $E_{3\ 4}$, $E_{5\ 6} \in \mathfrak{R}$, а тому $E_{3\ 3}$, $E_{6\ 6} \in \mathfrak{R}$. Крім того,

$$(\hat{B} - E_{3\ 3}\hat{B})E_{3\ 3} = b_{2\ 3}E_{2\ 3}, \qquad E_{6\ 6}(\hat{B} - \hat{B}E_{6\ 6}) = b_{6\ 7}E_{6\ 7},$$

а матриця$E_{4\ 4}\hat{B}E_{5\ 5} = b_{4\ 5}E_{4\ 5}$. Отже, $E_{2\ 2}$, $E_{7\ 7} \in \mathfrak{R}$. Використовуючи таку процедуру і далі, отримуємо матричні одиниці E_{ii} і $E_{j\ j+1}$, $i = 1, \ldots, 13$, $E_{j\ j+1}$, $j = 1, \ldots, 12$.

Якщо ж почати з матричних одиниць $E_{21\ 21}$ і $E_{22\ 22}$, то, застосовуючи їх до матриць $\pi(p_3)$ і $\hat{B}$, отримуємо E_{ii}, $i = 14, \ldots, 26$, і $E_{j\ j+1} \in \mathfrak{R}$, $j = 14, \ldots, 25$, а отже, і для всіх $j \le 44$, крім $j = 13$ та $j = 26$. Ці матричні одиниці отримуються з рівностей

$$E_{26\ 27} = E_{26\ 22}E_{22\ 38}E_{38\ 27}, \qquad E_{26\ 22} = E_{26\ 25}E_{25\ 24}E_{24\ 23}, \qquad E_{13\ 14} = E_{13\ 5}E_{5\ 32}E_{32\ 14},$$

$$E_{13\ 5} = \prod_6^{13} E_{i\ i-1}, \qquad E_{32\ 14} = \prod_{15}^{32} E_{i\ i-1}.$$

Таким чином, алгебра $\mathfrak{R}$ містить всі матричні одиниці і збігається з $M_{45}(\mathbb{C})$.

***Зауваження* 1.** При доведенні твердження 2 ми отримували матричні одиниці $E_{i\ i+1}$, використовуючи фактично лише елементи матриці $\pi(p_3 + p_5)$ та недіагональні елементи матриць $\pi(p_1)$ і $\pi(p_3)$.

Теорема 3. *Алгебра* $\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}$ *є* $*$*-дикою.*

Доведення. Нехай H — гільбертів простір і P_1, P_2, P_3 — ортопроектори на ньому. В прямій сумі $\hat{H} = \bigoplus_1^{45} H$ можна задати ортопроектор P таким чином:

$$P = P_1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{12 \text{ разів}} \oplus P_2 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{12 \text{ разів}} \oplus P_3 \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{18 \text{ разів}}.$$

Нехай $\hat{I}$ — одиничний оператор в $\hat{H}$. Тоді, визначаючи зображення $\hat{\pi}$ алгебри $\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}$ на твірних за формулами

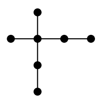
$$\hat{\pi}(p_1) = (\hat{I} - P)(\pi(p_1) \otimes I), \ \hat{\pi}(p_2) = P + (\pi(p_2) \otimes I),$$

$$\hat{\pi}(p_3) = \pi(p_3) \otimes I, \qquad \hat{\pi}(p_4) = \pi(p_4) \otimes I, \qquad \hat{\pi}(p_5) = \pi(p_5) \otimes I,$$

отримуємо $\mathfrak{A} = \hat{\pi}(\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}) = M_{45}(P_1, P_2, P_3)$. Справді, з означення операторів $\hat{\pi}(p_1)$, $\hat{\pi}(p_3)$, $\hat{\pi}(p_5)$ безпосередньо випливає, що $\hat{\pi}(p_3)$ і $\hat{\pi}(p_5)$ — блоки матриці зі скалярними операторами в кожному блоці, а в $\hat{\pi}(p_1)$ на недіагональних місцях також стоять скалярні оператори. Тому із зауваження 1 випливає, що існують поліноми R_{ij} такі, що $R_{ij}(\hat{\pi}(p_1), \hat{\pi}(p_3), \hat{\pi}(p_5)) = E_{i,j}$. Отже, $\mathfrak{A} = M_{45}(P_1, P_2, P_3)$ і внаслідок довільності вибору P_1, P_2, P_3 алгебра $\mathcal{P}_{4,27/13,41/39}$ є $*$-дикою.

***Зауваження* 2.** Можна побудувати аналогічні конструкції і для алгебр $\mathcal{P}_{4,2+\frac{1}{2k+1},1+\frac{2}{3(2k+1)}}$, $k > 6$, проте матриці будуть великих розмірів і ми їх не наводимо.

***Зауваження* 3.** Як випливає з роботи [20], для алгебр, які відповідають графу



існують розстановки ваг, при яких алгебра $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_4,\lambda}$ є $*$-дикою. Наприклад, для ортопроекторів P_i, Q_j, $P_i \perp Q_i$ рівність

$$2P_1 + Q_1 + 2P_2 + Q_2 + P_3 + P_4 = 3I$$

виконується, якщо покласти $P_1 = L_1$, $P_2 = L_2$, $P_3 = I - P_4 = L_3$, $Q_1 = Q_2 = I - (L_1 + L_2)$, де L_1, L_2, L_3 — довільні ортопроектори з умовою $L_1 \perp L_2$. Таким чином, при $M_1 = M_2 = \{0, 1, 2\}$ і $M_3 = M_4 = \{0, 1\}$ алгебра $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_4,3}$ є $*$-дикою.

4. Суми трьох операторів. Задача про знаходження великої кількості розкладів фіксованого скалярного оператора у суму 3-х самоспряжених операторів зі скінченним спектром залишалась певний час нерозв'язаною. Але вже в [21] було показано, що існує незліченна кількість нееквівалентних розв'язків такої задачі при певних M_i і з ростом розмірності простору зображень кількість дійсних параметрів, які характеризують нееквівалентні розклади, збільшувалась. У цьому пункті ми покажемо, що при деяких M_1, M_2, M_3 справджується більш сильне твердження, а саме, алгебри $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_3,1}$ є $*$-дикими.

Нехай R — якобієва матриця

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр якої складається з шести різних чисел.

Теорема 4. *Нехай* $M_1 = M_2 = \sigma(S)$, $M_3 = \{-4, -2, 0, 2\}$. *Тоді алгебра* $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_3,1}$ *є* $*$*-дикою.*

Доведення. Для унітарних операторів u_1, u_2, u_3 в гільбертовому просторі таких, що

$$\sigma(u_i) = \left\{\sqrt[6]{1}, \overline{\sqrt[6]{1}}\right\}, \quad \sqrt[6]{1} \text{ — первісний}, \tag{8}$$

визначимо оператори

$$U = \operatorname{diag}(I, u_1, u_1, -u_1, -u_1, -u_1u_3),$$

$$V = \operatorname{diag}(I, I - u_1, u_1 - I, (u_1 - I)u_2, (I - u_1)u_2, (I - u_1)u_2(I - u_3)),$$

$$A_1 = U^*SU, \qquad A_2 = V^*SV, \qquad A_3 = E - A_1 - A_2.$$

З властивості (8) маємо $(I - u_i)(I - u_i^*) = I$, тобто V є унітарним. Звідси випливає, що A_1 і A_2 є самоспряженими та $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \sigma(S)$. Крім того, за побудовою

$$A_3 = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3I & I - u_2 \\ I - u_2^* & -3I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}\right)$$

і її спектр складається з точок 0 і 2 та спектра матриці

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} -3I & I - u_2 \\ I - u_2^* & -3I \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $I - u_2$ є унітарним, тому $\hat{A}_3$ еквівалентна $\begin{pmatrix} -3I & I \\ I & -3I \end{pmatrix}$, тобто має в спектрі лише числа -4 і -2. Отже, ми отримали три самоспряжені оператори A_1, A_2, A_3 зі спектрами $\sigma(S)$ і $\{-4, -2, 0, 2\}$, які в сумі дають одиничний оператор. Покажемо, що $*$-алгебра $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle A_1, A_2, A_3\rangle = M_6(U_1, U_2, U_3)$. По-перше, існує поліном P такий, що $P(0) = P(2) = 0$ і $P(-4) = P(-2) = 1$, а тому $P(A_3) = E_{3,3} + E_{4,4} \in \mathfrak{A}$. Крім того, безпосередній підрахунок показує, що

$$W = (E - E_{3,3} - E_{4,4})A_1(E_{3,3} + E_{4,4}) = 2E_{2,3} + 3E_{5,4}.$$

Звідси $(W + W^*)^2 = 4(E_{2,2} + E_{3,3}) + 9(E_{4,4} + E_{5,5})$ і $(E_{3,3} + E_{4,4})(W + W^*)^2 = 4E_{3,3} + 9E_{4,4}$. Як наслідок маємо $E_{i,i} \in \mathfrak{A}$, $i = 2, \ldots, 5$.

По-друге, розглянемо добуток $E_{2,2}$ і матриці $A_1 + A_2$:

$$(A_1 + A_2)E_{2,2} = E_{1,2} \in \mathfrak{A} \Longrightarrow E_{1,1} = E_{1,2}E_{1,2}^* \in \mathfrak{A}.$$

Отже, всі матричні одиниці $E_{i,i}$ належать $\mathfrak{A}$, і оскільки на місцях $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ матриці A_1 і на місці $(5,6)$ матриці A_3 стоять ненульові скалярні оператори, то $E_{i,i+1} \in \mathfrak{A}$ для $i = 1,\ldots,5$, тобто $E_{i,j} \in \mathfrak{A}$, $i,j = 1,\ldots,6$. Таким чином, $\mathfrak{A} = M_6(u_1,u_2,u_3)$. Оператори u_1, u_2, u_3 однозначно визначаються ортопроекторами P_i на власний підпростір, що відповідає власному значенню $\sqrt[6]{1}$. Тому $\mathfrak{A}$ є матричною алгеброю над алгеброю, породженою трьома ортопроекторами без співвідношень, і, отже, є $*$-дикою алгеброю. Як наслідок отримуємо $*$-дикість $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$.

Для формулювання наступної теореми введемо позначення

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes I, \qquad S_2 = \operatorname{diag}(1,2,\ldots,6) \otimes I,$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} S_1 & I_6 \\ I_6 & S_2 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} S_1 & -I_6 \\ -I_6 & -S_2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Нехай $M_1 = \sigma(T_1)$, $M_2 = \sigma(T_2)$ і $M_3 = \{0,1,2\}$. Тоді алгебра $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ є $*$-дикою.*

Доведення. Визначимо оператори

$$U = \operatorname{diag}(I, u_1, u_1, u_1u_2, u_1u_2, u_1u_2u_3),$$

$$V = \operatorname{diag}(I, I-u_1, u_1-I, (u_1-I)(I-u_2), (I-u_1)(I-u_2), (I-u_1)(I-u_2)(I-u_3)),$$

де u_1, u_2 і u_3 — оператори з доведення теореми 4. Тоді можна побудувати оператори в $H^{12} = H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$:

$$A_1 = \operatorname{diag}(U^*, U^*)T_1\operatorname{diag}(U,U), \qquad A_2 = \operatorname{diag}(V^*, V^*)T_2\operatorname{diag}(V,V),$$

$$A_3 = \operatorname{diag}(-S_1, 0_6) + I_{12} - E_{2,3} - E_{3,2} - E_{4,5} - E_{5,4}.$$

Безпосередньо перевіряється, що $A_1 + A_2 + A_3 = I_{12}$ і $\sigma(A_3) = \{0,1,2\}$, а $\sigma(A_1) = M_1$, $\sigma(A_2) = M_2$. Як і при доведенні теореми 4, покажемо, що $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle A_1, A_2, A_3\rangle = M_{12}(u_1,u_2,u_3)$.

По-перше, $(A_3 - I_{12})^2 = \operatorname{diag}(I_6, 0_6)$. Тому $\operatorname{diag}(I_6,0_6) \in \mathfrak{A}$ і $\operatorname{diag}(0_6,I_6) \in \mathfrak{A}$. Оскільки $\operatorname{diag}(0_6,S_2) = \operatorname{diag}(0_6,I_6)A_1\operatorname{diag}(0_6,I_6)$ і

$$\begin{pmatrix} 0 & I_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(I_6,0_6)A_1\operatorname{diag}(0_6,I_6),$$

то $\operatorname{diag}(S_2,0_6)$ і $\operatorname{diag}(0_6,S_2) \in \mathfrak{A}$. Зауважимо, що S_2 є діагональною з простим спектром. Отже, для кожного $i = 1,\ldots,12$, $j = 1,\ldots,6$ матричні одиниці $E_{i,i} \in \mathfrak{A}$ і $E_{j,j+6} \in \mathfrak{A}$. За побудовою елементи $(2,3)$ і $(4,5)$ матриці A_1 так само, як і елементи $(1,2)$, $(3,4)$ та $(5,6)$ матриці A_3, є скалярами, тобто $E_{i,i+1} \in \mathfrak{A}$, $i = 1,\ldots,5$. Разом зі згаданими матричними одиницями вони породжують всі матричні одиниці. Оскільки на $(2i-1,2i)$-му місці матриці A_1 стоїть оператор u_i, то $\mathfrak{A} = M_{12}(u_1,u_2,u_3)$. По аналогії з теоремою 4 отримуємо $*$-дикість алгебри $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$.

Теорему доведено.

Чим більшою є величина $\min(|M_1|,|M_2|,|M_3|)$, тим легше доводити $*$-дикість відповідних алгебр при певних M_1, M_2, M_3. Наприклад, при $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 5$ алгебра $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ може бути $*$-дикою. Справді, розглянемо оператор

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і унітарні матриці $U = \operatorname{diag}(I, I, u_1, u_1u_2, u_1u_2u_3)$,

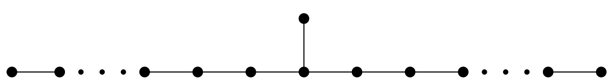
$$V = \operatorname{diag}(I, -I, u_1 - I, (u_1 - I)(I - u_2), (u_1 - I)(I - u_2)(I - u_3)),$$

де u_1, u_2 і u_3 — оператори з доведення теореми 4. Поклавши $A_1 = U^* S_3 U$ і $A_2 = V^* S_3 V$, отримаємо

$$A_1 + A_2 = \text{diag}\left(2, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Тепер залишилося визначити $A_3 = E - A_1 - A_2$. Звідси $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \sigma(S_3)$ і спектр A_3 складається з 5-ти дійсних чисел. Також $M_5(u_1,u_2,u_3) = \mathbb{C}\langle A_1, A_2, A_3\rangle$, оскільки $E_{1,1}$ — значення деякого полінома на A_3, $E_{1,2} = E_{1,1}(A_1 - E_{1,1})$, а $E_{2,2} = E_{2,1}E_{1,2}$. Використовуючи тепер лише елементи матриці A_3, отримуємо всі матричні одиниці. Далі міркування аналогічні міркуванням з доведення теореми 4.

Найбільш складно будуються вкладення алгебр $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ у матричні алгебри над $*$-дикими алгебрами, коли одна з множин має лише дві точки, тобто відповідний граф має вигляд



Нехай H — гільбертів простір, u_1, u_2 і u_3 — унітарні оператори з теореми 4 і матриці S_4 і S_5 мають вигляд

$$S_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_5 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо матриці

$$A_1 = \mathrm{diag}\,(S_4 \otimes I, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x) + \mathrm{diag}\,(0_4, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, 0),$$

$$\tilde{T}_2 = \mathrm{diag}\,(S_5 \otimes I, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x) - \mathrm{diag}\,(0_4, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, 0),$$

$$T_3 = E - \mathrm{diag}\,(-I, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, \sigma_x), \quad \text{де} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. *Нехай* $M_1 = \sigma(A_1)$, $M_2 = \sigma(\tilde{T}_2)$ *і* $M_3 = \{0, 2\}$. *Тоді алгебра* $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ *є* $*$*-дикою.*

Доведення. Матриці A_2 і A_3 будуть еквівалентні $\tilde{T}_2$ і T_3 відповідно. Розглянемо унітарні оператори в H^{11}:

$$U = \mathrm{diag}\,(I_6, u_1 - I, u_1 - I, (u_1 - I)(u_2 - I), (u_1 - I)(u_2 - I), (u_1 - I)(u_2 - I)(u_3 - I)),$$

$$V = \mathrm{diag}\,(I_6, u_1, u_1, u_1u_2, u_1u_2, u_1u_2u_3).$$

Тоді, задаючи $A_2 = U^*\tilde{T}_2U$, $A_3 = V^*T_3V$, отримуємо $A_1 + A_2 + A_3 = E$.

Покажемо, що C^*-алгебра $\mathfrak{A} = C^*(A_1, A_2, A_3) = M_n(C^*(u_1, u_2, u_3))$. Зауважимо, що $B_1 = A_3A_1A_3 = \mathrm{diag}\,(20I, \tilde{B}_1)$, де $\tilde{B}_1$ — самоспряжений оператор з $\|\tilde{B}_1\| \le 19$. Існує неперервна функція $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ така, що $f(20) = 1$ і $f(t) = 0$ при $t \in [-19, 19]$. Тому $f(B_1) = E_{1,1} \in \mathfrak{A}$. Також $E_{1,2} + E_{1,3} = E_{1,1}A_1 - 5E_{1,1}$. З безпосередніх обчислень маємо

$$W = (E_{1,2} + E_{1,3})A_1A_3 = (2E_{1,1} + 5E_{1,2} + E_{1,4} + E_{1,5})A_3 = 4E_{1,1} + 5E_{1,2} - 5E_{1,3}.$$

Звідси $E_{1,2} = (W - 4E_{1,1} + 5(E_{1,2} + E_{1,3}))/10 \Longrightarrow E_{1,2}, E_{1,3} \in \mathfrak{A}$. Тому $E_{i,j} \in \mathfrak{A}$, $i, j = 1, 2, 3$. Далі, матриця $B_2 = \mathrm{diag}\,(0_3, I_8)(A_1 + A_3)\mathrm{diag}\,(0_3, I_8)$ має блочно-діагональний вигляд $\mathrm{diag}\,(4, \tilde{B}_2)$, де $\tilde{B}_2$ — самоспряжений оператор зі скінченним спектром і $\|\tilde{B}_2\| \le 3$. Тому існує поліном P такий, що $P(4) = 1$ і $P(t) = 0$ при $t \in \sigma(\tilde{B}_2)$. Отже, $E_{4,4} = P(B_2) \in \mathfrak{A}$. Тепер, використовуючи лише елементи матриці A_1, можемо отримати всі матричні одиниці. Справді, $E_{4,5} = E_{4,4}A_1\mathrm{diag}\,(0_4, I_7)$, $E_{5,5} = E_{5,4}E_{4,5}$, $E_{5,6} = E_{5,5}A_1\mathrm{diag}\,(0_5, I_6)$, і т. д. Таким чином, $E_{i,j} \in \mathfrak{A}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 11$, і $\mathfrak{A} = M_n(C^*(u_1, u_2, u_3))$. Звідси випливає, що алгебра $\mathcal{P}_{M_1,M_2,M_3,1}$ є $*$-дикою.

***Зауваження* 4.** Теорема 5 є наслідком теореми 6, проте конструкції вкладень алгебр відрізняються одна від одної, і тому ми залишили обидва твердження в роботі.

Як і в попередньому пункті, найбільш важко доводити $*$-дикість алгебр $\mathcal{P}_{M_1,\ldots,M_k,1}$, коли незначне зменшення кількості елементів M_i приводить до скінченновимірної задачі, тобто до алгебр зі скінченним числом нееквівалентних незвідних $*$-зображень.

Автор вдячний В. Л. Островському і Ю. С. Самойленку за ряд корисних зауважень і порад при обговоренні цієї тематики.

1. *Wu P. Y.* Additive combinations of special operators // Funct. Anal. and Oper. Theory. – 1994. – **30**. – P. 337 – 361.
2. *Davidson K. R., Marcoux L. W.* Linear spans of unitary and similarity orbits of a Hilbert space operator // J. Oper. Theory. – 2004. – **52**. – P. 113 – 132.
3. *Albeverio S., Ostrovsky V., Samoilenko Yu.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2006. – **308**, № 2. – P. 567 – 582.

4. *Matsumoto K.* Self-ajoint operators as a real span of 5 projections // Math. Jap. – 1984. – **29**. – P. 291 – 294.
5. *Власенко М. А., Меллит А. С., Самойленко Ю. С.* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, № 3. – С. 14 – 27.
6. *Kruglyak S. A., Popovych S. V., Samoilenko Yu. S.* The spectral problem and algebras associated with extended Dynkin graphs. I // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 383 – 396.
7. *Kruglyak S. A., Nazarova L. A., Roiter A. V.* Orthoscalar representations of quivers in the category of Hilbert spaces // Zap. Nauchn. Sem. POMI. – 2006. – **338**. – P. 180 – 201.
8. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
9. *Kruglyak S. A., Samoilenko Yu. S.* On the complexity of description of representations of $*$-algebras generated by idempotents // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – **128**. – P. 1655 – 1664.
10. *Bondarenko V. M.* On connection between $\boxplus$-decomposability and wildness for algebras generated by idempotents // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2003. – **9**, № 2. – P. 120 – 122.
11. *Kirichenko A. A.* On linear combinations of orthoprojectors // Uchen. Zap. Tavrich. Univ. Ser. Mat., Mekh., Inform., Kiber. – 2002. – № 2. – P. 31 – 39.
12. *Юсенко К. А.* Про четвірки проекторів, пов'язаних лінійним співвідношенням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1289 – 1295.
13. *Ostrovskyi V., Rabanovich S.* Some remarks on Hilbert representations of posets // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2013. – **19**, № 2. – P. 149 – 163.
14. *Ostrovskyi V. L.* On $*$-representations of a certain class of algebras related to a graph // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 3. – P. 250 – 256.
15. *Kruglyak S. A., Rabanovich V. I.. Samoilenko Yu. S.* On sums of projections // Funct. Anal. and Appl. – 2002. – **36**, № 3. – P. 182 – 195.
16. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Скалярные операторы, представимые суммой проекторов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 939 – 952.
17. *Albeverio S., Yusenko K., Proskurin D., Samoilenko Yu.* $*$-Wildness of some classes of C^*-algebras // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12** , № 4. – P. 315 – 325.
18. *Меллит А. С., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма частичных отражений кратна единичному оператору // Функцион. анализ и его прил. – 2004. – **38**, № 2. – С. 91 – 94.
19. *Грушевой Р. В.* Коли сума самоспряжених операторів із заданим цілочисельним спектром є скалярним оператором // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 4. – С. 470 – 477.
20. *Омельченко П. В.* Про зведення блочних матриць у гільбертовому просторі // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1338 – 1347.
21. *Yusenko K., Weist Th.* Unitarizable representations of quivers // Algebr. Represent. Theory. – 2013. – **16**, № 5. – P. 1349 – 1383.

Одержано 03.11.14