УДК 517.51

В. В. Боденчук, А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТОЧНІ ОЦІНКИ КОЛМОГОРОВСЬКИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ. II

It is shown that the lower bounds in the space C established in the first part of our work for the Kolmogorov widths d_{2n} of the functional classes representable in the form of convolutions of the kernels

$$H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad h > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

with functions $\varphi \perp 1$ from the unit ball in the space L_∞ coincide (for all $n \geqslant n_h$) with the best uniform approximations by trigonometric polynomials whose order is not greater than $n-1$ for these classes. As a result, we obtain the exact values for the widths of the indicated classes of convolutions. Moreover, for all $n \geqslant n_h$ we establish the exact values of the Kolmogorov widths d_{2n-1} in the space L_1 of classes of convolutions of the functions $\varphi \perp 1$ from the unit ball in the space L_1 with kernel $H_{h,\beta}$.

Показано, что установленные в первой части работы оценки снизу колмогоровских поперечников d_{2n} в пространстве C для всех $n \geqslant n_h$ функциональных классов, которые представимы свертками ядер

$$H_{h,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad h > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

с функциями $\varphi \perp 1$, принадлежащими единичному шару пространства L_∞, совпадают с наилучшими равномерными приближениями указанных классов тригонометрическими полиномами порядка, не превышающего $n-1$. Как следствие, найдены точные значения поперечников указанных классов сверток. Найдены также точные значения поперечников d_{2n-1} в пространстве L_1 для всех $n \geqslant n_h$ классов сверток функций $\varphi \perp 1$, принадлежащих единичному шару пространства L_1, с ядром $H_{h,\beta}$.

Дана робота є продовженням статті [1] і має спільні з нею позначення, нумерацію пунктів, теорем, лем та формул. У ній розв'язується задача про знаходження точних значень найкращих наближень $E_n(C^h_{\beta,\infty})_C$ і $E_n(C^h_{\beta,1})_L$ та точних значень поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C)$ і $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L)$ для довільних $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ та всіх натуральних n, більших за деякий номер, що залежить лише від параметра h.

4. Оцінки найкращих наближень класів згорток тригонометричними поліномами. Позначивши через $\mathcal{T}_{2n-1}$ підпростір тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку $n-1$, розглянемо величину найкращого наближення центрально-симетричної множини $\mathfrak{N}$ у банаховому просторі $X \subset L$:

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_X, \qquad \mathfrak{N} \subset X \subset L. \tag{90}$$

Із означення колмогоровського поперечника і (90) випливає, що при всіх $n \in \mathbb{N}$

$$d_{2n-1}(\mathfrak{N}, X) \leqslant E_n(\mathfrak{N})_X, \qquad \mathfrak{N} \subset X \subset L. \tag{91}$$

З робіт Н. І. Ахієзера [2] та С. М. Нікольського [3] випливає, що при $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, і довільних $h > 0$ та $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)},$$

де

$$\varphi_n(t) := \operatorname{sign}\sin nt. \tag{92}$$

У даному пункті ми покажемо, що при довільних $\beta \in \mathbb{R}$ точні значення величин $E_n(C^h_{\beta,\infty})_C$ та $E_n(C^h_{\beta,1})_L$ для всіх номерів n, починаючи з деякого n^*_h, можна одержати на основі результатів роботи [4]. При цьому виявляється, що для всіх зазначених n рівності

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C$$

залишаються правильними при довільних $\beta \in \mathbb{R}$.

Для кожного фіксованого $h > 0$ покладемо

$$n^*_h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h \geqslant \ln\dfrac{10}{3}, \\ n^{**}_h, & \text{якщо } 0 < h < \ln\dfrac{10}{3}, \end{cases}$$

де n^{**}_h — найменше натуральне число, для якого виконується нерівність

$$(1-e^{-h})^2 \geqslant \frac{5+3e^{-2h}}{1-e^{-2h}}\frac{\left(\dfrac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+e^{-2h}}{2}\right)^{2n}}} + (2+e^{-2nh})e^{-2nh}. \tag{93}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $h > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n^*_h$, виконуються рівності*

$$E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{94}$$

в яких $\varphi_n(t)$ — функція вигляду (92), *а $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right) = 0. \tag{95}$$

Доведення. В роботі [4] встановлено, що якщо послідовність коефіцієнтів $\psi(k)$ ядра Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

яке породжує класи $C^\psi_{\beta,p}$, $p = 1, \infty$, задовольняє умову Даламбера $\mathcal{D}_q$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q, \qquad q\in(0,1), \quad \psi(k)>0,$$

то знайдеться номер n_0 такий, що для будь-якого натурального $n\geqslant n_0$ мають місце рівності

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C=E_n(C^{\psi}_{\beta,1})_L=\|\Psi_\beta*\varphi_n\|_C=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{96}$$

в яких $\theta_n=\theta_n(\psi,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0.$$

При цьому (див. [4, с. 188 – 190]) номер n_0 означається конструктивно як найменше натуральне число, для якого виконуються нерівності

$$(1-q)^2\geqslant\frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}}+\varepsilon_n(2+\varepsilon_n), \qquad n=n_0,n_0+1,\ldots, \tag{97}$$

де

$$\varepsilon_n=\varepsilon_n(\psi):=\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}-q\right|. \tag{98}$$

Крім того, згідно з теоремою 2 роботи [4], рівності (96) справджуються для всіх $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$ за умови, що $\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)}<\rho_*,\ k=1,2,\ldots$, де $\rho_*=0{,}3253678\ldots$ — корінь рівняння

$$2\rho+\frac{(1+3\rho)\rho^2}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^2}}=1$$

на інтервалі (0,1).

Оскільки коефіцієнти $\psi(k)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}kh}$ ядра $H_{h,\beta}(t)$ задовольняють умову $\mathcal{D}_q$ при $q=e^{-h}$ і відношення $\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=\dfrac{\operatorname{ch}kh}{\operatorname{ch}(k+1)h}=q\dfrac{1+q^{2k}}{1+q^{2k+2}}$ утворює спадну послідовність, то при $q\in\left(0,\dfrac{3}{10}\right]$

$$\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}\leqslant q\frac{1+q^2}{1+q^4}\leqslant 0{,}3253678, \qquad k=1,2,\ldots\ .$$

Отже, якщо $h>\ln\dfrac{10}{3}$, то рівності (94) виконуються для всіх $n\in\mathbb{N}$. При $\psi(k)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}kh}$ для величин $\varepsilon_n=\varepsilon_n(\psi)$ вигляду (98) мають місце співвідношення

$$\varepsilon_n=q^{2k+1}\frac{1-q^2}{1+q^{2k+2}}<q^{2k+1}, \qquad q=e^{-h}.$$

Тому виконання нерівності (93) гарантує виконання умови (97), а отже, згідно з [4], і рівностей (94) для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h^{**}$.

Теорему доведено.

5. Точні значення колмогоровських поперечників. Нагадаємо, що для кожного фіксованого $h > 0$ через n_h ми позначали найменший із номерів $n \geqslant 9$, для якого виконується нерівність

$$\frac{37}{5(1-e^{-h})}e^{-h\sqrt{n}} + \frac{e^{-h}}{(1-e^{-h})^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1-e^{-h})\operatorname{ch} h}\right)\left(\frac{1-e^{-h}}{1+e^{-h}}\right)^{\frac{4}{1-e^{-2h}}}.$$

У прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай $h > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, справджуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,\infty})_C = E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\operatorname{ch}((2\nu+1)nh)}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi - \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \tag{99}$$

де $\theta_n = \theta_n(h,\beta)$ — єдиний на $[0,1)$ корінь рівняння (95).

Доведення. З теорем 2 та 3, а також із співвідношення (91) випливає, що рівності (99) мають місце для всіх номерів $n \geqslant \max\{n_h^*, n_h\}$.

Покажемо, що $n_h \geqslant n_h^*$. При $h \geqslant \ln\dfrac{10}{3}$ вказана нерівність є очевидною, оскільки в цьому випадку $n_h^* = 1$. Тому залишилося переконатись, що при $h \in \left(0, \ln\dfrac{10}{3}\right)$ $n_h \geqslant n_h^* = n_h^{**}$.

Покладемо, як і раніше, $q = e^{-h}$. Тоді для доведення теореми достатньо показати, що при $q \in \left(\dfrac{3}{10}, 1\right)$ і $n \geqslant 9$ з нерівності

$$\frac{37}{5(1-q)}q^{\sqrt{n}} + \frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{27(n-\sqrt{n})}, \frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}} \tag{100}$$

випливає нерівність

$$(1-q)^2 \geqslant \frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}} + (2+q^{2n})q^{2n}. \tag{101}$$

Як доведено в [5, с. 106], при $n \geqslant 9$ і $q \in (0, 1)$ з умови (89) випливає нерівність

$$n > \frac{160q}{57(1-q)^2} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3.$$

Оскільки

$$\frac{160q}{57(1-q)^2} \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^3 > \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5},$$

то з урахуванням очевидної імплікації (100) $\Rightarrow$ (91) одержуємо, що з умови (100) при $n \geqslant 9$ і $q \in (0, 1)$ випливає нерівність

$$n > \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5}. \tag{102}$$

Покажемо, що при $q \in \left(\frac{3}{10}, 1\right)$ із (102) випливає нерівність

$$n > \frac{5}{1-q^2} \ln \frac{2}{1-q}. \tag{103}$$

Розглянемо різницю

$$v(q) = \frac{8q(1+q)}{3(1-q)^5} - \frac{5}{1-q^2} \ln \frac{2}{1-q}, \qquad q \in \left[\frac{3}{10}, 1\right). \tag{104}$$

Похідна цієї функції зростає і має вигляд

$$v'(q) = \frac{8(1+6q+3q^2)}{3(1-q)^6} - \frac{5}{(1+q)(1-q)^2} \left(\frac{2q}{1+q} \ln \frac{2}{1-q} + 1\right). \tag{105}$$

Із відомого розкладу (див., наприклад, [6, с. 58])

$$\ln t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t-1}{t}\right)^k, \qquad t \geqslant \frac{1}{2}, \tag{106}$$

при $t = \dfrac{2}{1-q}$ можемо записати оцінку

$$\ln \frac{2}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k = \frac{1+q}{1-q}. \tag{107}$$

З огляду на (105) і (107) одержуємо

$$v'(q) > \frac{8(1+6q+3q^2)}{3(1-q)^6} - \frac{5}{(1-q)^3}.$$

Оскільки $v'(q)$ зростає і $v'\left(\frac{3}{10}\right) > 0$, то $v'(q) > 0$, $q \in \left[\frac{3}{10}, 1\right)$. Отже, $v(q)$ також зростає на проміжку $\left[\frac{3}{10}, 1\right)$, а тому

$$v(q) > v\left(\frac{3}{10}\right) > 0, \qquad q \in \left[\frac{3}{10},\, 1\right). \tag{108}$$

Із (104) і (108) випливає, що при $q \in \left(\dfrac{3}{10},\, 1\right)$ (102) $\Rightarrow$ (103).

Нам залишилося довести імплікацію (103) $\Rightarrow$ (101).

Записавши ланцюжок очевидних співвідношень

$$5\ln\frac{2}{1-q} > \ln\frac{16}{(1-q)^5} > \ln\frac{\dfrac{2(5+3q^2)}{(1-q^2)(1-q)}+3}{(1-q)^2} > \ln\frac{\dfrac{5+3q^2}{1-q^2}\dfrac{2}{\sqrt{3(1-q^2)}}+3}{(1-q)^2}$$

і врахувавши нерівність

$$\ln\frac{2}{1+q^2} > \frac{1-q^2}{2},$$

яка безпосередньо випливає з розкладу (106) при $t = \dfrac{2}{1+q^2}$, з (103) отримуємо

$$n > \frac{1}{2\ln\dfrac{1+q^2}{2}}\ln\frac{\dfrac{5+3q^2}{1-q^2}\dfrac{2}{\sqrt{3(1-q^2)}}+3}{(1-q)^2}.$$

Остання нерівність рівносильна нерівності

$$(1-q)^2 > \frac{5+3q^2}{1-q^2}\frac{\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^2}} + 3\left(\frac{1+q^2}{2}\right)^{2n}. \tag{109}$$

Оскільки $3\left(\dfrac{1+q^2}{2}\right)^{2n} > (2+q^{2n})q^{2n}$, то з (109) випливає (101). Таким чином,

$$(100) \Rightarrow (102) \Rightarrow (103) \Rightarrow (101).$$

Теорему доведено.

При $\beta = 2l-1,\ l \in \mathbb{Z}$, із теореми 4 одержуємо наступне твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай $h > 0,\ \beta = 2l-1,\ l \in \mathbb{Z}$. Тоді для всіх номерів n таких, що $n \geqslant n_h$, виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty}, C) = d_{2n-1}(C^h_{\beta,1}, L) = E_n(C^h_{\beta,\infty})_C =$$

$$= E_n(C^h_{\beta,1})_L = \|H_{h,\beta} * \varphi_n\|_C = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)\,\mathrm{ch}((2\nu+1)nh)}\right|.$$

З теореми 4 легко одержати асимптотичні при $n\to\infty$ оцінки поперечників $d_{2n}(C^h_{\beta,\infty},C)$, $d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty},C)$ та $d_{2n-1}(C^h_{\beta,1},L)$.

Теорема 5. *Нехай $h>0$ та $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді при $n\geqslant n_h$*

$$d_{2n}(C^h_{\beta,\infty},C)=d_{2n-1}(C^h_{\beta,\infty},C)=d_{2n-1}(C^h_{\beta,1},L)=E_n(C^h_{\beta,\infty})_C=$$

$$=E_n(C^h_{\beta,1})_L=\frac{1}{\operatorname{ch}nh}\left(\frac{4}{\pi}+\gamma_n\frac{e^{-2nh}}{1-e^{-2nh}}\right), \tag{110}$$

де $|\gamma_n|\leqslant\dfrac{28}{3\pi}$.

Доведення. Знайдемо двосторонні оцінки правої частини формули (99). Оскільки

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\leqslant\frac{2}{3(1+q^{2n})}\frac{q^{3n}}{1-q^{2n}},\qquad n\in\mathbb{N},$$

то, враховуючи (54), для довільних $n\in\mathbb{N}$, $q\in(0,1)$ і $\beta\in\mathbb{R}$ одержуємо

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2q^n}{1+q^{2n}}-\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1-|\sin(\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2})|\right)-$$

$$-\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1-\frac{7}{3}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right), \tag{111}$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2q^n}{1+q^{2n}}+\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1-|\sin(\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2})|\right)+$$

$$+\left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2q^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)(1+q^{2(2\nu+1)n})}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(1+\frac{7}{3}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right). \tag{112}$$

З теореми 4 та оцінок (111) і (112) випливає, що при $n\geqslant n_h$ виконується (110).

Теорему доведено.

1. *Сердюк А. С., Боденчук В. В.* Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. I // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 719 – 738.
2. *Ахиезер Н. И.* О наилучшем приближении аналитических функций // Докл. АН. – 1938. – **18**, № 4–5. – С. 241 – 245.
3. *Никольский С. М.* Приближения функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 207 – 256.
4. *Сердюк А. С.* Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 172 – 194.
5. *Serdyuk A. S., Bodenchuk V. V.* Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals // J. Approxim. Theory. – 2013. – **173**, № 9. – P. 89 – 109.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений: 4-е изд. – М.: Наука, 1963. – 1100 с.

Одержано 11.08.14