УДК 517.98

Ю. В. Богданский, Я. Ю. Санжаревский

(Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

ЛАПЛАСИАН ПО ГАУССОВОЙ МЕРЕ И ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

We consider the Laplacian generated by the Gaussian measure on a separable Hilbert space and prove the ergodic theorem for the corresponding one-parameter semigroup.

Розглянуто лапласіан, що породжений гауссовою мірою на сепарабельному гільбертовому просторі. Для відповідної однопараметричної напівгрупи встановлено ергодичну теорему.

1. Предварительные сведения. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство $(\dim H \le \infty)$; μ — конечная неотрицательная борелевская мера на H с дополнительным условием: $\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого множества U в H.

Обозначим через $C_b^1(H)$ пространство всех непрерывно дифференцируемых функций на H, ограниченных на H вместе со своей производной.

Наряду с функциональным пространством $L_2(H) = L_2(H,\mu)$ будем рассматривать пространство $L_2(H;H)$ квадратично интегрируемых векторных полей на H. Норму в $L_2(H;H)$ задаем формулой $\|\,\mathbf{Z}\,\|^2 = \int_H \|\,\mathbf{Z}\,(x)\|^2 d_\mu$, а интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера.

Функциональное пространство $C_b^1(H)$ плотно в $L_2(H)$ (доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 1 из работы [1]).

Соответствие $\mathbf{grad}: f \mapsto \mathbf{grad}\, f$ задает оператор $\mathbf{grad}: L_2(H) \to L_2(H;\, H)$ с областью определения $C_b^1(H)$. Корректность задания этого оператора является следствием условий на меру $\mu:$ $\Big(\big(u \in C_b^1(H); u = 0\,(\mathrm{mod}\ \mu)\big) \Rightarrow \big(u \equiv 0\big)\Big)$. В частности, оператор $\mathbf{grad}$ корректно определен в случае гауссовой меры μ, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный в H образ.

Для $h \in H$ меру μ_h определим равенством $\mu_h(A) = \mu(A+h)$, которое предполагается выполненным для каждого борелевского множества в H $\big(A \in \mathfrak{B}(H)\big)$. Мера μ называется дифференцируемой (по Фомину) вдоль вектора h, если для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ существует предел $\vartheta_h(A) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\big(\mu_{t\,h}(A) - \mu(A)\big)$. В этом случае ϑ_h также является мерой (знакопеременной), абсолютно непрерывной относительно меры μ. Если при этом $\rho_\mu^h = \dfrac{d\vartheta_h}{d\mu} \in L_2(H)$, то мера μ называется L_2-дифференцируемой вдоль вектора h.

Лемма 1. *Пусть в пространстве H существует полная система $\mathcal{L}$ векторов, вдоль которых мера μ L_2-дифференцируема. Тогда оператор $\mathbf{grad}$ замыкаем.*

Доказательство. Пусть $u_m \in C_b^1(H)$, $u_m \to 0$ в $L_2(H)$; $\mathbf{grad}\, u_m \to \mathbf{Z} \in L_2(H;\, H)$. Если $\varphi \in C_b^1(H)$, то $\varphi \cdot u_m \to 0$ в $L_2(H)$; $\mathbf{grad}\,(\varphi \cdot u_m) = \varphi \cdot \mathbf{grad}\, u_m + u_m \cdot \mathbf{grad}\, \varphi \to \varphi \cdot \mathbf{Z}$ в $L_2(H;\, H)$. Для каждого вектора $h \in \mathcal{L}$ имеет место равенство

$$\int\limits_H \big(\mathbf{grad}\,(\varphi \cdot u_m),\, h\big)\, d\mu = -\int\limits_H \varphi\, u_m \cdot \rho_\mu^h\, d\mu$$

(см., например, [2]).

Переходя к пределу $m \to \infty$, получаем

$$\int\limits_H \big(\mathbf{Z}\,,\, \varphi\, h\big)\, d\mu = 0 \qquad \text{для каждого} \quad h \in \mathcal{L}.$$

Линейные комбинации индикаторов открытых подмножеств в H (с векторными коэффициентами) плотны в $L_2(H;H)$, а они, в свою очередь, аппроксимируются линейными комбинациями функций вида $\varphi \cdot h$ $(\varphi \in C_b^1; h \in \mathcal{L})$. Отсюда и следует равенство $\mathbf{Z} = 0\,(\mathrm{mod}\ \mu)$, что и доказывает лемму.

***Следствие* 1.** *Пусть μ — гауссова мера в H с ядерным корреляционным оператором A, образ которого плотен в H. Тогда $\mathbf{grad}\colon L_2(H) \supset C_b^1(H) \to L_2(H;H)$ — плотно определенный замыкаемый оператор.*

Доказательство следует из леммы 1, так как мера μ L_2-дифференцируема вдоль векторов $h \in \mathrm{Im}\, A$.

Определим оператор $\mathrm{div}\colon L_2(H;H) \to L_2(H)$ равенством $\mathrm{div} = -(\,\mathbf{grad}\,)^*$. Иными словами, для $\mathbf{Z} \in D(\mathrm{div})$ и любой функции $u \in C_b^1(H)$ выполнено равенство

$$\int\limits_H \big(\mathbf{Z}\,,\ \mathbf{grad}\, u\big)\, d\mu = -\int\limits_H \mathrm{div}\ \mathbf{Z}\ \cdot u\, d\mu.$$

Предлагаемый оператор div является L_2-версией классического понятия дивергенции векторного поля $\mathbf{Z}$ относительно меры μ (или, другими словами, логарифмической производной меры μ вдоль векторного поля $\mathbf{Z}$).

В случае, когда оператор $\mathbf{grad}$ допускает замыкание, лапласиан по мере μ определим формулой $\triangle = \mathrm{div} \circ \overline{\mathbf{grad}}\colon L_2(H) \to L_2(H)$. $\triangle$ — самосопряженный отрицательно определенный оператор; его область определения плотна в $D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$, наделенном нормой графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$ [3]. Поэтому $D(\triangle)$ плотна в $L_2(H)$ и, согласно теореме Хилле – Иосиды (в форме Люмера – Филлипса), оператор $\triangle$ является генератором C_0-полугруппы сжатий в пространстве $L_2(H)$.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых особенностей поведения этой полугруппы в случае гауссовой меры μ, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

2. Полугруппа, порожденная лапласианом. Пусть A — ядерный неотрицательный оператор в H, образ которого плотен в H; μ_A — гауссова мера в H с корреляционным оператором A; h — собственный вектор оператора A с собственным числом $\lambda > 0$. Через $\widetilde{h}$ обозначим функцию на H вида $\widetilde{h}(x) = (x,\, h)$. Тогда $\mathbf{grad}\,\widetilde{h} = h$ (постоянное векторное поле). В силу формулы интегрирования по частям [4] имеет место равенство

$$\int\limits_H v \cdot \widetilde{h}\, d\mu_A = \int\limits_H \big(\mathbf{grad}\, v,\, \lambda\, h\big)\, d\mu_A,$$

справедливое для всех $v \in C_b^1(H)$.

Из последнего равенства следует, что $\lambda\, h \in D(\mathrm{div})$ и $\widetilde{h} = -\,\mathrm{div}\,(\lambda\, h) = -\lambda\, \mathrm{div}\,(\,\mathbf{grad}\,\widetilde{h})$. Следовательно, $\widetilde{h} \in D(\triangle)$ и имеет место равенство

$$\triangle\widetilde{h} = -\frac{1}{\lambda}\widetilde{h}. \tag{1}$$

Если $T(t)$ — однопараметрическая полугруппа с генератором $\triangle$, то, как следует из (1), имеет место равенство

$$T(t)\widetilde{h} = e^{-\frac{t}{\lambda}}\,\widetilde{h}. \tag{$1'$}$$

Лемма 2. *Пусть* $u_1, \ldots, u_m \in C_b^1(H) \cap D(\triangle)$, $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^m)$. *Тогда сложная функция* $v(x) = \mathcal{F}\big(u_1(x), \ldots, u_m(x)\big) \in D(\triangle)$ *и при этом*

$$\triangle v = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{F}'_k\big(u_1(x), \ldots, u_m(x)\big) \triangle u_k(x) +$$

$$+ \sum_{i,\,k=1}^{m} \Big(\mathcal{F}''_{i\,k}\big(u_1(x), \ldots, u_m(x)\big)\,\mathbf{grad}\,u_i(x),\ \mathbf{grad}\,u_k(x)\Big). \tag{2}$$

Доказательство. Имеем $\mathbf{grad}\,v = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{F}'_k\big(u_1(x), \ldots, u_m(x)\big) \cdot \mathbf{grad}\,u_k(x)$. Далее следует воспользоваться тождеством $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{Z}) = f \cdot \operatorname{div}\mathbf{Z} + \big(\mathbf{grad}\,f,\ \mathbf{Z}\big)$, справедливым для $\mathbf{Z} \in D(\operatorname{div})$; $f \in C_b^1(H)$ [5].

Следствие 2. *Пусть* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *— попарно ортогональные собственные векторы оператора* A, *соответствующие собственным числам* $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$. *Тогда функция* $v = \widetilde{h_1} \cdot \widetilde{h_2} \cdot \ldots \cdot \widetilde{h_m}$ *является собственной функцией оператора* $\triangle$ *и имеет место равенство* $\triangle v = -\Big(\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \ldots + \dfrac{1}{\lambda_m}\Big)\widetilde{h_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{h_m}$.

Следствие 3. *Пусть* $\|h\| = 1$, $Ah = \lambda h$. *Для функции* $v = \widetilde{h}^{\,m}$ *имеет место равенство*

$$\triangle v = -\frac{m}{\lambda}v + m(m-1)\widetilde{h}^{\,m-2}. \tag{3}$$

Доказательство. Для функции $\mathcal{F}(s) = s^m$ равенство (2) превращается в следующее: $\triangle v = m \cdot \widetilde{h}^{\,m-1} \triangle \widetilde{h} + m\,(m-1)\widetilde{h}^{\,m-2}$, что и приводит к формуле (3).

Лемма 3. *Пусть* h *— нормированный собственный вектор оператора* A *с собственным числом* $\lambda > 0$, $T(t)$ *— однопараметрическая полугруппа в* $L_2(H)$ *с генератором* $\triangle$. *Тогда имеет место равенство*

$$T(t)\big(\widetilde{h}^{\,m}\big) = e^{-\frac{m\,t}{\lambda}}\left(\widetilde{h}^{\,m} - \sum_{k=1}^{[m/2]} \alpha_k \widetilde{h}^{\,m-2k}\right) + \sum_{k=1}^{[m/2]} \alpha_k T(t)\big(\widetilde{h}^{\,m-2k}\big), \tag{4}$$

где

$$\alpha_k = (-1)^{k-1}\,\frac{m!}{(m-2k)!\,k!\,2^k}\,\lambda^k. \tag{5}$$

Доказательство. При $t = 0$ формула (4) превращается в равенство $T(0)\big(\widetilde{h}^{\,m}\big) = \widetilde{h}^{\,m}$, и достаточно лишь доказать, что константа α_k в (4) удовлетворяет равенству (5). Применяя (3) к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{m\,t}{\lambda}}\left(\widetilde{h}^{m}-\sum_{k=1}^{[m/2]}\alpha_k\,\widetilde{h}^{m-2k}\right)\right)=e^{-\frac{m\,t}{\lambda}}\,\triangle\left(\widetilde{h}^{m}-\sum_{k=1}^{[m/2]}\alpha_k\,\widetilde{h}^{m-2k}\right),$$

приходим к системе уравнений

$$\alpha_1\cdot\frac{m}{\lambda}=m\,(m-1)+\frac{\alpha_1}{\lambda}\,(m-2),$$

$$\alpha_k\cdot\frac{m}{\lambda}=-\alpha_{k-1}\,(m-2k+2)\,(m-2k+1)+\alpha_k\cdot\frac{m-2k}{\lambda},\quad k=2,3,\ldots,\left[\frac{m}{2}\right].$$

Решая систему, получаем равенства (5).

***Следствие* 4.** *Если* $m=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, *то* $\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{m}\big)=0$; *если* $m=2k-2$, $k\in\mathbb{N}$, *то*

$$\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{2k}\big)=\frac{(2k)!}{2^k\,k!}\,\lambda^k. \tag{6}$$

Доказательство. В силу формулы ($1'$) $\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}\big)=0$, поэтому из (4) для нечетных m получим равенство $\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{m}\big)=0$. Поскольку для $m=0$ $\widetilde{h}^{0}=1$ и $T(t)\big(\widetilde{h}^{0}\big)\equiv\equiv 1\to 1,\ t\to+\infty$, в силу формулы (4) $\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{m}\big)$ существует для всех $m=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Положим $\beta_k=\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{2k}\big)$. Тогда из (4) получаем равенство

$$\beta_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^{(k)}\beta_{k-j}, \tag{7}$$

где $\alpha_j^{(k)}=(-1)^{j-1}\dfrac{(2k)!}{(2k-2j)!j!2^j}\lambda^j$, $1\le j\le k$ (см. (5)).

Формула (7) дает возможность доказать (6), применив метод математической индукции. При $k=0$ равенство очевидно. Индукционный шаг. Равенство

$$\frac{(2k)!}{2^k\,k!}\,\lambda^k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{(2k)!}{(2k-2j)!\,j!\,2^j}\,\lambda^j\cdot\frac{(2k-2j)!}{2^{k-j}\,(k-j)!}\,\lambda^{k-j}$$

непосредственно следует из очевидного: $1=C_k^1-C_k^2+\ldots+(-1)^{k-1}C_k^k$.

С другой стороны, из равенства $\displaystyle\int_H e^{(x,\,y)}\mu_A(dx)=e^{(Ay,\,y)/2}$ (см. [4]) следует равенство $\displaystyle\int_H\exp\big(t\widetilde{h}\big)\mu_A(dx)=e^{\lambda t^2/2}$, а разлагая обе части по степеням t, получаем тождества

$$\int_H\widetilde{h}^{m}\,d\mu_A=\begin{cases}0, & \text{если}\quad m=2k-1,\quad k\in\mathbb{N},\\ \dfrac{(2k)!}{2^k k!}\lambda^k, & \text{если}\quad m=2k,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,.\end{cases}$$

Тем самым приходим к формуле

$$\lim_{t\to+\infty}T(t)\big(\widetilde{h}^{m}\big)=\int_H\widetilde{h}^{m}\,d\mu_A.$$

Далее будет доказано, что последнее равенство имеет место и для любой функции $u \in$ $\in L_2(H)$.

3. Эргодическая теорема.

Лемма 4. *Пусть* $H = H_1 \oplus H_2$ — *разложение гильбертова пространства* H *в ортогональную сумму своих подпространств*; μ_1 *и* μ_2 — *конечные борелевские меры в* H_1 *и* H_2 *соответственно, удовлетворяющие условию* $\mu_k(U) > 0$ *для любого непустого открытого множества* $U \subset H_k$, $k = 1, 2$; P_k — *ортопроекторы в* H, $\operatorname{Im} P_k = H_k$, $k = 1, 2$; $\triangle_k$ — *лапласиан по мере* μ_k *в* H_k; $\triangle$ — *лапласиан в* H *по мере* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ (*предполагается, что операторы* $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$ *корректно определены* (*см. п.* 1)). *Пусть* $f \in D(\triangle_1) \subset L_2(H_1, \mu_1)$. *Тогда* $u = f \circ P_1 \in D(\triangle) \subset L_2(H, \mu)$ *и при этом* $\triangle u = (\triangle_1 f) \circ P_1$.

Доказательство. Пусть $f \in D(\triangle_1)$. Тогда существуют последовательность $f_n \in C_b^1(H_1)$, для которой $f_n \to f$ в $L_2(H_1)$, и предел последовательности $\{\mathbf{grad}\, f_n\}$ в $L_2(H_1; H_1)$, который обозначим $\overline{\mathbf{grad}}_1 f$. Но тогда функции $u_n = f_n \circ P_1 \in C_b^1(H)$, $\int_H (u_n - u)^2 d_\mu =$ $= \int_{H_1} (f_n - f)^2 d\mu_1 \to 0$, $n \to \infty$. Далее, $\big(\mathbf{grad}\, u_n\big)(x) = i_1\big(\mathbf{grad}\, f_n(P_1(x))\big)$, где $i_1 \colon H_1 \hookrightarrow H$ (вложение H_1 в H), последовательность $\{\mathbf{grad}\, u_n\}$ сходится в $L_2(H;\, H)$ к векторному полю $i_1\big(\overline{\mathbf{grad}}_1 f(P_1(x))\big)$. Действительно,

$$\int\limits_H \Big\| i_1\big(\mathbf{grad}\, f_n(P_1(x))\big) - i_1\big(\overline{\mathbf{grad}}_1 f(P_1(x))\big)\Big\|^2 d\mu =$$

$$= \int\limits_{H_1} \big\|\mathbf{grad}\, f_n - \overline{\mathbf{grad}}_1 f\big\|^2 d\mu_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Итак, $u = f \circ P_1 \in D(\overline{\mathbf{grad}})$.

Поскольку $f \in D(\triangle_1)$, для любой функции $\varphi \in C_b^1(H_1)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{H_1} \triangle_1 f \cdot \varphi \, d\mu_1 = -\int\limits_{H_1} \big(\overline{\mathbf{grad}}_1 f,\ \mathbf{grad}\,\varphi\big)\, d\mu_1. \tag{8}$$

Пусть $v \in C_b^1(H)$. Для доказательства леммы достаточно выполнения равенства

$$\int\limits_H \big((\triangle_1 f) \circ P_1\big) \cdot v \, d\mu = -\int\limits_H \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{grad}\, v\big)\, d\mu,$$

из которого вследствие произвольности $v \in C_b^1(H)$ и будет следовать результат:

$$\int\limits_H \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{grad}\, v\big)\, d\mu = [\text{далее} \quad x_k = P_k x] =$$

$$= \int\limits_H \big(i_1\ \overline{\mathbf{grad}}_1 f(P_1 x),\ P_1\ \mathbf{grad}\, v(x_1 + x_2)\big)\, d\mu = [\text{полагаем} \quad v_{x_2}(x_1) = v(x_1 + x_2)] =$$

$$= \int\limits_{H_2} \mu_2(dx_2) \int\limits_{H_1} \big(\overline{\mathbf{grad}}_1 f,\ \mathbf{grad}\, v_{x_2}\big)\, d\mu_1 = [\text{применим (8)}] =$$

$$= -\int\limits_{H_2} \mu_2(dx_2) \int\limits_{H_1} \triangle_1 f \cdot v_{x_2}\, d\mu_1 = -\int\limits_{H} \big(\triangle_1 f\big)(P_1 x) \cdot v(x_1 + x_2)\, d\mu.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $T_1(t)$ и $T_2(t)$ — C_0-полугруппы в банаховых пространствах X_1 и X_2 соответственно и $A_k = T_k'(0)$ — их генераторы. Пусть $Q\colon X_2 \to X_1$ — ограниченный линейный оператор, для которого $Q\big(D(A_2)\big) \subset D(A_1)$, и для каждого $y \in D(A_2)$ выполнено равенство $QA_2 y = A_1 Q y$. Тогда для любых $t \geq 0$ и $y \in X_2$ имеет место равенство*

$$QT_2(t)y = T_1(t)Qy. \tag{9}$$

Доказательство. Равенство (9) достаточно доказать для векторов y из плотного подмножества в X_2. Полагаем $y \in D(A_2)$. Тогда $Qy \in D(A_1)$, поэтому при $t \geq 0$ обе части равенства (9) дифференцируемы по t:

$$\frac{d}{dt}\big(QT_2(t)y\big) = QA_2T_2(t)y = A_1QT_2(t)y,$$

$$\frac{d}{dt}T_1(t)Qy = A_1T_1(t)Qy.$$

Поскольку $QT_2(0)y = Qy = T_1(0)Qy$, то равенство (9) для $y \in D(A_2)$ следует из единственности решения в X_1 дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t)$ с начальным условием $z(0) = Qy$.

Лемма доказана.

Следствие 5. *Пусть в условиях леммы 4 $T(t)$ — C_0-полугруппа в $L_2(H) = L_2(H, \mu)$ с генератором $\triangle$, $T_1(t)$ — C_0-полугруппа в $L_2(H_1)$ с генератором $\triangle_1$. Тогда для каждой функции $f \in L_2(H_1)$ при всех $t \geq 0$ имеет место равенство*

$$T(t)\big(f \circ P_1\big) = \big(T_1(t)f\big) \circ P_1.$$

Доказательство. Применим лемму 5 к пространствам $X_1 = L_2(H)$, $X_2 = L_2(H_1)$. Положим $A_1 = \triangle$, $A_2 = \triangle_1$ и $\big(Qf\big)(x) = f(P_1x)$ для $f \in L_2(H_1)$. Тогда $\|Qf\|^2 = \int_H f^2(P_1x)d\mu = \mu_2(H_2)\int_{H_1} f^2 d\mu_1 = \mu_2(H_2)\|f\|^2$. Теперь из леммы 4 следует выполнение всех условий леммы 5.

Следствие доказано.

Лемма 6. *Пусть μ — конечная неотрицательная мера в H, для которой существует такое линейное многообразие $\mathcal{L}$ в H, что для каждого $h \in \mathcal{L}$ мера μ_h эквивалентна мере μ (квазиинвариантность меры μ вдоль вектора h), причем $\gamma_h = \dfrac{d\mu_h}{d\mu} \in L_2(H, \mu)$ и $\sup\big\{\|\gamma_{th}\|_{L_2(H)} \,\big|\, 0 \leq t \leq 1\big\} < \infty$. Пусть $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$, $\overline{\mathbf{grad}}\, u = 0 \,(\mathrm{mod}\, \mu)$. Тогда для каждого $h \in \mathcal{L}$ равество $u(x+h) = u(x)$ выполнено для μ-почти всех $x \in H$.*

Доказательство. Пусть $u_m \in C_b^1(H)$, $u_m \to u$ в $L_2(H)$, $\mathbf{grad}\, u_m \to 0$ в $L_2(H;\, H)$. Тогда для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ и $h \in H$ имеют место равенства

$$\int\limits_A u_m(x+h)\, d\mu - \int\limits_A u_m(x)\, d\mu = \int\limits_0^1 dt \int\limits_A \big(\mathbf{grad}\, u_m(x+th),\, h\big)\, d\mu. \tag{10}$$

При этом $\lim_{m\to\infty} \int_A u_m d\mu = \int_A u d\mu$, а для $h \in \mathcal{L}$ получим также

$$\int\limits_A u_m(x+h)\, d\mu = \int\limits_{A+h} u_m\, d\mu_{-h} = \int\limits_{A+h} u_m \cdot \gamma_{-h}\, d\mu \underset{m\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{A+h} u \cdot \gamma_{-h}\, d\mu = \int\limits_A u(x+h)\, d\mu.$$

Для каждого фиксированного $t \in [0;1]$ и фиксированного $h \in \mathcal{L}$ при $m \to \infty$ имеет место сходимость

$$\int\limits_A \big(\mathbf{grad}\, u_m(x+t\,h),\, h\big)\, d\mu = \int\limits_{A+t\,h} \big(\mathbf{grad}\, u_m(x),\, h\big) \cdot \gamma_{-t\,h}\, d\mu \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int\limits_{A+t\,h} \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\, h\big) \cdot \gamma_{-t\,h}\, d\mu = \int\limits_A \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u(x+t\,h),\, h\big)\, d\mu.$$

При этом последовательность функций $g_m(t) = \int_A \big(\mathbf{grad}\, u_m(x+t\,h),\, h\big)\mu(dx)$ в силу условий леммы по модулю равномерно ограничена на $[0;\, 1]$ интегрируемой на $[0;\, 1]$ функцией:

$$\left|\int\limits_A \big(\mathbf{grad}\, u_m(x+t\,h),\, h\big)\, d\mu\right| \le \int\limits_H \big\|\mathbf{grad}\, u_m(x+t\,h)\big\|\, d\mu \cdot \|h\| =$$

$$= \|h\| \cdot \int\limits_H \big\|\mathbf{grad}\, u_m\big\| \cdot \gamma_{-t\,h}\, d\mu \le \|h\| \cdot \big|\!\big|\!\big|\mathbf{grad}\, u_m\big|\!\big|\!\big| \cdot \|\gamma_{-t\,h}\|_{L_2(H)}.$$

Поэтому предельным переходом из (10) для $h \in \mathcal{L}$ получим

$$\int\limits_A u(x+h)\, d\mu - \int\limits_A u(x)\, d\mu = \int\limits_0^1 dt \int\limits_A \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u(x+t\,h),\, h\big)\, d\mu. \tag{11}$$

Поскольку $\overline{\mathbf{grad}}\, u = 0 \,(\mathrm{mod}\ \mu)$, из условия квазиинвариантности меры μ вдоль вектора $h \in \mathcal{L}$ следует, что для $h \in \mathcal{L}$ и $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\big(\overline{\mathbf{grad}}\, u(\cdot + t\,h),\, h\big) = 0\,(\mathrm{mod}\ \mu)$, поэтому из (11) следует равенство

$$\varphi_h(A) = \int\limits_A u(x+h)\, d\mu = \int\limits_A u\, d\mu = \varphi_0(A).$$

Последнее равенство справедливо для всех $A \in \mathfrak{B}(H)$, поэтому для каждого $h \in \mathcal{L}$ равенство $u(x) = u(x+h)$ выполнено для почти всех $x \in H$.

Лемма доказана.

***Замечание* 1.** В случае, когда $\mathcal{L}$ плотно в H, исходное условие, наложенное на меру μ в сепарабельном гильбертовом пространстве H: „$\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого множества U в H", является следствием квазиинвариантности меры μ, заложенной в условии леммы 6. В частности, эти условия выполнены для гауссовой меры в H, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

***Следствие* 6.** *Если в условиях леммы* 6 *пространство* H *конечномерно и* $\mathcal{L} = H$, *то* $u(x) = \mathrm{const}\,(\mathrm{mod}\,\mu)$.

Доказательство. Из теорем Фубини и Тонелли следует равенство

$$\int\limits_H \mu(dx) \int\limits_H \big|u(x+h) - u(x)\big|\,\mu(dh) = \int\limits_H \mu(dh) \int\limits_H \big|u(x+h) - u(x)\big|\,\mu(dx) = 0,$$

поэтому для почти всех x равенство $u(x+h) = u(x)$ выполнено для почти всех h.

Зафиксируем $x_0 \in H$, для которого $u(x_0 + h) = u(x_0)$ для почти всех h. В силу квазиинвариантности меры μ множеством полной меры будет также множество $\big\{h \,\big|\, u(h) = u(x_0)\big\}$, что и доказывает следствие.

Теорема. *Пусть* μ — *гауссова мера на сепарабельном гильбертовом пространстве* H, *корреляционный оператор которой — положительный ядерный оператор* A *с плотным в* H *образом. Пусть* $\triangle$ — *построенный выше оператор Лапласа по мере* μ, $T(t)$ — *однопараметрическая полугруппа в* $L_2(H) = L_2(H,\,\mu)$ *с генератором* $\triangle$. *Тогда для каждой функции* $u \in L_2(H)$ *имеет место равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)u = \int\limits_H u\,d\mu \quad (\mathrm{mod}\,\mu). \tag{12}$$

Доказательство. В силу замечания 1 соответствующий оператор $\mathbf{grad}$ корректно определен. Из формулы (12) [6, с. 115] следует выполнение условий леммы 1, поэтому оператор $\overline{\mathbf{grad}}$ и лапласиан $\triangle$ также определены.

Отрицательно определенный самосопряженный оператор $\triangle$ порождает в $L_2(H)$ аналитическую полугруппу сжатий $T(t)$ [7, с. 105], поэтому для каждой функции $u \in L_2(H)$ при $t > 0$ имеет место включение $T(t)u \in D(\triangle)$ и при этом $C := \sup_{t>0} \big\|t\,\triangle T(t)\big\| < \infty$ [7, с. 101].

Для генератора полугруппы сжатий $T(t)$ на рефлексивном пространстве $L_2(H)$ имеет место разложение в прямую (ортогональную в силу самосопряженности оператора $\triangle$) сумму: $L_2(H) = \overline{\mathrm{Im}\,\triangle} \oplus \mathrm{Ker}\,\triangle$. Пусть Q — ортопроектор в $L_2(H)$ на $\mathrm{Ker}\,\triangle$. Тогда для $u \in L_2(H)$ имеем разложение $u = (I - Q)u + Qu$, $T(t)\big(Qu\big) = Qu$ для всех $t \geq 0$. Пусть $u \in \mathrm{Im}\,\triangle$. Тогда $u = \triangle v$, $v \in D(\triangle)$, $T(t)u = \triangle T(t)v$, $\big\|\triangle T(t)v\big\| \leq \dfrac{C}{t}\,\|v\| \to 0$, $t \to +\infty$. Предельным переходом равенство $\lim_{t\to+\infty} T(t)u = 0$ доказывается для всех $u \in \overline{\mathrm{Im}\,\triangle}$. Тем самым доказано, что для всех $u \in L_2(H)$ существует $\lim_{t\to+\infty} T(t)u = Qu$.

Функции из $\mathrm{Im}\,Q$ — это в точности $\triangle$-гармонические функции на H. Если $\triangle u = 0$, то $u \in D(\,\overline{\mathbf{grad}}\,)$ и существует последовательность функций $u_n \in C_b^1(H)$, для которых $u_n \to u$ в $L_2(H)$ и $\mathbf{grad}\,u_n \to \overline{\mathbf{grad}}\,u$ в $L_2(H;\,H)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$0 = \int\limits_H \triangle u \cdot u_n \, d\mu = -\int\limits_H \left(\overline{\mathbf{grad}}\, u,\ \mathbf{grad}\, u_n \right) d\mu,$$

поэтому предельным переходом $n \to \infty$ приходим к выводу: $\big(\triangle u = 0\,\text{почти всюду}\big) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \big(\overline{\mathbf{grad}}\, u = 0\,\text{почти всюду}\big)$.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots\}$ — ортонормированный базис в H из собственных векторов корреляционного оператора A и P_n — ортопроектор в H на линейную оболочку векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Разложение $H = P_nH \oplus (I - P_n)H$ индуцирует на P_nH и $(I - P_n)H$ меры по принципу: $\mu_1(A) = \mu(A + (I - P_n)H)$, $\mu_2(B) = \mu(P_nH + B)$ $\big($здесь $A \in \mathfrak{B}(P_nH)$; $B \in \mathfrak{B}\big((I - P_n)H\big)\big)$. При этом $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Если за $\mathcal{L}$ принять линейную оболочку векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, то выполнены условия леммы 6.

Рассмотрим конечномерное подпространство P_nH, $\mathcal{L} \cap P_nH = P_nH$. Если $\triangle_1 g = 0$ (здесь $\triangle_1$ — лапласиан в P_nH по мере μ_1), то, как было доказано выше, $\overline{\mathbf{grad}}_1 g = 0$ и, в силу следствия 6, $g = \mathrm{const}$ (почти всюду) в P_nH. Следовательно, $\lim_{t\to+\infty} T_1(t)f$ — постоянная функция $(\mathrm{mod}\, \mu_1)$ для любой $f \in L_2(P_nH)$ $\big($здесь $T_1(t)$ — полугруппа в P_nH с генератором $\triangle_1\big)$. $f \mapsto \lim_{t\to+\infty} T_1(t)f$ — ортопроектор на подпространство констант, поэтому

$$\lim_{t\to+\infty} T_1(t)f = \int\limits_{P_nH} f\, d\mu_1 \quad (\mathrm{mod}\ \mu_1).$$

В силу следствия 5 для функции $u \in L_2(H)$ вида $u(x) = f(P_nx)$ имеет место равенство $\big(T(t)u\big)(x) = \big(T_1(t)f\big)(P_nx)$, поэтому для таких функций u получим

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)u = \int\limits_{P_nH} f\, d\mu_1 = \int\limits_H u\, d\mu \quad (\mathrm{mod}\, \mu).$$

Осталось заметить, что функции вида $f(P_nx)$, где $n \in \mathbb{N}$, а $f \in C_b(P_nH)$, образуют плотное множество в пространстве $L_2(H)$.

Теорема доказана.

***Следствие* 7.** *Для гауссовой меры, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный в H образ, $\triangle$-гармоническими функциями в H являются только константы* $(\mathrm{mod}\, \mu)$.

1. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
2. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 264 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
6. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
7. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations // Grad. Texts Math. – 2000. – **194**. – 586 p.

Получено 06.03.14,
после доработки — 04.06.15