УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ (ψ,β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В L_2. III

In the classes $L^{\psi}_{\beta,2}$ of 2π-periodic (ψ,β)-differentiable functions for which $f^{\psi}_{\beta}\in L_2$, we determine the exact constants in Jackson-type inequalities for the characteristic of smoothness $\Lambda_\gamma(f,t)=\left\{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\|\Delta^{\gamma}_h(f)\|^2dh\right\}^{1/2}$, $t>0$, deternined by averaging the norm of the generalized difference relation $\Delta^{\gamma}_h(f)$. For the classes of (ψ,β)-differentiable functions defined by using the characteristic of smoothness Λ_γ and the majorant Φ, satisfying numerous conditions, we find the exact values of some n-widths in L_2.

На класах $L^{\psi}_{\beta,2}$, що складаються з 2π-періодичних (ψ,β)-диференційовних функцій, для яких $f^{\psi}_{\beta}\in L_2$, знайдено точні константи в нерівностях типу Джексона для характеристики гладкості $\Lambda_\gamma(f,t)=\left\{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\|\Delta^{\gamma}_h(f)\|^2dh\right\}^{1/2}$, $t>0$, яка визначається за допомогою усереднення норми узагальненого різницевого відношення $\Delta^{\gamma}_h(f)$. Для класів (ψ,β)-диференційовних функцій, означених за допомогою характеристики гладкості Λ_γ та мажоранти Φ, яка задовольняє низку умов, обчислено точні значення деяких n-поперечників у L_2.

Данная статья является продолжением работ [1, 2], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, теорем и следствий. В каждом из пунктов, как и ранее, использована двойная нумерация формул.

8. Характеристики гладкости функций из L_2, основанные на усреднении норм обобщений конечных разностей. ***8.1.*** При решении ряда задач теории аппроксимации функций действительной переменной часто применяют различные модификации классического модуля непрерывности, поскольку во многих случаях это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить новые содержательные результаты. В подтверждение этого отметим работы Л. Лейндлера, Р. М. Тригуба, Б. Сендова и В. Попова, К. В. Руновского, Н. П. Пустовойтова, К. Ж. Иванова, В. Н. Васильева и других (см., например, [3 – 13]), в которых в качестве характеристик гладкости функций рассматривались, в частности, различные способы усреднения как конечных разностей, так и их норм.

В качестве конкретного примера рассмотрим более подробно характеристики гладкости, предложенные в [8, 9] К. Ж. Ивановым и адаптированные на случай 2π-периодических функций в работе [13]. Для этого предварительно напомним, что под $L_p:=L_p(0,2\pi)$, где $1\le p<\infty$, понимаем пространство 2π-периодических суммируемых на $(0,2\pi)$ в p-й степени функций f с нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(0,2\pi)} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ имеем пространство $L_\infty := L_\infty(0, 2\pi) = M(0, 2\pi)$ измеримых существенно ограниченных на $(0, 2\pi)$ функций f, норма в котором определяется соотношением $\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(0,2\pi)} = \|f\|_{M(0,2\pi)} = \sup\operatorname{vrai}\{|f(x)|: 0 < x < 2\pi\}$. Пусть далее λ — произвольная положительная 2π-периодическая функция, определенная на $(0, 2\pi)$, а w — непрерывная неотрицательная функция периода 2π. Согласно работам [8, 9] τ-модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_{\max(p,p')}$, где $p,\ p' \geq 1$, будем называть величину

$$\tau_k\left(f, w; \lambda\right)_{p',p} := \left\|w(\cdot)\omega_k(f, \cdot; \lambda(\cdot))_{p'}\right\|_p. \tag{8.1}$$

Здесь

$$\omega_k(f, x; \lambda(x))_{p'} := \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^k(f, x)|^{p'} dh \right\}^{1/p'},$$

а

$$\Delta_h^k(f, x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$$

— конечная разность k-го порядка функции f в точке x с шагом h. Свойства характеристики гладкости вида (8.1) в общем случае были подробно изучены в публикациях [8, 9]. Отметим, что для $\lambda(x) \equiv t = \text{const} > 0,\ f \in L_p,\ w(x) \equiv 1,\ p' \in [1, p]$ имеем

$$\tau_k(f, 1; t)_{p',p} \asymp \omega_k(f, t)_p,$$

где $\omega_k(f, t)_p := \sup\left\{\|\Delta_h^k(f)\|_p : 0 < h \leq t\right\}$ — обычный модуль непрерывности k-го порядка в пространстве L_p.

В случае $p' = p = 2,\ \lambda(x) \equiv t = \text{const} > 0,\ w(x) \equiv 1$ величина (8.1) была использована в работах автора [12, 13] для изучения поведения наилучших полиномиальных приближений в пространстве L_2 и для решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций. Отметим, что в указанном случае имеем

$$\tau_k(f, 1; t)_{2,2} = \left\{ \frac{1}{2\pi t} \int_0^{2\pi} dx \int_{-t}^{t} |\Delta_h^k(f, x)|^2 dh \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^{t} \|\Delta_h^k(f)\|^2 dh \right\}^{1/2}.$$

Таким образом, характеристика гладкости

$$\Lambda_k(f, t)_p := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^{t} \|\Delta_h^k(f)\|_p^p \, dh \right\}^{1/p}, \qquad t > 0, \quad 0 < p < \infty, \tag{8.2}$$

в случае $p := 2$ является не чем иным, как τ-модулем непрерывности k-го порядка $\tau_k(f, 1; t)_{2,2}$. Также напомним, что при $0 < p < 1$ величина (8.2) ранее рассматривалась К. В. Руновским в работе [6], а при $p = 2$ она использовалась Л. Лейндлером [3] (случаи $k = 1$ и $k = 2$) для решения ряда задач конструктивной теории функций в L_2.

8.2. Определенный интерес, с точки зрения автора, представляет своеобразное обобщение характеристики гладкости (8.2) через обобщение понятия конечной разности функции, предложенное С. Н. Васильевым в работах [10, 14]. Исходя из этого, приведем далее необходимые понятия и определения. Символом $\mathcal{M} = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначим набор комплексных чисел, удовлетворяющих условиям

$$0 < \sum_{j=-\infty}^{\infty} |z_j| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} z_j = 0.$$

Данному набору $\mathcal{M}$ и вещественному числу h сопоставим разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{M}} : L_2 \to L_2$ вида

$$\Delta_h^{\mathcal{M}}(f,x) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} z_j f(x+jh). \tag{8.3}$$

При этом отметим, что набору чисел

$$\mathcal{M}_k := \left\{ z_j = (-1)^{k-j}\binom{k}{j},\ \text{если}\ j = 0,\dots,k;\ \ z_j = 0,\ \text{если}\ j<0\ \text{или}\ j>k \right\}$$

в силу формулы (8.3) соответствует конечная разность $\Delta_h^k(f,x)$, а набору чисел

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \left\{ z_j = (-1)^{j}\binom{\alpha}{j},\ \text{если}\ j = 0,1,\dots;\ \ z_j = 0,\ \text{если}\ j=-1,-2,\dots \right\},$$

где $\alpha > 0,$ – разность $\Delta_{-h}^{\alpha}(f,x)$ дробного порядка α (см., например, пункт 7.3 из работы [2]).

Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2$ и поставим ей в соответствие разложение в ряд Фурье, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) e^{ijx}\ .$$

Тогда из формулы (8.3) получаем

$$\Delta_h^{\mathcal{M}}(f,x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m f(x+mh) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) e^{ij(x+mh)} \right) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e^{ijmh} \right) e^{ijx} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) \widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(jh) e^{ijx}, \tag{8.4}$$

где

$$\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(x) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e^{imx}\ .$$

Отметим, что $\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}$ является 2π-периодической комплекснозначной функцией, принадлежащей L_2 и такой, что $\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(0) = 0$. Из соотношения (8.4) имеем

$$\|\Delta_h^{\mathcal{M}}(f)\|^2 = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j(f)|^2\ |\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(jh)|^2. \tag{8.5}$$

Полагая

$$\gamma_{\mathcal{M}}(x) := \frac{1}{2}\left(|\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(x)|^2 + |\widehat{\mathrm{w}}_{\mathcal{M}}(-x)|^2\right)$$

и учитывая, что

$$|c_j(f)|^2 = |c_{-j}(f)|^2 = \frac{1}{4}\left(a_j^2(f) + b_j^2(f)\right) = \frac{1}{4}\rho_j^2(f), \qquad j \in \mathbb{N},$$

из (8.5) получаем

$$\|\Delta_h^{\mathcal{M}}(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)\, \gamma_{\mathcal{M}}(jh). \tag{8.6}$$

Очевидно, что $\gamma_{\mathcal{M}}$ — четная неотрицательная 2π-периодическая функция, для которой $\gamma_{\mathcal{M}}(0) = 0$.

8.3. Рассмотрим еще один вид разностных операторов $\widetilde{\Delta}_h^k \colon L_2 \to L_2$, где $h > 0,\ k \in \mathbb{N}$, которые не совсем вписываются в изложенную в п. 8.2 схему. Для этого воспользуемся функцией Стеклова $S_h,\ h > 0$, которая будет использоваться в качестве оператора обобщенного сдвига τ_h, т. е. $\tau_h(f) := S_h(f)$. Как отмечалось в п. 2 из работы [1],

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f, x) := \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} S_{h,m}(f, x),$$

где

$$S_{h,m}(f) := S_h(S_{h,m-1}(f)), \quad m \in \mathbb{N}, \qquad S_{h,0}(f) := f.$$

Учитывая, что

$$S_{h,m}(f, x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) \operatorname{sinc}^m(jh) e^{ijx},$$

для $\widetilde{\Delta}_h^k(f)$ получаем

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f, x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) \left(\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \operatorname{sinc}^m(jh)\right) e^{ijx} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f) (\operatorname{sinc}(jh) - 1)^k e^{ijx}. \tag{8.7}$$

Полагая в данном случае

$$\widehat{\mathrm{w}}_k(x) := (-1)^k (1 - \operatorname{sinc} x)^k \quad \text{и} \quad \widehat{\gamma}_k(x) := \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathrm{w}}_k^2(x) + \widehat{\mathrm{w}}_k^2(-x)\right),$$

на основании (8.7) для $f \in L_2$ имеем

$$\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f) \widehat{\gamma}_k(jh). \tag{8.8}$$

Очевидно, что $\widehat{\gamma}_k$ является неотрицательной и четной функцией, для которой $\widehat{\gamma}_k(0) = 0$.

Подытоживая изложенное выше, заметим, что всюду далее будем рассматривать лишь те обобщенные разностные операторы $\Delta_h\colon L_2 \to L_2$, $h > 0$, для которых разложение в ряд Фурье функции $\Delta_h(f,x)$, $f \in L_2$, имеет вид $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(f)\widehat{\mathrm{w}}(jh)e^{ijx}$, где $\widehat{\mathrm{w}}$ — некоторая комплекснозначная функция из L_2. При этом функция $\gamma(x) := \dfrac{1}{2}(|\widehat{\mathrm{w}}(x)|^2 + |\widehat{\mathrm{w}}(-x)|^2)$ должна принадлежать классу G, т.е. быть четной, непрерывной, ограниченной на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, неотрицательной, отличной от нуля почти всюду на $\mathbb{R}$ и такой, чтобы $\gamma(0) = 0$. Исходя из этого, вместо Δ_h будем применять обозначение Δ_h^γ, поскольку

$$\|\Delta_h^\gamma(f)\|^2 := \|\Delta_h(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^2(f)\gamma(jh). \tag{8.9}$$

Таким образом, учитывая формулу (8.2), в качестве обобщенной характеристики гладкости функции $f \in L_2$ будем использовать величину $\Lambda_\gamma(f)$, основанную на усреднении квадрата нормы (8.9) по h, т.е.

$$\Lambda_\gamma(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \|\Delta_h^\gamma(f)\|^2 dh \right\}^{1/2}, \qquad t > 0. \tag{8.10}$$

Из определения обобщенного модуля непрерывности ω_γ (см. формулу (2.6) из [1]) и соотношений (8.9), (8.10) для произвольной функции $f \in L_2$ имеем

$$\Lambda_\gamma(f,t) \le \omega_\gamma(f,t), \qquad t > 0. \tag{8.11}$$

Также отметим, что в случае $\gamma := \gamma_{1,k}(x) = 2^k(1-\cos x)^k$ из (8.10) получаем характеристику гладкости (8.2), когда $p := 2$. Если же, например, $\gamma := \gamma_{2,k}(x) = (1-\operatorname{sinc} x)^{2k}$, то на основании (8.10) получаем характеристику гладкости функции $f \in L_2$

$$\widetilde{\Lambda}_k(f,t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\|^2 dh \right\}^{1/2}, \qquad t > 0, \tag{8.12}$$

которая ранее нигде не рассматривалась.

9. Наилучшие полиномиальные приближения (ψ,β)-дифференцируемых функций в пространстве L_2. Напомним, что вся необходимая информация, касающаяся классификации 2π-периодических функций на основе преобразований их рядов Фурье с помощью мультипликаторов и сдвигов по аргументу, непосредственно связанная с введением понятия (ψ,β)-производных, ранее была рассмотрена в пп. 2.2 – 2.5 работы [1].

В п. 3.1 из [1] для функций γ из класса G также были введены дополнительные свойства A, B. Напомним их.

Пусть $\gamma(t_*) := \sup\{\gamma(x) : x \in \mathbb{R}_+\}$, где $t_* \in (0,\infty)$. Полагаем, что $\gamma \in G$ удовлетворяет свойству A, если на отрезке $[0,t_*]$ функция γ является монотонно возрастающей.

Для произвольной функции $\gamma \in G$, удовлетворяющей свойству A, полагаем

$$\gamma_*(x) := \{\gamma(x), \text{ если } 0 \le x \le t_*; \ \ \gamma(t_*), \text{ если } t_* \le x < \infty\}.$$

Пусть далее

$$\gamma(\widetilde{t_*}) := \inf\{\gamma(x)\colon t_* < x < \infty\}, \quad \text{где } \widetilde{t_*} \in (t_*, \infty).$$

Ели нижняя грань достигается в конечном или счетном множестве точек, то в качестве $\widetilde{t_*}$ рассматриваем точку с наименьшей абсциссой. Будем полагать, что функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойству B, если $\gamma(\widetilde{t_*}) > 0$.

Если функция $\gamma \in G$ удовлетворяет свойствам A и B, то символом $\bar{t}$ будем обозначать точку из интервала $(0, t_*)$, для которой $\gamma(\bar{t}) = \gamma(\widetilde{t_*})$.

Обозначим

$$\zeta_{j,\gamma,\psi}(t) := \frac{1}{\psi(j)} \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \gamma(jh)dh \right\}^{1/2}. \tag{9.1}$$

Теорема 6. *Пусть функция γ принадлежит классу G, а функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in (0, 2\pi]$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Lambda_\gamma(f^\psi_\beta, t)} = \frac{1}{\inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t)\colon n \le j < \infty\}}. \tag{9.2}$$

Доказательство. Используя формулы (8.9), (8.10), (3.8) из [1] и обозначение (9.1), для произвольной отличной от константы функции $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$ записываем

$$\Lambda_\gamma(f^\psi_\beta, t) = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \|\Delta^\gamma_h(f^\psi_\beta)\|^2 dh \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^\infty \rho_j^2(f^\psi_\beta)\gamma(jh) \right) dh \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^\infty \rho_j^2(f) \left(\frac{1}{\psi^2(j)t} \int\limits_0^t \gamma(jh)dh \right) \right\}^{1/2} \ge \left\{ \sum_{j=n}^\infty \rho_j^2(f) \zeta^2_{j,\gamma,\psi}(t) \right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge E_{n-1}(f)\ \inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t)\colon n \le j < \infty\}. \tag{9.3}$$

Из соотношения (9.3) следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Lambda_\gamma(f^\psi_\beta, t)} \le \frac{1}{\inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t)\colon n \le j < \infty\}}. \tag{9.4}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, содержащейся в левой части неравенства (9.4), рассмотрим множество функций $f_j(x) := \sin(jx)$, где $j \ge n$ и $j \in \mathbb{N}$, которые принадлежат классу $L^{\psi}_{\beta,2}$. Поскольку $E_{n-1}(f_j) = 1$, $(f_j)^\psi_\beta(x) = \sin(jx)/\psi(j)$ и в силу (9.3) и (9.1)

$$\Lambda_\gamma((f_j)^\psi_\beta, t) = \frac{1}{\psi(j)} \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \gamma(jh)dh \right\}^{1/2} = \zeta_{j,\gamma,\psi}(t),$$

то очевидно, что

$$\frac{E_{n-1}(f_j)}{\Lambda_\gamma((f_j)^\psi_\beta, t)} = \frac{1}{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t)}. \tag{9.5}$$

Тогда с учетом равенств (9.5) имеем

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Lambda_\gamma(f^{\psi}_{\beta},t)}\geq\sup_{n\leq j<\infty}\frac{E_{n-1}(f_j)}{\Lambda_\gamma((f_j)^{\psi}_{\beta},t)}=\frac{1}{\inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t)\colon n\leq j<\infty\}}. \tag{9.6}$$

Требуемое равенство (9.2) следует из соотношений (9.4) и (9.6).

Теорема 6 доказана.

Введем далее следующие обозначения:

$$\mathrm{w}_\gamma(t):=\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t\gamma(h)dh\right\}^{1/2}, \tag{9.7}$$

$$\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau):=\frac{1}{\psi(j)}\left\{\int\limits_0^\tau \mathrm{w}^p_\gamma(jt)\xi(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{9.8}$$

Теорема 7. *Пусть γ — произвольная функция из класса G, ψ — любой элемент из множества $\mathfrak{M}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $0<p\leq 2$, $\tau\in(0,2\pi]$, ξ — произвольная неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,\tau]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^\tau\Lambda^p_\gamma(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}}=\frac{1}{\inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\colon n\leq j<\infty\}}. \tag{9.9}$$

Доказательство. Используя неравенство (3.14) из [1], а именно

$$\left\{\int\limits_0^\tau\left(\sum_{j=n}^\infty|g_j(t)|^2\right)^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}\geq\left\{\sum_{j=n}^\infty\left(\int\limits_0^\tau|g_j(t)|^p\xi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2},$$

где $0<p\leq 2$, соотношение (9.3) и обозначения (9.7), (9.8), получаем

$$\left\{\int\limits_0^\tau\Lambda^p_\gamma(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}\geq\left\{\int\limits_0^\tau\left(\sum_{j=n}^\infty\frac{1}{\psi^2(j)}\rho_j^2(f)\mathrm{w}^2_\gamma(jt)\right)^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\sum_{j=n}^\infty\left(\rho_j^p(f)\frac{1}{\psi^p(j)}\int\limits_0^\tau\mathrm{w}^p_\gamma(jt)\xi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{j=n}^\infty\rho_j^2(f)\eta^2_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)\right\}^{1/2}\geq$$

$$\geq E_{n-1}(f)\ \inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau):n\leq j<\infty\}. \tag{9.10}$$

Из (9.10) следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\Lambda^p_{\gamma}(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\left\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau): n\le j<\infty\right\}}. \tag{9.11}$$

Для получения оценки снизу величины, содержащейся в левой части неравенства (9.11), рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 6, множество функций $f_j(x) = \sin(jx)$, где $j\in\mathbb{N}$ и $j\ge n$. Поскольку $E_{n-1}(f_j) = 1$ и в силу формул (9.3), (9.7), (9.8)

$$\left\{\int\limits_0^{\tau}\Lambda^p_{\gamma}((f_j)^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p} = \left\{\int\limits_0^{\tau}\frac{1}{\psi^p(j)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\gamma(jh)dh\right)^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p} = \eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau),$$

то для любого натурального числа $j\ge n$ имеем

$$\frac{E_{n-1}(f_j)}{\left\{\int_0^{\tau}\Lambda^p_{\gamma}((f_j)^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\Lambda^p_{\gamma}(f^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} \ge \sup_{n\le j<\infty}\frac{E_{n-1}(f_j)}{\left\{\int_0^{\tau}\Lambda^p_{\gamma}((f_j)^{\psi}_{\beta},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau): n\le j<\infty\}}. \tag{9.12}$$

Требуемое равенство (9.9) получаем на основании соотношений (9.11) и (9.12).

Теорема 7 доказана.

Полагая, например, в формуле (9.9) $\gamma := \gamma_{1,k}(x) = 2^k(1-\cos x)^k$, $\psi(x) := \psi_{1,r} = x^{-r}$, где $r=\beta\in\mathbb{N}$, и используя обозначение (8.2), записываем равенство

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau}\Lambda^p_{k}(f^{(r)},t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{2^{k/2}\inf\left\{\widetilde{\eta}_{j,k,r,p}(\xi,\tau): n\le j<\infty\right\}}, \tag{9.13}$$

где

$$\widetilde{\eta}_{j,k,r,p}(\xi,\tau) := \left\{j^{rp}\int\limits_0^{\tau} w^p_k(jt)\xi(t)dt\right\}^{1/p},$$

$$w_k(x) := \left\{\frac{1}{x}\int\limits_0^{x}(1-\cos h)^k dh\right\}^{1/2}.$$

Отметим, что ранее соотношение (9.13), являющееся частным случаем равенства (9.9), было получено в работе автора [12].

***Замечание* 1.** Пусть весовая функция ξ неотрицательна, суммируема на отрезке $[0, 2\pi]$ и не эквивалентна нулю. Поскольку, согласно неравенству (8.11), величина

$$\Omega_{\gamma,p}(f,\xi;\tau) := \left\{ \frac{\int_0^\tau \Lambda_\gamma^p(f,t)\xi(t)dt}{\int_0^\tau \xi(t)dt} \right\}^{1/p}, \qquad 0 < p \le 2, \tag{9.14}$$

не превышает обобщенного модуля непрерывности $\omega_\gamma(f,\tau)$ при любом $\tau \in (0, 2\pi]$, то в некоторых случаях целесообразно использовать характеристику $\Omega_{\gamma,p}(f,\xi)$ при оценке сверху наилучшего полиномиального приближения $E_{n-1}(f)$. Следует отметить, что в случае, когда $\gamma := 2^\alpha(1-\cos x)^\alpha$, где $\alpha > 0$, $\xi := \sin^q(bx/\delta)$, $0 < b \le \pi$, $0 < x \le \delta$, $0 < \delta \le \pi/n$, $0 \le q < \infty$, а вместо Λ_γ используется модуль непрерывности дробного порядка $\alpha > 0$, величина, подобная (9.14), применялась М. Г. Есмаганбетовым для решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в пространстве L_2 (см., например, [15]).

С учетом замечания 1 из (9.9) и (9.14) получаем равенство

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Omega_{\gamma,p}(f^\psi_\beta,\xi;\tau)} = \frac{\left\{\int_0^\tau \xi(t)dt\right\}^{1/p}}{\inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau) : n \le j < \infty\}}, \tag{9.15}$$

где $0 < \tau \le 2\pi$.

10. Некоторые следствия из теорем 6 и 7. Приведенные далее следствия 7, 8 вытекают из теоремы 6, а следствия 9, 10 — из теоремы 7.

***Следствие* 7.** *Пусть функция γ, принадлежащая классу G, удовлетворяет свойствам A и B, а функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < t \le \bar{t}/n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi_{\beta,2}\\ f\not\equiv\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\Lambda_\gamma(f^\psi_\beta,t)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(nt)}}, \tag{10.1}$$

где w_γ определяется формулой (9.7).

Доказательство. В п. 4.1 статьи [1] отмечалось, что для функции $\gamma \in G$, удовлетворяющей свойствам A и B, выполняется неравенство

$$x^\nu \gamma^\mu(zy) \ge \gamma^\mu(y), \tag{10.2}$$

где $0 \le y \le \bar{t}$, $x, z \ge 1$, $\nu, \mu > 0$ — произвольные числа. В данном случае полагаем $\mu := 1$, $\nu := 2$, $z := j/n$, $y := nh$, $x := \psi(n)/\psi(j)$, где $j \ge n$, j, $n \in \mathbb{N}$, $0 < h \le \bar{t}/n$.

С учетом указанной конкретизации из неравенства (10.2) получаем

$$\frac{1}{\psi^2(j)}\gamma(jh) \ge \frac{1}{\psi^2(n)}\gamma(nh). \tag{10.3}$$

Интегрируя обе части неравенства (10.3) по переменной h в пределах от 0 до t, где $0 < t \le \bar{t}/n$, а затем умножая их на величину $1/t$, на основании формулы (9.1) имеем $\zeta^2_{j,\gamma,\psi}(t) \ge \zeta^2_{n,\gamma,\psi}(t)$ для любого натурального числа $j \ge n$. Следовательно,

$$\inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t) : n \le j < \infty\} = \zeta_{n,\gamma,\psi}(t). \tag{10.4}$$

Требуемый результат (10.1) получаем из соотношений (9.1), (9.2) и (10.4).

Следствие 7 доказано.

Пусть, например, $\psi := \psi_{1,r}(x) = x^{-r}$, где $r = \beta \in \mathbb{N}$, и $\gamma := \gamma_{2,k}(x) = (1 - \operatorname{sinc} x)^{2k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Поскольку функция $\gamma_{2,k} \in G$ удовлетворяет свойствам A и B, то при $0 < t \le \bar{t}/n$ из (10.1) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\widetilde{\Lambda}_k(f^{(r)}, t)} = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \operatorname{sinc}(nh))^{2k} dh \right\}^{-1/2},$$

где характеристика гладкости $\widetilde{\Lambda}_k$ определяется формулой (8.12).

Прежде чем сформулировать следствие 8, напомним, что используемая в нем функция $a(\psi, x) := \psi(x)/(x|\psi'(x)|)$ была рассмотрена в п. 2.5 работы [1].

***Следствие* 8.** *Пусть функция γ, принадлежащая классу G, дифференцируема почти всюду на множестве $\mathbb{R}$, функция $\psi \in \mathfrak{M}$ дифференцируема на множестве $[1, \infty)$ $(\psi'(1) := := \psi'(1+0))$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < t \le 2\pi$. Если для любого $x \in [1, \infty)$ имеет место неравенство*

$$\frac{2}{a(\psi, x)} - 1 \ge 0, \tag{10.5}$$

то справедливо соотношение (10.1).

Доказательство. Использовав обозначение (9.1), рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) := \frac{1}{\psi^2(x)t} \int\limits_0^t \gamma(xh) dh,$$

где $1 \le x < \infty$. Очевидно, что $F^{1/2}(j) = \zeta_{j,\gamma,\psi}(t)$. Вычислим для функции F производную первого порядка

$$F'(x) = -2\frac{\psi'(x)}{\psi^3(x)t} \int\limits_0^t \gamma(xh) dh + \frac{1}{\psi^2(x)t} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x}(\gamma(xh)) dh. \tag{10.6}$$

Поскольку почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma(xh)) = h\gamma'(xh), \qquad \frac{\partial}{\partial h}(\gamma(xh)) = x\gamma'(xh),$$

то для почти всех отличных от нуля x и h справедливо равенство

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}(\gamma(xh)) = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial h}(\gamma(xh)). \tag{10.7}$$

Из формулы (10.6) с учетом равенства (10.7) имеем

$$F'(x) = \frac{1}{x\psi^2(x)t} \left\{ \frac{2}{a(\psi, x)} \int\limits_0^t \gamma(xh) dh + \int\limits_0^t h \frac{\partial}{\partial h}(\gamma(xh)) dh \right\}.$$

Выполняя во втором интеграле последней формулы интегрирование по частям и используя обозначение (9.7), получаем

$$F'(x) = \frac{1}{x\psi^2(x)} \left\{ \left(\frac{2}{a(\psi, x)} - 1 \right) \mathrm{w}_\gamma^2(xt) + \gamma(xt) \right\}. \tag{10.8}$$

Поскольку w_γ^2 и γ — неотрицательные на множестве $[1, \infty)$ функции и имеет место неравенство (10.5), из (10.8) вытекает соотношение $F'(x) \geq 0$, т.е. F — неубывающая функция для всех $x \in [1, \infty)$. Отсюда имеем

$$\inf\{\zeta_{j,\gamma,\psi}(t) : n \leq j < \infty\} = \zeta_{n,\gamma,\psi}(t). \tag{10.9}$$

Учитывая формулы (9.1), (9.2) и применяя равенство (10.9), получаем требуемое соотношение (10.1), где $0 < t \leq 2\pi$, что и завершает доказательство следствия 8.

Используя соотношение (4.11) из работы [1], нетрудно убедиться в том, что условие (10.5) будет иметь место для следующих функций: $\psi_{1,r}(x) = x^{-r}$, если $1/2 \leq r < \infty$; $\psi_{3,\sigma,\lambda}(x) = \exp(-\sigma x^\lambda)$, где $\sigma, \lambda \in (0, \infty)$, если $1/2 \leq \sigma\lambda$; $\psi_{4,r,\varepsilon}(x) = x^{-r} \ln^\varepsilon(x+e)$, где $0 < \varepsilon < r < \infty$, если $1/2 \leq r - \varepsilon$.

Полагая, например, в формуле (10.1) $\psi := \psi_{1,r}$, где $1/2 \leq r < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, и $\gamma := \gamma_{1,k}$, где $k \in \mathbb{N}$, при выполнении условий следствия 8 для $0 < t \leq 2\pi$ получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Lambda_k(f_\beta^{(r)}, t)} = \left\{ \frac{2^k}{nt} \int\limits_0^{nt} (1 - \cos h)^k dh \right\}^{-1/2}.$$

Полагая в данной формуле $t := \tau/n$, $r = \beta \in \mathbb{N}$ и используя обозначение

$$\mathcal{F}_k(t) := \int\limits_0^t (1 - \cos h)^k dh, \tag{10.10}$$

получаем один из результатов, приведенных в работе автора [13]:

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Lambda_k(f^{(r)}, \tau/n)} = \left\{ \frac{\tau}{2^k \mathcal{F}_k(\tau)} \right\}^{1/2}. \tag{10.11}$$

В случае $k = 1$ из (10.11) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Lambda_1(f^{(r)}, \tau/n)} = \frac{1}{\{2(1 - \operatorname{sinc} \tau)\}^{1/2}}. \tag{10.12}$$

Если же, например, воспользоваться функцией $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$, где $1/2 \leq \sigma\lambda$ и $\sigma, \lambda \in (0, \infty)$, то при $\beta \in \mathbb{R}$, по аналогии с вышеприведенным случаем, из (10.1) получаем

$$\sup_{\substack{f \in L_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}} \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{\exp(\sigma n^\lambda) E_{n-1}(f)}{\Lambda_k(f_\beta^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}, \tau/n)} = \left\{ \frac{\tau}{2^k \mathcal{F}_k(\tau)} \right\}^{1/2}. \tag{10.13}$$

Отметим, что в формулах (10.11) – (10.13) значение $\tau \in (0, 2\pi n]$.

***Следствие* 9.** *Пусть функция* $\gamma \in G$ *имеет свойства А и В, функция* ψ *принадлежит* $\mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq 2$, $0 < \tau \leq \overline{t}/n$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — *произвольная неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, \tau]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\left\{\int_0^{\tau} \Lambda^p_{\gamma}(f^{\psi}_{\beta}, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{\int_0^{\tau} \mathrm{w}^p_{\gamma}(nt)\xi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{10.14}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (10.3), в котором j, $n \in \mathbb{N}$ и $j \geq n$, а также полагаем $0 < h \leq \overline{t}/n$. Интегрируя обе части неравенства (10.3) по переменной h в пределах от 0 до t, где $0 < t \leq \overline{t}/n$, умножая их на $1/t$, а затем возводя в степень $p/2$, в силу обозначения (9.7) получаем

$$\frac{1}{\psi^p(j)}\mathrm{w}^p_{\gamma}(jt) \geq \frac{1}{\psi^p(n)}\mathrm{w}^p_{\gamma}(nt). \tag{10.15}$$

Умножая обе части неравенства (10.15) на функцию $\xi(t)$, а затем интегрируя их по переменной t в пределах от 0 до τ, где $0 < \tau \leq \overline{t}/n$, имеем

$$\frac{1}{\psi^p(j)}\int\limits_0^{\tau} \mathrm{w}^p_{\gamma}(jt)\xi(t)dt \geq \frac{1}{\psi^p(n)}\int\limits_0^{\tau} \mathrm{w}^p_{\gamma}(nt)\xi(t)dt.$$

Используя обозначение (9.8), отсюда получаем $\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau) \geq \eta_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau)$ для $j \geq n$, т. е.

$$\inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau) \colon n \leq j < \infty\} = \eta_{n,\gamma,\psi,p}(\xi,\tau), \tag{10.16}$$

где $0 < \tau \leq \overline{t}/n$. Требуемое равенство (10.14) следует из соотношений (9.9) и (10.16), что и завершает доказательство следствия 9.

Напомним, что если $\psi := \psi_{1,r}$, где $r \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$, то имеем производную $f^{\psi}_{\beta} = f^{(r)}_{\beta}$ в смысле Вейля – Надя. Полагая, например, в формуле (10.14) $k := 1$, $\gamma := \gamma_{2,1}$, $\xi(t) \equiv 1$, $p := 2$ и учитывая обозначения (8.12), (9.7) и (9.8), получаем равенство

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^{\tau} \widetilde{\Lambda}^2_1(f^{(r)}_{\beta}, t)dt\right\}^{1/2}} = \left\{\int\limits_0^{\tau} \frac{dt}{t}\int\limits_0^{t} (1 - \operatorname{sinc}(nh))^2 dh\right\}^{-1/2},$$

где $0 < \tau \leq \overline{t}/n$.

Следующее далее утверждение интересно тем, что для рассматриваемой в нем конкретной функции $\gamma \in G$ требуется лишь выполнение свойства А, однако, несмотря на это, равенство (10.14) также будет иметь место.

***Следствие* 10.** *Пусть функция* $\gamma := \gamma_{1,1}$, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq 2$, $0 < \tau \leq \overline{t}/n$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — *произвольная неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, \tau]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n)\left\{\int_0^{\tau} \Lambda^p_1(f^{\psi}_{\beta}, t)\xi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\left\{2\int_0^{\tau} (1 - \operatorname{sinc}(nt))^{p/2}\xi(t)dt\right\}^{1/p}}. \tag{10.17}$$

Доказательство. В рассматриваемом здесь случае функция $\gamma_{1,1} \in G$ удовлетворяет свойству A, но не удовлетворяет свойству B. Однако функция

$$\mathrm{w}_{\gamma_{1,1}}(x) = \left\{ \frac{1}{x} \int\limits_0^x \gamma_{1,1}(h)dh \right\}^{1/2} = \{2(1 - \operatorname{sinc} x)\}^{1/2}$$

уже является элементом класса G и для нее свойства A и B выполнены. Тогда, согласно формуле (10.2), имеет место неравенство

$$x^\nu \mathrm{w}^\mu_{\gamma_{1,1}}(zy) \geq \mathrm{w}^\mu_{\gamma_{1,1}}(y), \tag{10.18}$$

где $0 < y \leq \bar{t}$, $x, z \geq 1$, μ, ν — произвольные числа. Полагая $\mu := p$, $\nu := p$, $y := nh$, $z := j/n$, $x := \psi(n)/\psi(j)$, где $j \geq n$ и $j,\ n \in \mathbb{N}$, $0 < h \leq \bar{t}/n$, из (10.18) получаем

$$\frac{1}{\psi^p(j)} \mathrm{w}^p_{\gamma_{1,1}}(jh) \geq \frac{1}{\psi^p(n)} \mathrm{w}^p_{\gamma_{1,1}}(nh).$$

Умножая обе части последнего неравенства на функцию $\xi(h)$ и интегрируя их по переменной h в пределах от 0 до τ, где $0 < \tau \leq \bar{t}/n$, в силу (9.8) имеем $\eta^p_{j;\gamma_{1,1};\psi,p}(\xi,\tau) \geq \eta^p_{n;\gamma_{1,1};\psi,p}(\xi,\tau)$ для $j \geq n$. Следовательно,

$$\inf\{\eta_{j;\gamma_{1,1};\psi;p}(\xi,\tau) : n \leq j < \infty\} = \eta_{n;\gamma_{1,1};\psi;p}(\xi,\tau), \tag{10.19}$$

где $0 < \tau \leq \bar{t}/n$. Требуемое равенство (10.17) следует из соотношений (9.8), (9.9) и (10.19).

Следствие 10 доказано.

Если, например, в формуле (10.17) полагаем $p := 2$ и $\xi(t) \equiv 1$, то из нее непосредственно получаем

$$\sup_{\substack{f \in L^\psi_{\beta,2} \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\psi(n) n^{1/2} \left\{ \int_0^\tau \Lambda_1^2(f^\psi_\beta, t)dt \right\}^{1/2}} = \frac{1}{\{2(n\tau - \mathrm{Si}(n\tau))\}^{1/2}},$$

где $\mathrm{Si}(x) := \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(t)dt$ — интегральный синус, $0 < \tau \leq \bar{t}/n$.

***Следствие* 11.** *Пусть функция γ принадлежит классу G, функция $\psi \in \mathfrak{M}$ дифференцируема на множестве $[1,\infty)$ $(\psi'(1) := \psi'(1+0))$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \tau \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — произвольная неотрицательная и дифференцируема почти всюду на отрезке $[0,\tau]$ функция $(\xi'(0) := \xi'(0+0)$, $\xi'(\tau) := \xi(\tau - 0))$, которая не эквивалентна нулю, $\sup\{a(\psi,x)\colon 1 \leq x < \infty\} \leq 2$, где функция $a(\psi)$ определяется формулой (2.17) из [1]. Если при некотором $\widetilde{p}$, удовлетворяющем условию*

$$\sup\{a(\psi,x)\colon 1 \leq x < \infty\} \leq \widetilde{p} \leq 2,$$

для почти всех $t \in [0,\tau]$ и любых $x \in [1,\infty)$ имеет место соотношение (4.5) из [1], т. е.

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)} - 1 \right) \xi(t) - t\xi'(t) \geq 0,$$

то для данного $\widetilde{p}$ справедливо равенство (10.14).

Доказательство. Использовав соотношения (9.7), (9.8), введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\mathcal{F}_{\tau,\widetilde{p}}(x) := \frac{1}{\psi^{\widetilde{p}}(x)} \int\limits_0^\tau \mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\xi(t)dt,$$

где $1 \leq x < \infty$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{F}_{\tau,\widetilde{p}}^{1/\widetilde{p}}(j) = \eta_{j,\gamma,\psi,\widetilde{p}}(\xi,\tau), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{10.20}$$

Найдем производную первого порядка функции $\mathcal{F}_{\tau,\widetilde{p}}$:

$$\mathcal{F}'_{\tau,\widetilde{p}}(x) = -p\frac{\psi'(x)}{\psi^{\widetilde{p}+1}(x)} \int\limits_0^\tau \mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\xi(t)dt + \frac{1}{\psi^{\widetilde{p}}(x)} \int\limits_0^\tau \xi(t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right)dt. \tag{10.21}$$

Поскольку, как можно непосредственно проверить,

$$\mathrm{w}'_\gamma(t) = \frac{1}{2t}\,\frac{\gamma(t) - \mathrm{w}_\gamma^2(t)}{\mathrm{w}_\gamma(t)},$$

то путем соответствующих вычислений с учетом формул (9.7), (9.8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right) = \widetilde{p}t\left(\mathrm{w}_\gamma(xt)\right)^{\widetilde{p}-1}\mathrm{w}'_\gamma(xt) = \frac{\widetilde{p}}{2x}\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}-2}(xt)\left(\gamma(xt) - \mathrm{w}_\gamma^2(xt)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right) = \widetilde{p}\,x\left(\mathrm{w}_\gamma(xt)\right)^{\widetilde{p}-1}\mathrm{w}'_\gamma(xt) = \frac{\widetilde{p}}{2t}\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}-2}(xt)\left(\gamma(xt) - \mathrm{w}_\gamma^2(xt)\right).$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right), \tag{10.22}$$

где переменные t и x отличны от нуля. С учетом формул (2.17) из [1] и (10.22) запишем соотношение (10.21) в виде

$$\mathcal{F}'_{\tau,\widetilde{p}}(x) = \frac{1}{x\psi^{\widetilde{p}}(x)}\left\{\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}\int\limits_0^\tau \mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\xi(t)dt + \int\limits_0^\tau \xi(t)t\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)\right)dt\right\}.$$

Выполняя интегрирование по частям во втором интеграле последней формулы, получаем

$$\mathcal{F}'_{\tau,\widetilde{p}}(x) = \frac{1}{x\psi^{\widetilde{p}}(x)}\left\{\tau\xi(\tau)\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(\tau x) + \int\limits_0^\tau\left[\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)} - 1\right)\xi(t) - t\xi'(t)\right]\mathrm{w}_\gamma^{\widetilde{p}}(xt)dt\right\}. \tag{10.23}$$

Из условий, сформулированных в данном следствии, и формулы (10.23) имеем $\mathcal{F}'_{\tau,\widetilde{p}}(x) \geq 0$ для любого $1 \leq x < \infty$, т. е. $\mathcal{F}_{\tau,\widetilde{p}}$ является неубывающей функцией на множестве $[1,\infty)$. Тогда в силу (10.20) имеем

$$\inf\{\eta_{j,\gamma,\psi,\widetilde{p}}(\xi,\tau)\colon n \leq j < \infty\} = \eta_{n,\gamma,\psi,\widetilde{p}}(\xi,\tau), \tag{10.24}$$

где $0 < \tau \leq 2\pi$. Равенство (10.14) получаем на основании формул (10.24) и (9.9), где $p := \widetilde{p}$, что и завершает доказательство следствия 11.

Отметим, что в п. 4.2.1 из работы [1] для функций $\psi_{1,r}; \psi_{3,\sigma,\lambda}; \psi_{4,r,\varepsilon}$ были конкретизированы условия (4.4), (4.5), упомянутые в формулировке следствия 11 и касающиеся функции $a(\psi)$. Ими стали соотношения (4.12)–(4.14) соответственно.

Пусть, например, $\gamma := \gamma_{1,1}$, $\xi(t) := t^m$, где $m \in [0, \infty)$ — константа, $\psi := \psi_{4,r,\varepsilon}$. Тогда, как следует из п. 4.2.1 из [1], при выполнении следующих условий на величины $\widetilde{p}, m, r, \varepsilon$:

$$(1+m)/(r-\varepsilon) \leq \widetilde{p} \leq 2, \text{ где } 0 < \varepsilon < r < \infty \text{ и } (1+m)/2 \leq r - \varepsilon,$$

для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \tau \leq 2\pi$ из формулы (10.14) с учетом обозначения (8.2) имеем

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi_{4,r,\varepsilon}}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\ln^\varepsilon(n+e)\left\{\displaystyle\int_0^\tau \Lambda_1^{\widetilde{p}}(f_\beta^{\psi_{4,r,\varepsilon}}, t) t^m dt\right\}^{1/\widetilde{p}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\left\{\displaystyle\int_0^\tau (1 - \operatorname{sinc}(nt))^{\widetilde{p}/2} t^m dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}. \tag{10.25}$$

Если же $\widetilde{p} := 2$ и $m := 1$, то из равенства (10.25) получаем

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi_{4,r,\varepsilon}}_{\beta,2} \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\ln^\varepsilon(n+e)\left\{\displaystyle\int_0^\tau \Lambda_1^{2}(f_\beta^{\psi_{4,r,\varepsilon}}, t) t dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\tau(1 - \operatorname{sinc}^2(n\tau/2))^{1/2}}.$$

Можно также рассмотреть и некоторые другие примеры весовых функций ξ, воспользовавшись для этого информацией, приведенной в п. 4.2.2 из [1].

11. Вычисление точных значений n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций, определенных с помощью характеристики гладкости Λ_γ. ***11.1.*** В п. 5.1 из работы [2] в пространстве L_2 был рассмотрен ряд n-поперечников классов функций, а именно бернштейновский, колмогоровский, линейный, гельфандовский, проекционный, и приведено соотношение (5.1) между ними.

Пусть функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, функция γ является элементом класса G, $\beta \in \in \mathbb{R}$, Φ — мажоранта, т. е. непрерывная монотонно возрастающая на множестве $[0, \infty)$ функция, для которой $\Phi(0) = 0$. Символом $W^\psi_{\beta,2}(\Lambda_\gamma, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L^\psi_{\beta,2}$, для каждой из которых при любом $t > 0$ имеет место неравенство $\Lambda_\gamma(f^\psi_\beta, t) \leq \Phi(t)$.

Теорема 8. *Пусть функция γ, принадлежащая классу G, дифференцируема почти всюду на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет свойству A, функция $\psi \in \mathfrak{M}$ дифференцируема на множестве $[1, \infty)$ $(\psi'(1) = \psi'(1+0))$, $\beta \in \mathbb{R}$, для функции $a(\psi, x)$ при любом $1 \leq x < \infty$ выполняется неравенство* (10.5). *Если мажоранта Φ для произвольного $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^2(vt_*/(2n))}{\Phi^2(t_*/(2n))} \geq \frac{1}{v\displaystyle\int_0^{t_*/2}\gamma(h)dh}\begin{cases}\displaystyle\int_0^{vt_*/2}\gamma(h)dh, & \text{если } 0 < v \leq 2,\\ \displaystyle\int_0^{t_*}\gamma(h)dh + \gamma(t_*)(v/2-1)t_*, & \text{если } 2 \leq v < \infty,\end{cases} \tag{11.1}$$

то справедливы равенства

$$\lambda_{2n}(W^\psi_{\beta,2}(\Lambda_\gamma, \Phi); L_2) = \lambda_{2n-1}(W^\psi_{\beta,2}(\Lambda_\gamma, \Phi); L_2) =$$

$$= E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)) = \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(t_*/2)}}\Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right). \tag{11.2}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ *— любой из указанных выше* n*-поперечников,* $E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)) := \inf\{E_{n-1}(f)\colon f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)\}$, *величина* w_γ *определяется формулой* (9.7).

Доказательство. Из формулировки данной теоремы следует, что выполнены все условия следствия 8. Исходя из этого в силу формулы (10.1) имеем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(nt)}}\Lambda_\gamma(f^{\psi}_{\beta}, t),$$

где $0 < t \le 2\pi$ и $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$. Используя определение класса $W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)$, отсюда получаем

$$E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)) \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(nt)}}\Phi(t).$$

Полагая в данном неравенстве $t := t_*/(2n)$, записываем оценки сверху рассматриваемых n-поперечников

$$\lambda_{2n}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi); L_2) \le \lambda_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi); L_2) \le d_{2n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi); L_2) \le$$

$$\le E_{n-1}(W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma,\Phi)) \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(t_*/2)}}\Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right). \tag{11.3}$$

Для получения оценок снизу n-поперечников рассмотрим шар

$$\overline{\mathbb{B}}_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathfrak{N}^T_{2n+1}\colon \|T_n\| \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(t_*/2)}}\Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right)\right\}.$$

Используя соотношения (8.9), (8.10), (9.7) и формулу (3.8) из работы [1], для характеристики гладкости Λ_γ и произвольного полинома $T_n \in \mathfrak{N}^T_{2n+1}$ записываем

$$\Lambda_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}, t) = \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta^{\gamma}_h((T_n)^{\psi}_{\beta})\right\|^2 dh\right\}^{1/2} \le \left\{\sum_{j=1}^{n}\rho^2_j((T_n)^{\psi}_{\beta})\mathrm{w}^2_\gamma(jh)\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(n)}\|T_n\|\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \gamma_*(nh)dh\right\}^{1/2}. \tag{11.4}$$

Для любого полинома $T_n \in \overline{\mathbb{B}}_{2n+1}$ в силу соотношения (11.4) получаем

$$\Lambda_\gamma((T_n)^{\psi}_{\beta}, t) \le \left\{\frac{t_*\displaystyle\int_0^{nt}\gamma_*(h)dh}{2nt\displaystyle\int_0^{t_*/2}\gamma(h)dh}\right\}^{1/2}\Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right), \tag{11.5}$$

где $0 < t \le 2\pi$.

Пусть сначала $0 < t \leq t_*/n$ и $v := 2nt/t_*$, т. е. данная переменная изменяется в пределах $0 < v \leq 2$. Учитывая это и используя первое неравенство из условия (11.1), имеем

$$\Lambda_\gamma((T_n)_\beta^\psi, t) \leq \left\{ \frac{1}{v\int_0^{t_*/2}\gamma(h)dh} \int\limits_0^{vt_*/2} \gamma(h)dh \right\}^{1/2} \Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right) \leq \Phi\left(\frac{vt_*}{2n}\right) = \Phi(t). \tag{11.6}$$

Пусть теперь $t_*/n \leq t$. В данном случае $2 \leq v < \infty$. С учетом вышеуказанной замены и второго неравенства из условия (11.1) получаем

$$\Lambda_\gamma((T_n)_\beta^\psi, t) \leq \left\{ \frac{1}{v\int_0^{t_*/2}\gamma(h)dh} \left(\int\limits_0^{t_*} \gamma(h)dh + \gamma(t_*)(v/2-1)t_* \right) \right\}^{1/2} \Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right) \leq$$

$$\leq \Phi\left(\frac{vt_*}{2n}\right) = \Phi(t). \tag{11.7}$$

Из соотношений (11.6), (11.7) следует, что для любого полинома $T_n \in \overline{\mathbb{B}}_{2n+1}$ выполняется неравенство $\Lambda_\gamma((T_n)_\beta^\psi, t) \leq \Phi(t)$, где $t > 0$, т. е. имеет место включение $\overline{\mathbb{B}}_{2n+1} \subset$ $\subset W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_\gamma, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, записываем оценки снизу

$$\lambda_{2n}(W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_\gamma, \Phi); L_2) \geq b_{2n}(W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_\gamma, \Phi); L_2) \geq b_{2n}(\overline{\mathbb{B}}_{2n+1}, L_2) \geq$$

$$\geq \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(t_*/2)}}\Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right). \tag{11.8}$$

Требуемые равенства (11.2) получаем из соотношений (11.3) и (11.8).

Теорема 8 доказана.

По мнению автора, определенный интерес представляет конкретизация данной теоремы, которую мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 8а. *Пусть $\gamma := \gamma_{1,k}$, где $k \in \mathbb{N}$, и выполнены остальные требования теоремы* 8. *Если мажоранта Φ для произвольного $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^2(v\pi/(2n))}{\Phi^2(\pi/(2n))} \geq \begin{cases} \mathcal{T}_k(v\pi/2), & \text{если } 0 < v \leq 2, \\ \mathcal{T}_k(\pi) + \pi 2^{k-1}(v-2), & \text{если } 2 \leq v < \infty, \end{cases} \tag{11.9}$$

то имеют место равенства

$$\lambda_{2n}(W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_k, \Phi); L_2) = \lambda_{2n-1}(W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_k, \Phi); L_2) =$$

$$= E_{n-1}(W_{\beta,2}^\psi(\Lambda_k, \Phi)) = \left\{\frac{\pi}{2^{k+1}\mathcal{T}_k(\pi/2)}\right\}^{1/2} \psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — любой из перечисленных ранее n-поперечников, а функция $\mathcal{T}_k$ определяется формулой (10.10). *При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию* (11.9), *не пусто.*

Как следует из работы автора [13], одним из примеров мажоранты, для которой соотношение (11.9) выполняется, является функция $\overline{\Phi}(t) := t^{\nu/2}$, где $\nu := \pi/(2\mathcal{T}_k(\pi/2)) - 1$.

Отметим, что в частном случае, когда $\psi := \psi_{1,r}$ и $r = \beta \in \mathbb{N}$, результаты теоремы 8а были получены в [13].

***Следствие* 12.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 8. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\{|a_n(f)| \colon f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma, \Phi)\} = \sup\{|b_n(f)| \colon f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_\gamma, \Phi)\} =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\sqrt{\mathrm{w}_\gamma(t_*/2)}} \Phi\left(\frac{t_*}{2n}\right).$$

В частности, при $\gamma := \gamma_{1,k}$, *где* $k \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup\{|a_n(f)| \colon f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_k, \Phi)\} = \sup\{|b_n(f)| \colon f \in W^{\psi}_{\beta,2}(\Lambda_k, \Phi)\} =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2^{k+1}\mathcal{T}_k(\pi/2)}\right\}^{1/2} \psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

11.2. Пусть функция ψ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, а γ является элементом класса G, $0 < p \leq 2$, ξ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, которая не эквивалентна нулю, $\beta \in \mathbb{R}$. Символом $\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H)$, где $0 < H \leq 2\pi$, обозначим множество функций $f \in L_2$, для каждой из которых имеет место неравенство $\Omega^p_{\gamma,p}(f, \xi; H) \leq 1$. Здесь величина $\Omega_{\gamma,p}(f, \xi; H)$ определяется формулой (9.14). Через $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H)$ обозначим класс функций $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$, у которых (ψ, β)-производные f^{ψ}_{β} принадлежат множеству $\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H)$.

Теорема 9. *Пусть функция* $\gamma \in G$ *имеет свойства А и В*, $\psi \in \mathfrak{M}$ *и* $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq 2$, $0 < H \leq \bar{t}/n$, $n \in \mathbb{N}$, ξ — *произвольная неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, H]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H); L_2) = \lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H); L_2) =$$

$$= E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H)) = \psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^H \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/p}, \qquad (11.10)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из рассматриваемых* n*-поперечников, а функция* w_γ *определяется формулой* (9.7).

Доказательство. Из соотношений (9.15) и (10.14) при $\tau := H$ для произвольной функции $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$ имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^H \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/p} \Omega_{\gamma,p}(f^{\psi}_{\beta}, \xi; H).$$

Используя определение класса $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma, \xi; H)$ и данное неравенство, получаем оценки поперечников сверху

$$\lambda_{2n}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H);L_2)\le\lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H);L_2)\le d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H);L_2)\le$$

$$\le E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H))\le\psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^H\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (11.11)$$

Для получения оценок снизу n-поперечников рассмотрим шар

$$\mathfrak{B}_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathfrak{N}^T_{2n+1}:\|T_n\|\le\psi(n)\left(\frac{\displaystyle\int_0^H\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\right)^{1/p}\right\}.$$

В силу соотношения (11.4) для произвольного полинома $T_n\in\mathfrak{B}_{2n+1}$ при $0<t\le\bar{t}/n$ получаем

$$\Lambda^p_\gamma((T_n)^\psi_\beta,t)\le\frac{1}{\psi^p(n)}\|T_n\|^p\ \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\le\frac{\displaystyle\int_0^H\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\ \mathrm{w}^p_\gamma(nt). \qquad (11.12)$$

Умножая левую и правую части соотношения (11.12) на функцию $\xi(t)$ и интегрируя их по переменной t в пределах от 0 до H, с учетом обозначения (9.14) записываем $\Omega^p_{\gamma,p}((T_n)^\psi_\beta,\xi;H)\le 1$. Следовательно, справедливо включение $\mathfrak{B}_{2n+1}\subset L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H)$.

Используя определение бернштейновского поперечника и соотношение (5.1) из [2], имеем

$$\lambda_{2n}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H);L_2)\ge b_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H);L_2)\ge b_{2n}(\mathfrak{B}_{2n+1},L_2)\ge$$

$$\ge\psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^H\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^H \mathrm{w}^p_\gamma(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (11.13)$$

Требуемые равенства (11.10) получаем из соотношений (11.11) и (11.13).

Теорема 9 доказана.

Следующая далее теорема 9а также связана с вычислением точных значений ряда n-поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_p(\Lambda_\gamma,\xi;H)$ в L_2, однако, уже при иных ограничениях на γ,ψ и на другие функции и величины, содержащиеся в ее формулировке. Например, от функции $\gamma\in G$ уже не требуется выполнение свойства В, а величина H удовлетворяет неравенству $0<H\le 2\pi$. Поскольку доказательство теоремы 9а основано на рассуждениях, аналогичных таковым при получении теоремы 9, и, в частности, базируется на использовании следствия 11, мы его не приводим.

Теорема 9а. *Пусть функция* $\gamma\in G$ *удовлетворяет свойству А, функция* $\psi\in\mathfrak{M}$ *дифференцируема на множестве* $[1,\infty)$ $(\psi'(1):=\psi'(1+0))$, $\beta\in\mathbb{R}$, $0<H\le 2\pi$, $n\in\mathbb{N}$, ξ *— неотрицательная и дифференцируемая почти всюду на отрезке* $[0,H]$ *функция* $(\xi'(0):=\xi'(0+0)$, $\xi'(H):=\xi'(H-0))$, *которая не эквивалентна нулю,* $\sup\{a(\psi,x)\colon 1\le x<\infty\}\le 2$. *Если при* *некотором* $\widetilde{p}$, *удовлетворяющем условию* $\sup\{a(\psi,x)\colon 1\le x<\infty\}\le\widetilde{p}\le 2$, *для почти всех* $t\in[0,H]$ *и любых* $x\in[1,\infty)$ *выполнено неравенство*

$$\left(\frac{\widetilde{p}}{a(\psi,x)}-1\right)\xi(t)-t\xi'(t)\ge 0,$$

то имеет место соотношение (11.10)*, в котором* $p:=\widetilde{p}$.

Пусть, например, $\psi:=\psi_{1,r}$, где $r\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, $\beta\in\mathbb{R}$, и $\gamma:=\gamma_{1,k}$, где $k\in\mathbb{N}$. Если согласно п. 4.2.1 из [1] при некотором $\widetilde{p}\in[1/r,2]$, где $1/2\le r<\infty$, для почти всех $t\in[0,H]$ выполняется неравенство

$$(\widetilde{p}r-1)\xi(t)-t\xi'(t)\ge 0, \tag{11.14}$$

то будет справедливо соотношение (11.10).

В частности, если $r=\beta\in\mathbb{N}$, $\xi(t)\equiv 1$ и $\widetilde{p}:=2$, то неравенство (11.14) выполняется автоматически и из (11.10) получаем соотношение, совпадающее с точностью до постоянного множителя $H^{1/2}$ с результатом теоремы 4 из работы [13]. Так, полагая $HW_2^r(\Lambda_k):=L_2^r\mathfrak{N}_2(\Lambda_k,1;H)$, где $0<H\le 2\pi$, на основании указанного имеем

$$\lambda_{2n}(HW_2^r(\Lambda_k),L_2)=\lambda_{2n-1}(HW_2^r(\Lambda_k),L_2)=$$

$$=E_{n-1}(HW_2^r(\Lambda_k))=n^{-r+1/2}\left\{\frac{H}{2^k\displaystyle\int_0^H t^{-1}\mathcal{T}_k(nt)dt}\right\}^{1/2}.$$

В заключение заметим, что изложенный в данной части статьи подход к построению характеристик гладкости вида (8.10) является достаточно общим, поскольку позволяет учитывать различные модификации функции $\gamma\in G$, участвующей в формировании Λ_γ. Действительно, используя, например, формулу (7.7) из [2] и полагая $\gamma:=\widetilde{\gamma}_\eta$, можем сразу же записать для указанного случая некоторые из приведенных ранее в пп. 9 – 11 общих результатов, касающихся теории аппроксимации функций в пространстве L_2. Это же можно сделать и для характеристики гладкости Λ_γ, полученной на основе разностей дробного порядка $\alpha>0$, рассмотренных в п. 7.3 работы [2].

Литература

1. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 723 – 745.
2. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. II // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 8. – С. 1021 – 1036.
3. *Leindler L.* Über Strukturbedingungen fur Fourierreihen // Math. Z. – 1965. – **88**. – S. 418 – 431.
4. *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378 – 1409.
5. *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988. – 328 с.
6. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных положительных операторов в пространстве L_p, $0<p<1$ // Мат. сб. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.

7. *Пустовойтов Н. П.* Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Мат. сб. – 1997. – **188**, № 10. – С. 95 – 108.
8. *Ivanov K. G.* On a new characteristic of functions. I. // Сердика Бълг. мат. списание. – 1982. – **8**, № 3. – P. 262 – 279.
9. *Ivanov K. G.* On a new characteristic of functions. II. Direct and converse theorems for the best algebraic approximation in $C[-1,1]$ and $L_p[-1,1]$ // Плиска Бълг. мат. студ. – 1983. – **5**. – P. 151 – 163.
10. *Васильев С. Н.* Поперечники некоторых классов функций в пространстве L_2 на периоде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – **19**, № 4. – С. 42 – 47.
11. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Некоторые вопросы теории аппроксимации классов 2π-периодических функций в пространствах L_p, $1 \leq p \leq \infty$ // Зб. праць Ін-ту математики НАН України „Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання”. – 2004. – **1**, № 1. – С. 25 – 41.
12. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении 2π-периодических функций в пространстве L_2 // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. мат. – 2015. – **20**, вип. 17. – С. 20 – 25.
13. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 3. – С. 334 – 345.
14. *Васильев С. Н.* Точное неравенство Джексона – Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. – 2002. – **385**, № 1. – С. 11 – 14.
15. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.

Получено 05.10.15