УДК 517.51

В. В. Боденчук, А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТОЧНІ ОЦІНКИ КОЛМОГОРОВСЬКИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ. I

We prove that the kernels of analytic functions of the form $H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, satisfy Kushpel's condition $C_{y,2n}$ beginning with a certain number n_h, which is explicitly expressed by the parameter h of smoothness of the kernel. As a result, for all $n \geq n_h$, we establish lower bounds for the Kolmogorov widths d_{2n} in the space C of functional classes that can be represented in the form of convolutions of the kernel $H_{h,\beta}$ with functions $\varphi \perp 1$ from the unit ball in the space L_∞.

Установлено, что ядра аналитических функций вида $H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \dfrac{\beta\pi}{2}\right)$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяют введенному Кушпелем условию $C_{y,2n}$, начиная с некоторого номера n_h, который в явном виде выражается через параметр h гладкости ядра. В результате для всех $n \geq n_h$ получены оценки снизу колмогоровских поперечников d_{2n} в пространстве C функциональных классов, которые представимы свертками ядра $H_{h,\beta}$ с функциями $\varphi \perp 1$, принадлежащими единичному шару пространства L_∞.

1. Вступ. Позначимо через $L = L_1$ простір 2π-періодичних сумовних функцій f з нормою $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, через L_∞ простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, а через C простір 2π-періодичних неперервних функцій f, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Нехай $\Psi_\beta(t)$ — фіксоване сумовне ядро вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Через $C^{\psi}_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, позначимо клас 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки з ядром Ψ_β:

$$f(x) = A + (\Psi_\beta * \varphi)(x) = A + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x - t)\varphi(t)dt, \quad A \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $\|\varphi\|_p \leq 1$, $\varphi \perp 1$. Функцію φ в рівності (2) називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}. Поняття (ψ, β)-похідної введене О. І. Степанцем (див., наприклад, [1], § 7, 8).

У роботі розглядаються ядра $\Psi_\beta(t)$ вигляду (1) при $\psi(k) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} kh}$, $h > 0$, тобто функції

$$H_{h,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}kh}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right),\quad h>0,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

При зазначених ψ класи $C^{\psi}_{\beta,p}$ будемо позначати через $C^{h}_{\beta,p}$.

Кажуть, що ядро $K\in L$ є CVD-ядром (ядром, що не збільшує осциляції), і записують $K\in$ CVD, якщо для довільної функції $\varphi\in C$ виконується нерівність $\nu(K*\varphi)\leq\nu(\varphi)$, де $\nu(g)$ — число змін знака на $[0,2\pi)$ функції $g\in C$.

Зауважимо, що при $\beta=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, ядра $H_{h,\beta}(t)$ є CVD-ядрами (див. [2]). Якщо ж $\beta\neq 2l$, $l\in\mathbb{Z}$, то ядра $H_{h,\beta}(t)$ можуть збільшувати осциляції (див. [3, с. 111]).

Як показано в [1, с. 141], функції з класів $C^{h}_{\beta,p}$, $h>0$, складаються з функцій $f\in C$, що допускають регулярне продовження $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ у смугу

$$\{z=x+iy:-h<y<h\} \tag{4}$$

комплексної площини. Зокрема (див. [4, с. 269]), при $\beta=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, і $p=\infty$ класи $C^{h}_{\beta,p}$ збігаються з відомими класами A^{h}_{∞} функцій $f\in C$, які допускають аналітичне продовження у смугу (4) і такі, що $\|\operatorname{Re}f(\cdot+iy)\|_{\infty}\leq 1$, $|y|<h$.

Нехай $d_m(\mathfrak{N},X)$ — поперечник за Колмогоровим порядку m центрально-симетричної множини $\mathfrak{N}\subset X$ у банаховому просторі X, тобто величина вигляду

$$d_m(\mathfrak{N},X)=\inf_{F_m\subset X}\sup_{f\in\mathfrak{N}}\inf_{y\in F_m}\|f-y\|_X, \tag{5}$$

де зовнішній інфімум розглядається по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із X.

Розв'язується задача знаходження точних значень поперечників $d_{2n}(C^{h}_{\beta,\infty},C)$, $d_{2n-1}(C^{h}_{\beta,\infty},C)$ та $d_{2n-1}(C^{h}_{\beta,1},L)$ для довільних $h>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ та всіх натуральних n, більших за деякий номер n_h, що залежить лише від параметра h. У першій частині роботи встановлено оцінки

$$d_{2n}(C^{h}_{\beta,\infty},C)\geq\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C, \tag{6}$$

$$d_{2n-1}(C^{h}_{\beta,1},L)\geq\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C \tag{7}$$

для всіх номерів n, починаючи з деякого номера n_h. У другій її частині для всіх номерів n, починаючи з деякого номера $n^*_h\leqslant n_h$ знайдено точні значення найкращих наближень класів $C^{h}_{\beta,\infty}$ та $C^{h}_{\beta,1}$ у метриках просторів C і L відповідно тригонометричними поліномами t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$. При цьому буде показано, що при $n\geq n_h$ в (6) і (7) можна поставити знак „дорівнює”, і, як наслідок, знайдено точні значення колмогоровських поперечників зазначених класів.

При $\beta=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, В. М. Тихомиров [5, 6] одержав нерівність (6), яка разом з результатами роботи Н. І. Ахієзера [7] дозволила записати рівності

$$d_{2n-1}(C^{h}_{\beta,\infty},C)=d_{2n}(C^{h}_{\beta,\infty},C)=\|H_{h,\beta}*\varphi_n\|_C,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Однак доведення нерівності (6) у [5, 6] не було повним. Коректне доведення зрештою було отримане Форстом [2], який фактично показав, що ядро $H_{h,\beta}(t)$ при $\beta=2l$, $l\in\mathbb{Z}$, є CVD-ядром.

Згодом А. Пінкус розробив методи, які дозволяють отримувати точні оцінки поперечників для класів згорток, що породжуються довільними CVD-ядрами (див. [8, 9]). Як зауважено вище, при $\beta \neq 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, ядра $H_{h,\beta}(t)$ не є CVD-ядрами і тому точні оцінки знизу поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ неможливо отримати, користуючись методами, які розвинув А. Пінкус [9].

Зауважимо також, що для всіх $h > 0$ таких, що

$$\frac{\operatorname{ch} kh}{\operatorname{ch}(k+1)h} \leq \frac{\operatorname{ch} h}{\operatorname{ch} 2h} \leq \rho(\beta), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

де $\rho(\beta) = 0,2$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, і $\rho(\beta) = 0,193864$, якщо $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, нерівності (6) та (7) при довільних $n \in \mathbb{N}$ випливають з роботи [10, c. 1118, 1119]. Обчислення показують, що умова (8), а разом з нею і оцінки (6) та (7), має місце при всіх $h \geq 1,644651$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$, і $h \geq 1,67423$, якщо $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Допоміжні твердження. Нерівності (6), (7) встановимо, використавши запропонований О. К. Кушпелем [11] метод знаходження оцінок знизу поперечників класів згорток із твірними ядрами Ψ_β, що задовольняють так звану умову $C_{y,2n}$. Наведемо означення і відомі твердження, які будуть використовуватись у подальшому.

Нехай $\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 2\pi\}$, $x_k = k\pi/n$ — розбиття проміжку $[0, 2\pi]$ та

$$\Psi_{\beta,1}(t) = (\Psi_\beta * B_1)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} \cos\left(kt - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right),$$

де $\Psi_\beta(t)$ — ядро вигляду (1), а $B_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \sin kt$ — ядро Бернуллі. Через $S\Psi_{\beta,1}(\Delta_{2n})$ позначатимемо простір SK-сплайнів $S\Psi_{\beta,1}(\cdot)$ за розбиттям Δ_{2n}, тобто множину функцій вигляду

$$S\Psi_{\beta,1}(\cdot) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \Psi_{\beta,1}(\cdot - x_k), \quad \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = 0, \tag{9}$$

$$\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Фундаментальним SK-сплайном називають функцію $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot) = \overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ вигляду (9), що задовольняє співвідношення

$$\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{1, 2n-1}, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

де $y_k = x_k + y$, $x_k = k\pi/n$, $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right)$. Як зазначено у роботі [10], серед (ψ, β)-похідних будь-якого сплайна вигляду (9) існує функція, яка є сталою на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}). Саме таку функцію будемо розуміти під записом $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(\cdot))^\psi_\beta$.

Означення. *Будемо казати, що для деякого дійсного числа y і розбиття Δ_{2n} ядро $\Psi_\beta(\cdot)$ вигляду (1) задовольняє умову $C_{y,2n}$ (і записувати $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$), якщо для цього ядра існує єдиний фундаментальний сплайн $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, \cdot)$ і для нього виконуються рівності*

$$\operatorname{sign}\left(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y, t_k)\right)^\psi_\beta = (-1)^k \varepsilon e_k, \quad k = \overline{0, 2n-1},$$

де $t_k = (x_k + x_{k+1})/2$, e_k дорівнює або 0, або 1, а ε набуває значень ± 1 і не залежить від k.

Теорема 1 [11, 12]. *Нехай при деякому $n \in \mathbb{N}$ функція Ψ_β вигляду* (1), *що породжує класи $C^\psi_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, задовольняє умову $C_{y,2n}$, де y — точка, в якій функція $|(\Psi_\beta * \varphi_n)(t)|$, $\varphi_n(t) = = \operatorname{sign}\sin nt$, набуває максимального значення. Тоді*

$$d_{2n}(C^\psi_{\beta,\infty}, C) \geq \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C,$$

$$d_{2n-1}(C^\psi_{\beta,1}, L) \geq \|\Psi_\beta * \varphi_n\|_C.$$

Достатні умови включення $\Psi_\beta \in C_{y,2n}$ для ядер вигляду (1) при тих чи інших обмеженнях на ядра Ψ_β були встановлені у роботах [10, 11, 13, 14]. Це дозволило авторам зазначених робіт застосувати теорему 1 і одержати для низки нових випадків точні оцінки поперечників $d_m(C^\psi_{\beta,\infty}, C)$ та $d_m(C^\psi_{\beta,1}, L)$.

Для успішного застосування теореми 1 необхідно отримати певну інформацію про поведінку функцій $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta$. З цією метою встановимо наступне допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty$ і $y \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right)$ таке, що*

$$|\lambda_l(y)| \neq 0, \quad l = \overline{1,n}, \tag{10}$$

де

$$\lambda_l(y) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{2n} e^{il\nu\pi/n} \Psi_{\beta,1}\left(y - \frac{\nu\pi}{n}\right). \tag{11}$$

Тоді для довільного $t \in \left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{1,2n}$, виконується рівність

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^\psi_\beta = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4n\psi(n)} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{1}{2} + 2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos \dfrac{j\pi}{2n}} \right) \operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \gamma_1(y) + \gamma_2(y) \right), \tag{12}$$

в якій $t_k = \dfrac{k\pi}{n} - \dfrac{\pi}{2n}$, а

$$\gamma_1(y) = \gamma_1(\psi, \beta, k, y) = \frac{\psi(n)}{n} \left(\frac{z_0(y)}{|\lambda_n(y)|^2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \cos \dfrac{j\pi}{2n}} \right), \tag{13}$$

$$\gamma_2(y) = \gamma_2(\psi, \beta, y) = -\frac{R_0(y)\dfrac{n}{\psi(n)}}{2\left(2 + R_0(y)\dfrac{n}{\psi(n)}\right)} \operatorname{sign}\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{14}$$

$$z_j(y) = z_j(\psi, \beta, k, y) = |r_j(y)| \cos(j(t_k - y) + \arg(r_j(y))) -$$

$$-R_j(y)\cos(j(t_k-y))\,\mathrm{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right),\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{15}$$

$$R_j(y)=R_j(\psi,\beta,y)=|\lambda_{n-j}(y)|-\frac{\psi(n-j)}{n-j}-\frac{\psi(n+j)}{n+j},\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{16}$$

$$r_j(y)=\sum_{\nu=1}^{3}r_j^{(\nu)}(y),\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{17}$$

$$r_j^{(1)}(y)=r_j^{(1)}(\psi,\beta,y)=\frac{\psi(3n-j)e^{i\left(3ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)}}{3n-j}+$$

$$+\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{\psi((2m+1)n-j)e^{i\left((2m+1)ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)}}{(2m+1)n-j}+\frac{\psi((2m-1)n+j)e^{-i\left((2m-1)ny-\frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)}}{(2m-1)n+j}\right), \tag{18}$$

$$r_j^{(2)}(y)=r_j^{(2)}(\psi,\beta,y)=i\left(\frac{\psi(n+j)}{n+j}-\frac{\psi(n-j)}{n-j}\right)\cos\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{19}$$

$$r_j^{(3)}(y)=r_j^{(3)}(\psi,\beta,y)=\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j}+\frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\times$$

$$\times\left(\left|\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|-1\right)\mathrm{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{20}$$

Доведення. Будемо виходити з отриманого у роботі [10] зображення функції $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))_\beta^\psi$, згідно з яким за умови $|\lambda_j(y)|\neq 0$, $j=\overline{1,n}$, для довільного $t\in(x_{k-1},x_k)$ виконується рівність

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))_\beta^\psi=\frac{\pi}{4n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin jt_k\cdot\rho_j(y)-\cos jt_k\cdot\sigma_j(y)}{|\lambda_j(y)|^2\sin\dfrac{j\pi}{2n}}+\frac{(-1)^{k+1}\rho_n(y)}{|\lambda_n(y)|^2}\right), \tag{21}$$

де

$$\lambda_j(\cdot)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{2n}e^{ij\nu\pi/n}\Psi_{\beta,1}\left(\cdot-\frac{\nu\pi}{n}\right),$$

i — уявна одиниця, $\rho_j(\cdot)=\mathrm{Re}\,(\lambda_j(\cdot))$, $\sigma_j(\cdot)=\mathrm{Im}\,(\lambda_j(\cdot))$, $t_k=\dfrac{k\pi}{n}-\dfrac{\pi}{2n}$.

Змінюючи порядок підсумовування доданків у правій частині рівності (21), маємо

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin jt_k\cdot\rho_j(y)-\cos jt_k\cdot\sigma_j(y)}{|\lambda_j(y)|^2\sin\dfrac{j\pi}{2n}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin(n-j)t_k\cdot\rho_{n-j}(y)-\cos(n-j)t_k\cdot\sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2\sin\dfrac{(n-j)\pi}{2n}}=$$

$$= (-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\cos jt_k\cdot\rho_{n-j}(y)-\sin jt_k\cdot\sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2\cos\dfrac{j\pi}{2n}}. \tag{22}$$

З урахуванням (21) і (22) для фундаментального SK-сплайна $\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t)$ за умови $|\lambda_j(y)|\neq 0$, $j=\overline{1,n}$, одержуємо зображення

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n^2}\left(2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\cos jt_k\cdot\rho_{n-j}(y)-\sin jt_k\cdot\sigma_{n-j}(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2\cos\dfrac{j\pi}{2n}}+\frac{\rho_n(y)}{|\lambda_n(y)|^2}\right). \tag{23}$$

Покажемо, що величини $\lambda_{n-j}(y)$ вигляду (11) при $j=\overline{0,n-1}$ можна виразити таким чином:

$$\lambda_{n-j}(y)=e^{-ijy}\left(\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j}+\frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)+r_j(y)\right), \tag{24}$$

де величини $r_j(y)$ задаються рівностями (17).

Запишемо ядро $\Psi_{\beta,1}$ у комплексній формі

$$\Psi_{\beta,1}(t)=(\Psi_\beta * B_1)(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\cos\left(kt-\frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)=\frac12{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' c_k e^{ikt},$$

де

$$c_k=\frac{\psi(k)}{k}e^{-i\frac{(\beta+1)\pi}{2}},\quad c_{-k}=\frac{\psi(k)}{k}e^{i\frac{(\beta+1)\pi}{2}},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{25}$$

а штрих біля знака суми означає, що при підсумовуванні відсутній доданок з нульовим номером.

Підставивши у (11) замість ядра $\Psi_{\beta,1}$ його розклад у комплексний ряд Фур'є, одержимо

$$\lambda_l(y)=\frac1n\sum_{\nu=1}^{2n}e^{il\nu\pi/n}\frac12{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' c_k e^{ik(y-\nu\pi/n)}=\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{2n}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' c_k e^{i(ky+(l-k)\nu\pi/n)}=$$

$$=\frac{1}{2n}{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' c_k e^{iky}\sum_{\nu=1}^{2n}e^{i((l-k)\nu\pi/n)}. \tag{26}$$

Неважко переконатись, що

$$\sum_{\nu=1}^{2n}e^{i((l-k)\nu\pi/n)}=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad k\neq l-2mn,\quad m\in\mathbb{Z},\\ 2n, & \text{якщо}\quad k=l-2mn,\quad m\in\mathbb{Z}.\end{cases} \tag{27}$$

З (26) та (27) при $l=\overline{1,n}$ випливає таке зображення:

$$\lambda_l(y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_{l-2mn}e^{i(l-2mn)y}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_{2mn+l}e^{i(2mn+l)y}.$$

Звідси при $l = n - j$, $j = \overline{0, n-1}$, отримуємо

$$\lambda_{n-j}(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{(2m+1)n-j} e^{i((2m+1)n-j)y} =$$

$$= e^{-ijy}(c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} + r_j^{(1)}(y)). \tag{28}$$

З урахуванням (25) перетворимо перші два доданки у (28) таким чином:

$$c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} = \frac{\psi(n-j)}{n-j}\, e^{i\left(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\, e^{-i\left(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos\left(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} - \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin\left(ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_j^{(2)}(y). \tag{29}$$

Записуючи $\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)$ у вигляді

$$\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

з (29) маємо

$$c_{n-j}e^{iny} + c_{-(n+j)}e^{-iny} = \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\left(\left|\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| - 1\right)\operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_j^{(2)}(y) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_j^{(2)}(y) + r_j^{(3)}(y). \tag{30}$$

Рівності (28), (30) доводять формулу (24).

Перетворимо чисельник кожного доданка у правій частині рівності (23). Для цього, з урахуванням (24), запишемо

$$\rho_{n-j}(y) = \operatorname{Re}(\lambda_{n-j}(y)) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos jy \operatorname{sign}\, \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \operatorname{Re}(e^{-ijy} r_j(y)), \tag{31}$$

$$\sigma_{n-j}(y) = \operatorname{Im}(\lambda_{n-j}(y)) =$$

$$= -\left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\sin jy\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \mathrm{Im}\,(e^{-ijy}r_j(y)). \qquad (32)$$

Застосовуючи (31) та (32), отримуємо

$$\cos jt_k \cdot \rho_{n-j}(y) - \sin jt_k \cdot \sigma_{n-j}(y) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j}\right)\cos(j(t_k - y))\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \cos jt_k \cdot \mathrm{Re}\,(e^{-ijy}r_j(y)) - \sin jt_k \cdot \mathrm{Im}\,(e^{-ijy}r_j(y)) =$$

$$= \left(\frac{\psi(n-j)}{n-j} + \frac{\psi(n+j)}{n+j} + R_j(y)\right)\cos(j(t_k - y))\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ z_j(y) = |\lambda_{n-j}(y)|\cos(j(t_k - y))\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + z_j(y), \qquad (33)$$

де

$$z_j(y) = \cos jt_k \cdot \mathrm{Re}\,(e^{-ijy}r_j(y)) - \sin jt_k \cdot \mathrm{Im}\,(e^{-ijy}r_j(y)) -$$

$$- R_j(y)\cos(j(t_k - y))\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

а $R_j(y)$ означені у (16).

Внаслідок очевидної рівності

$$e^{-ijy}r_j(y) = |r_j(y)|(\cos(\arg(r_j(y)) - jy) + i\sin(\arg(r_j(y)) - jy))$$

величину $z_j(y)$ можна зобразити у вигляді (15).

При $j = 0$ формула (24) перетворюється у рівність

$$\lambda_n(y) = 2\frac{\psi(n)}{n}\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_0(y), \qquad (34)$$

де $r_0(y)$ визначається формулою (17), у якій

$$r_0^{(1)}(y) = 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\psi((2m-1)n)}{(2m-1)n}\cos\left((2m-1)ny - \frac{(\beta+1)\pi}{2}\right), \qquad (35)$$

$$r_0^{(2)}(y) = 0, \qquad (36)$$

$$r_0^{(3)}(y) = 2\frac{\psi(n)}{n}\left(\left|\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| - 1\right)\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (37)$$

З (34) – (37) випливає, що $\sigma_n(y) = 0$, і тому

$$\rho_n(y) = \lambda_n(y) = 2\frac{\psi(n)}{n}\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + r_0(y).$$

Звідси, враховуючи (15) та (16), можемо записати

$$\rho_n(y) = \left(2\frac{\psi(n)}{n} + R_0(y)\right) \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + z_0(y) =$$

$$= |\lambda_n(y)| \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + z_0(y), \tag{38}$$

де

$$z_0(y) = r_0(y) - R_0(y) \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Із зображення (23) і рівностей (33), (38) отримуємо

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n\psi(n)} \left(\operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) \left(2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n)}{n|\lambda_n(y)|} \right) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j(y)}{|\lambda_{n-j}(y)|^2 \cos \frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n) z_0(y)}{n|\lambda_n(y)|^2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}\pi}{4n\psi(n)} \left(\operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(2\frac{\psi(n)}{n} \sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{\cos j(t_k - y)}{|\lambda_{n-j}(y)| \cos \frac{j\pi}{2n}} + \frac{\psi(n)}{n|\lambda_n(y)|} \right) + \gamma_1(y) \right). \tag{39}$$

Згідно з (16)

$$\frac{\psi(n) \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{n|\lambda_n(y)|} = \frac{\operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right)}{2 + R_0(y)\dfrac{n}{\psi(n)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{R_0(y)\dfrac{n}{\psi(n)}}{2(2 + R_0(y)\dfrac{n}{\psi(n)})} \right) \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sign} \sin\left(ny - \frac{\beta\pi}{2}\right) + \gamma_2(y). \tag{40}$$

Із (39), (40) отримуємо (12).

Лему 1 доведено.

Лема 1 дозволяє одержати зручне для подальших досліджень зображення величин $(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta}$, що породжуються ядрами Ψ_β вигляду (1), коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову Даламбера $\mathcal{D}_q$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q, \quad q\in(0,1), \quad \psi(k)>0.$$

При цьому записуватимемо $\psi\in\mathcal{D}_q$.

Лема 2. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{n}\right)$. Тоді при виконанні умови* (10) *для довільного $t\in\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n},\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{1,2n}$, справджується рівність*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y,t))^{\psi}_{\beta}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4n\psi(n)}\left(\mathcal{P}_q(t_k-y)\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{m=1}^{5}\gamma_m(y)\right), \tag{41}$$

в якій $t_k=\dfrac{k\pi}{n}-\dfrac{\pi}{2n}$, $\mathcal{P}_q(t)$ — ядро аналітично продовжуваних у смугу функцій:

$$\mathcal{P}_q(t)=\frac{1}{2}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos jt}{q^j+q^{-j}}, \quad q\in(0,1),$$

величини $\gamma_1(y)$ та $\gamma_2(y)$ задано рівностями (13) *і* (14) *відповідно, а*

$$\gamma_3(y)=\gamma_3(\psi,\beta,k,y)=2\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1}\frac{\cos j(t_k-y)}{\dfrac{n}{\psi(n)}|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{42}$$

$$\gamma_4(y)=\gamma_4(\psi,\beta,k,y)=-2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\delta_j(y)\cos j(t_k-y)}{\dfrac{n}{\psi(n)}|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{43}$$

$$\gamma_5(y)=\gamma_5(q,\beta,k,y)=-2\sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty}\frac{\cos j(t_k-y)}{q^j+q^{-j}}\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{44}$$

$$\delta_j(y)=\delta_j(\psi,y)=\frac{n|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}{(q^{-j}+q^j)\psi(n)}-1, \quad j=\overline{1,[\sqrt{n}]}, \tag{45}$$

$[a]$ — ціла частина числа a.

Доведення. Згідно з позначенням (42)

$$2\frac{\psi(n)}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\cos j(t_k-y)}{|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=2\frac{\psi(n)}{n}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}\operatorname{sign}\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\gamma_3(y). \tag{46}$$

Далі з огляду на формули (43) – (45) можна записати рівності

$$2\frac{\psi(n)}{n}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{|\lambda_{n-j}(y)|\cos\dfrac{j\pi}{2n}}\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{(q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y))}\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\cos j(t_k-y)}{q^j+q^{-j}}-2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\delta_j(y)\cos j(t_k-y)}{(q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y))}\right)\mathrm{sign}\,\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(\mathcal{P}_q(t_k-y)-\frac{1}{2}\right)\mathrm{sign}\,\sin\left(ny-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\gamma_4(y)+\gamma_5(y). \tag{47}$$

Із (12), (46) та (47) отримуємо (41).

Лему 2 доведено.

Послідовності $\psi(k)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,kh}$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ вигляду (3) задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ при $q=e^{-h}$, а тому для вказаних ψ справджується лема 2. Отже, при виконанні нерівностей (10) для SK-сплайнів, породжених ядром $H_{h,\beta}(t)$, має місце зображення (41).

Наступне твердження містить оцінку зверху суми $\sum_{k=1}^{5}|\gamma_k(y)|$ у зображенні (41) для ядер $\Psi_\beta(t)=H_{h,\beta}(t)$ у випадку, коли $y=y_0$, де y_0 — точка, в якій функція $|\Psi_\beta*\varphi_n|$ набуває найбільшого значення.

Лема 3. *Нехай величини* $\gamma_l(y_0)$, $l=\overline{1,5}$, *задаються рівностями* (13), (14), (42) – (44), *в яких* $\psi(n)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,nh}=\dfrac{2q^n}{1+q^{2n}}$, $h>0$, $q=e^{-h}$, $\beta\in\mathbb{R}$, *а* $y_0=y_0(n,h,\beta)=\dfrac{\theta_n\pi}{n}$, *де* θ_n *— єдиний на* $[0,1)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}((2\nu+1)nh)}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0. \tag{48}$$

Тоді при $n\geq 9$ *та виконанні умови*

$$\frac{q^n}{1-q^{2n}}\leq\frac{7q^{\sqrt{n}}}{37n^2} \tag{49}$$

для довільного $t\in\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n},\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{1,2n}$, *має місце зображення*

$$(\overline{S\Psi}_{\beta,1}(y_0,t))_\beta^\psi=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4n\psi(n)}\left(\mathcal{P}_q(t_k-y_0)\mathrm{sign}\,\sin\left(ny_0-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sum_{l=1}^{5}\gamma_l(y_0)\right) \tag{50}$$

та справджується оцінка

$$\sum_{l=1}^{5}|\gamma_l(y_0)|\leq\frac{37}{5(1-q)}\,q^{\sqrt{n}}+\frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})},\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}.$$

Доведення. Встановимо спочатку зображення (50). Для цього достатньо показати, що при $y = y_0$ виконується умова (10). Знайдемо оцінки зверху величин $|r_j(y_0)|$ та $|R_j(y_0)|$ при $j = \overline{0, n-1}$. З (18) маємо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leq \frac{2q^{3n-j}}{(3n-j)(1+q^{2(3n-j)})} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{((2m+1)n-j)(1+q^{2((2m+1)n-j)})} + \right.$$

$$\left. + \frac{q^{(2m-1)n+j}}{((2m-1)n+j)(1+q^{2((2m-1)n+j)})}\right) <$$

$$< \frac{2q^{3n-j}}{3n-j} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m-1)n+j}}{(2m-1)n+j}\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{(2m+1)n-j}}{(2m+1)n-j} + \frac{q^{(2m+1)n+j}}{(2m+1)n+j}\right). \tag{51}$$

Оскільки внаслідок опуклості послідовності $\frac{q^k}{k}$ виконується нерівність $\frac{q^{k-j}}{k-j} + \frac{q^{k+j}}{k+j} < \frac{q^{k-n}}{k-n} + \frac{q^{k+n}}{k+n}$, $k > n$, $j = \overline{0, n-1}$, із (51) знаходимо

$$|r_j^{(1)}(y_0)| \leq 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2mn}}{2mn} + \frac{q^{2(m+1)n}}{2(m+1)n}\right) =$$

$$= \frac{q^{2n}}{n} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{q^{2mn}}{mn} \leq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} q^{2mn} = \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}. \tag{52}$$

Із рівняння (48) при $q = e^{-h}$ отримуємо

$$\left|\cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| = (1+q^{2n})\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{q^{2\nu n}}{1+q^{2(2\nu+1)n}}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| <$$

$$< (1+q^{2n})\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{2\nu n} = \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}). \tag{53}$$

У свою чергу, з (53) випливає, що

$$0 \leq 1 - \left|\sin\left(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| \leq \left|\cos\left(\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right| < \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}). \tag{54}$$

Із (53) та (19) маємо

$$|r_j^{(2)}(y_0)| < \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} - \frac{q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})}\right). \tag{55}$$

Із (54) та (20) знаходимо

$$|r_j^{(3)}(y_0)| < \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{1-q^{2n}} \left(\frac{q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} \right). \tag{56}$$

З умови (49) випливає, що

$$q^{2n} < \frac{49}{1369n^4}. \tag{57}$$

Отже, з (52), (55)–(57) при $n \geq 9$ випливає оцінка величини $|r_j(y_0)|$:

$$|r_j(y_0)| \leq \left| \sum_{\nu=1}^{3} r_j^{(\nu)}(y_0) \right| < \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \left(\frac{4(1+q^{2n})q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{1}{n} \right) <$$

$$< \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \left(4q(1+q^{2n}) + \frac{1}{n} \right) < \frac{38}{9} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{58}$$

При $j = 0$ оцінку (58) можна покращити. Дійсно, згідно з (35) маємо

$$|r_0^{(1)}(y_0)| \leq 4 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q^{(2m-1)n}}{((2m-1)n)(1+q^{2(2m-1)n})} < \frac{4}{3n} \sum_{m=2}^{\infty} q^{(2m-1)n} = \frac{4}{3n} \frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},$$

а з (37) та (54) випливає, що

$$\left| r_0^{(3)}(y_0) \right| < \frac{4q^{3n}}{n(1-q^{2n})}.$$

Тоді, враховуючи (36), можемо записати

$$|r_0(y_0)| \leq |r_0^{(1)}(y_0) + r_0^{(3)}(y_0)| \leq \frac{16}{3n} \frac{q^{3n}}{1-q^{2n}}. \tag{59}$$

Із (24) отримуємо зображення

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| =$$

$$= \left| \operatorname{sign} \sin \left(ny - \frac{\beta\pi}{2} \right) \left(\frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} \right) + r_j(y_0) \right|,$$

з якого безпосередньо випливає оцінка

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \leq \frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} + |r_j(y_0)|. \tag{60}$$

Оскільки внаслідок (54) та умови (49)

$$\left| \sin \left(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2} \right) \right| \geq 1 - \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+q^{2n}) > 0, \tag{61}$$

то отримуємо також оцінку

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| \geq \frac{2q^{n-j}}{(n-j)(1+q^{2(n-j)})} + \frac{2q^{n+j}}{(n+j)(1+q^{2(n+j)})} - |r_j(y_0)|. \tag{62}$$

Із (16), (60) та (62) випливає, що

$$|R_j(y_0)| \leq |r_j(y_0)|, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{63}$$

Беручи до уваги оцінки (62), (58), маємо

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| > \frac{q^{n-j}}{n-j} + \frac{q^{n+j}}{n+j} - \frac{38}{9}\,\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} = \frac{q^n}{n-j}\left(q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}\,q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})}\right). \tag{64}$$

Оскільки при $j = \overline{0, n-1}$ та $n \geq 9$ $\dfrac{9q^{-j}}{380(n-j)} > \dfrac{9}{380n} > \dfrac{7q^{\sqrt{n}}}{37n^2}$, то з умови (49) випливає нерівність

$$\frac{9}{380(n-j)}\,q^{-j} > \frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

яка еквівалентна нерівності

$$\frac{q^{-j}}{10} > \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{65}$$

Внаслідок (65) виконуються оцінки

$$q^{-j} + \frac{n-j}{n+j}\,q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})} =$$

$$= \frac{9q^{-j}}{10} + \frac{q^{-j}}{10} + \frac{n-j}{n+j}\,q^j - \frac{38(n-j)q^n}{9(1-q^{2n})} > \frac{9q^{-j}}{10}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{66}$$

Об'єднуючи (64) та (66), маємо

$$|\lambda_{n-j}(y_0)| > \frac{9q^{n-j}}{10(n-j)}. \tag{67}$$

З нерівності (67) випливає виконання умови (10), а отже, і справедливість зображення (50).

Встановимо оцінки зверху кожної з величин $|\gamma_l(y_0)|$, $l = \overline{1, 5}$. Розпочнемо з оцінки величини $|\gamma_1(y_0)|$. Оскільки для $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність $\cos x \geq 1 - \dfrac{2x}{\pi} > 0$, отримуємо співвідношення

$$\cos\frac{j\pi}{2n} \geq 1 - \frac{j}{n} = \frac{n-j}{n}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{68}$$

З (67) та (68) маємо

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}\,|\lambda_{n-j}(y_0)|^2 \cos\frac{j\pi}{2n} > \frac{81(1+q^{2n})}{200n}\,q^{n-2j}. \tag{69}$$

З (63) і (15) випливає, що $|z_j(y_0)| \leq 2|r_j(y_0)|$. Тому, враховуючи (58), (69) та умову (49), з (13) одержуємо

$$|\gamma_1(y_0)| \leq \frac{800}{81(1+q^{2n})} \max_{0\leq j\leq n-1} |r_j(y_0)| \frac{n}{q^n} \sum_{j=0}^{n-1} q^{2j} <$$

$$< \frac{30400\, nq^n}{729(1+q^{2n})(1-q^{2n})} \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} \leq \frac{212800}{26973n} q^{\sqrt{n}} \frac{1}{1-q^2}. \tag{70}$$

Оцінимо $|\gamma_2(y_0)|$. З (14), (63), (59), (49) і (57) отримуємо

$$|\gamma_2(y_0)| \leq \frac{\dfrac{8q^{2n}(1+q^{2n})}{3(1-q^{2n})}}{2\left|2 - \dfrac{8q^{2n}(1+q^{2n})}{3(1-q^{2n})}\right|} = \frac{2q^{2n}(1+q^{2n})}{|3-7q^{2n}-4q^{4n}|} < \frac{4q^{2n}}{3-11q^{2n}} =$$

$$= \frac{1-q^{2n}}{3-11q^{2n}} \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} = \left(\frac{1}{11} + \frac{8}{11(3-11q^{2n})}\right) \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} <$$

$$< \frac{5}{11} \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{140q^{n+\sqrt{n}}}{407n^2}. \tag{71}$$

Оцінимо величину $|\gamma_3(y_0)|$. Беручи до уваги (67) та (68), маємо

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos\frac{j\pi}{2n} > \frac{9(1+q^{2n})q^{-j}}{20}. \tag{72}$$

Тому з огляду на (72) з (42) знаходимо

$$|\gamma_3(y_0)| < \frac{40}{9(1+q^{2n})} \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{n-1} q^j = \frac{40(q^{[\sqrt{n}]+1} - q^n)}{9(1-q)(1+q^{2n})} \leq \frac{40q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)}. \tag{73}$$

Перш ніж оцінити $|\gamma_4(y_0)|$, встановимо оцінки зверху для величини $|\delta_j(y_0)|$, означеної в (45). З урахуванням (16)

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n} |\lambda_{n-j}(y_0)| \cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= \left(\frac{n}{n-j} \frac{(1+q^{2n})q^{n-j}}{q^n(1+q^{2(n-j)})} + \frac{n}{n+j} \frac{(1+q^{2n})q^{n+j}}{q^n(1+q^{2(n+j)})} + R_j(y_0) \frac{(1+q^{2n})n}{2q^n}\right) \cos\frac{j\pi}{2n} =$$

$$= (q^{-j} + q^j)\left(1 - 2\sin^2\frac{j\pi}{4n}\right) + \left(\frac{n}{n-j} \frac{q^{-j}(1+q^{2n})}{1+q^{2(n-j)}} - q^{-j} +\right.$$

$$\left. + \frac{n}{n+j} \frac{q^j(1+q^{2n})}{1+q^{2(n+j)}} - q^j + R_j(y_0) \frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}\right) \cos\frac{j\pi}{2n}. \tag{74}$$

Оскільки

$$\left|\frac{n}{n-j} \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}} - 1\right| = \left|\left(1 + \frac{j}{n-j}\right)\left(1 - \frac{q^{2(n-j)} - q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}}\right) - 1\right| =$$

$$= \left| \frac{j}{n-j} - \frac{n}{n-j} \, \frac{q^{2(n-j)} - q^{2n}}{1 + q^{2(n-j)}} \right| < \frac{j}{n-j} + \frac{n}{n-j} \, q^{2(n-j)},$$

$$\left| \frac{n}{n+j} \, \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n+j)}} - 1 \right| = \left| \left(1 - \frac{j}{n+j}\right) \left(1 + \frac{q^{2n} - q^{2(n+j)}}{1 + q^{2(n+j)}}\right) - 1 \right| =$$

$$= \left| -\frac{j}{n+j} + \frac{n}{n+j} \, \frac{q^{2n} - q^{2(n+j)}}{1 + q^{2(n+j)}} \right| < \frac{j}{n+j} + \frac{n}{n+j} \, q^{2n},$$

то

$$\max\left\{ \left| \frac{n}{n-j} \, \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n-j)}} - 1 \right|, \left| \frac{n}{n+j} \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2(n+j)}} - 1 \right| \right\} < \frac{j}{n-j} + \frac{n}{n-j} \, q^{2(n-j)}. \tag{75}$$

Тоді з (45), (58), (63), (74), (75) з урахуванням опуклості послідовності q^k для величин $|\delta_j(y_0)|$ будемо мати

$$|\delta_j(y_0)| \le$$

$$\le 2 \sin^2 \frac{j\pi}{4n} + \frac{1}{q^{-j} + q^j} \left(\left(\frac{j}{n-j} + \frac{nq^{2(n-j)}}{n-j} \right) (q^{-j} + q^j) + |R_j(y_0)| \frac{n(1+q^{2n})}{2q^n} \right) \le$$

$$\le 2 \left(\frac{j\pi}{4n} \right)^2 + \frac{j}{n-j} + \frac{nq^{2(n-j)}}{n-j} + \frac{n(1+q^{2n})|r_j(y_0)|}{2(q^{n-j} + q^{n+j})} \le$$

$$\le \frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{j}{n-j} + \frac{nq^{2(n-j)}}{n-j} + \frac{19n(1+q^{2n})}{18} \frac{q^n}{1-q^{2n}} =$$

$$= \frac{4j}{3(n-j)} + \left(\frac{j^2\pi^2}{8n^2} + \frac{nq^{2(n-j)}}{n-j} + \frac{19n(1+q^{2n})}{18} \, \frac{q^n}{1-q^{2n}} - \frac{j}{3(n-j)} \right). \tag{76}$$

Покажемо, що для всіх $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$

$$|\delta_j(y_0)| \le \frac{4j}{3(n-j)}. \tag{77}$$

Для цього внаслідок (76) досить переконатися, що при $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$ виконується нерівність

$$\frac{j}{3(n-j)} - \frac{j^2\pi^2}{8n^2} - \frac{\sqrt{n} q^{2(n-\sqrt{n})}}{\sqrt{n} - 1} > \frac{19n(1+q^{2n})}{18} \, \frac{q^n}{1-q^{2n}}. \tag{78}$$

Дійсно, як показано у роботі [15, с. 104], при кожному фіксованому $x \ge 9$ функція $f(x,\tau) = \frac{\tau}{3(x-\tau)} - \frac{\tau^2\pi^2}{8x^2}$ на $[1, \sqrt{x}]$ набуває найменшого значення у точці $\tau = 1$. Тому при $n \ge 9$ з урахуванням (49) для всіх $j = \overline{1, [\sqrt{n}]}$ маємо

$$\frac{j}{3(n-j)}-\frac{j^2\pi^2}{8n^2}-\frac{\sqrt{n}q^{2(n-\sqrt{n})}}{\sqrt{n}-1}\geq\frac{1}{3(n-1)}-\frac{\pi^2}{8n^2}-\frac{\sqrt{n}q^{2(n-\sqrt{n})}}{2}>$$

$$>\frac{1}{3(n-1)}-\frac{\pi^2}{8n^2}-\frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}. \qquad (79)$$

При $n=9$, враховуючи (49) та (57), отримуємо

$$\frac{1}{3(n-1)}-\frac{\pi^2}{8n^2}-\frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}=\frac{1}{24}-\frac{\pi^2}{648}-\frac{49}{5988006}>\frac{17}{648}-\frac{49}{5988006}>$$

$$>0,025>\frac{7\cdot 19(1+q^{18})q^3}{18\cdot 37\cdot 9}=\frac{7\cdot 19(1+q^{2n})q^{\sqrt{n}}}{18\cdot 37n}>\frac{19n(1+q^{2n})q^n}{18(1-q^{2n})}. \qquad (80)$$

При $n\geq 10$, враховуючи (49) та (57), отримуємо

$$\frac{1}{3(n-1)}-\frac{\pi^2}{8n^2}-\frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi^2}{80}\right)-\frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}>$$

$$>\frac{5}{24n}-\frac{49}{2738n^3\sqrt{n}}>\frac{7\cdot 19(1+q^{2n})q^{\sqrt{n}}}{18\cdot 37n}>\frac{19n(1+q^{2n})q^n}{18(1-q^{2n})}. \qquad (81)$$

З (79) – (81) випливає справедливість (78), а отже, і (77).

Формули (43), (72) та (77) дозволяють одержати при $n\geq 9$ оцінку величини $\gamma_4(y_0)$:

$$|\gamma_4(y_0)|\leq 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\dfrac{4j}{3(n-j)}}{\dfrac{9(1+q^{2n})q^{-j}}{20}}=\frac{160}{27(1+q^{2n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{j}{n-j}q^j\leq$$

$$\leq\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}jq^j<\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\sum_{j=1}^{\infty}jq^j<\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}\frac{q}{(1-q)^2}. \qquad (82)$$

Водночас для величини $|\gamma_4(y_0)|$ можна отримати іншу оцінку зверху. З цією метою, помітивши, що внаслідок (45)

$$\frac{n(1+q^{2n})}{2q^n}|\lambda_{n-j}(y_0)|\cos\frac{j\pi}{2n}=(q^j+q^{-j})(1+\delta_j(y_0)),$$

з (43), (77) при $n\geq 9$ одержуємо

$$|\gamma_4(y_0)|\leq 2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{\dfrac{4j}{3(n-j)}}{1-\dfrac{4j}{3(n-j)}}\,q^j=2\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}\frac{4j}{3n-7j}\,q^j\leq$$

$$\leq\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]}jq^j<\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\infty}jq^j<\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\frac{q}{(1-q)^2}. \qquad (83)$$

Із (82) і (83) випливає оцінка

$$|\gamma_4(y_0)| \leq \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}. \tag{84}$$

Згідно з (44) для величини $|\gamma_5(y_0)|$ маємо

$$|\gamma_5(y_0)| \leq 2 \sum_{j=[\sqrt{n}]+1}^{\infty} q^j = 2\,\frac{q^{[\sqrt{n}]+1}}{1-q} < 2\,\frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}. \tag{85}$$

Беручи до уваги оцінки (70), (71), (73), (84) та (85), при $n \geq 9$ одержуємо, що при виконанні умови (49)

$$\sum_{k=1}^{5} |\gamma_k(y_0)| < \frac{212800}{26973n}\, q^{\sqrt{n}}\, \frac{1}{1-q^2} + \frac{140q^{n+\sqrt{n}}}{407n^2} + \frac{40q^{\sqrt{n}}}{9(1-q)} +$$

$$+\frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} + \frac{2q^{\sqrt{n}}}{1-q} <$$

$$< \frac{q^{\sqrt{n}}}{1-q}\,(0,877 + 0,0043 + 4,45 + 2) + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} <$$

$$< \frac{37}{5(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}.$$

Лему 3 доведено.

3. Оцінки знизу колмогоровських поперечників. Для кожного фіксованого $h > 0$ через n_h будемо позначати найменший із номерів $n \geq 9$, для якого виконується нерівність

$$\frac{37}{5(1-e^{-h})}\, e^{-h\sqrt{n}} + \frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2} \min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1-e^{-h})\operatorname{ch} h}\right)\left(\frac{1-e^{-h}}{1+e^{-h}}\right)^{\frac{4}{1-e^{-2h}}}. \tag{86}$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для всіх номерів* n *таких, що* $n \geq n_h$, *виконуються нерівності* (6) *і* (7).

Доведення. Відповідно до теореми 1 для встановлення нерівностей (6) і (7) достатньо показати, що для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і всіх номерів $n \geqslant n_h$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ задовольняють умову $C_{y_0,2n}$, де y_0 — точка, в якій модуль функції $\Phi_{h,\beta,n}(\cdot) = (H_{h,\beta} * \varphi_n)(\cdot)$, $\varphi_n(t) = \operatorname{sign}\sin nt$, досягає найбільшого значення, тобто

$$|\Phi_{h,\beta,n}(y_0)| = |(H_{h,\beta} * \varphi_n)(y_0)| = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C.$$

Оскільки, як неважко переконатись,

$$\Phi_{h,\beta,n}(t) = (H_{h,\beta} * \varphi_n)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)\,\mathrm{ch}\,((2\nu+1)nh)} \sin\left((2\nu+1)nt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

то $\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)$ — періодична з періодом $2\pi/n$ диференційовна функція і така, що $\Phi_{h,\beta,n}\left(\cdot + \dfrac{\pi}{n}\right) = -\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)$. Тому максимальне значення π/n-періодичної функції $|\Phi_{h,\beta,n}(\cdot)|$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{n}\right)$ досягається у точці $y_0 = y_0(n,h,\beta) = \dfrac{\theta_n \pi}{n}$, де θ_n — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (48).

Згідно з лемою 2 роботи [15] для довільного $x \in \mathbb{R}$ і довільного $q \in (0,1)$

$$\mathcal{P}_q(x) > \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \tag{87}$$

Тоді з леми 3 і нерівності (87) випливає, що при $n \geq 9$, $q = e^{-h}$, $k = \overline{1, 2n}$, за умов (86) та (49) виконується нерівність

$$\mathcal{P}_q(t_k - y_0) + \sum_{m=1}^{5} \gamma_m(y_0)\,\mathrm{sign}\,\sin\left(ny_0 - \frac{\beta\pi}{2}\right) \geq 0. \tag{88}$$

На підставі зображення (50), а також нерівностей (61) і (88) робимо висновок, що при $n \geq 9$ за умов (86) та (49) справджується включення $H_{h,\beta} \in C_{y_0, 2n}$. Залишається лише переконатись, що (49) випливає з (86).

У роботі [16] було показано, що нерівність (49) випливає з умови

$$\frac{43}{10(1-q)} q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2} \min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n - 7\sqrt{n}}\right\} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}. \tag{89}$$

При $q = e^{-h}$ безпосередньо переконуємося, що з (86) випливає (89), а отже, з (86) випливає (49).

Теорему доведено.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. 1. – 427 с.
2. *Forst W.* Uber die Breite von Klassen holomorpher periodischer Funktionen // J. Approxim. Theory. – 1977. – **19**, № 4. – P. 325 – 331.
3. *Кушпель А. К.* Вопросы оптимального приближения функциональных классов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1988. – 283 с.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1976. – 304 с.
7. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН. – 1938. – **18**, № 4 – 5. – С. 241 – 245.
8. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209 – 235.
9. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Springer-Verlag, 1985. – 291 p.
10. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1112 – 1121.

11. *Кушпель А. К.* Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – **52**, № 6. – С. 1305 – 1322.
12. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070 – 1076.
13. *Сердюк А. С.* Оцінки поперечників та найкращих наближень класів згорток періодичних функцій // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 286 – 299.
14. *Сердюк А. С.* Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 674 – 687.
15. *Serdyuk A. S., Bodenchuk V. V.* Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals // J. Approxim. Theory. – 2013. – **173**, № 9. – P. 89 – 109.
16. *Сердюк А. С., Боденчук В. В.* Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 1. – С.204 – 222.

Одержано 11.08.14