УДК 517.98 + 517.954

**Ю. В. Богданский, А. Ю. Потапенко**
(Ин-т прикл. системю анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

# ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. II

We propose the $L^2$-version of Laplacian with respect to measure on an (infinite-dimensional) Riemannian manifold. The Dirichlet problem for equations with proposed Laplacian is solved in a part of the Rimannian manifold of a certain class.

Запропоновано $L^2$-версію лапласіана за мірою на (нескінченновимірному) рімановому многовиді. Розв’язується задача Діріхле для рівнянь з уведеним лапласіаном в області ріманового многовиду певного класу.

Данная работа является продолжением работы [1].

Кратко напомним основные понятия. $\mathcal{M}$ — сепарабельное риманово многообразие класса $C^2$, модельное пространство которого представляет собой (сепарабельное) гильбертово пространство $H$ $(\dim H \leq \infty)$. $\mathcal{M}$ предполагается полным относительно внутренней метрики. На $\mathcal{M}$ задана конечная неотрицательная борелевская мера $\sigma$, носитель которой предполагается полным.

На $\mathcal{M}$ корректно вводятся следующие пространства: $C_b(\mathcal{M})$ (соответственно $C_{b;v}(\mathcal{M})$) — всех ограниченных непрерывных функций (соответственно векторных полей), $C_b^1(\mathcal{M})$ (соответственно $C_{b;v}^1(\mathcal{M})$) — всех ограниченных, непрерывно дифференцируемых функций (соответственно векторных полей) с ограниченной производной. Если $G$ — область в $\mathcal{M}$, то через $C^1(G)$ обозначаем семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на все $\mathcal{M}$ до функций класса $C_b^1(\mathcal{M})$. Аналогично введены $C(G)$; $C_v^1(G)$. Корректно введены и пространства $L_v^2(\mathcal{M}) = \mathcal{L}^{\in}_{\sqsubseteq}(\mathcal{M},\sigma)$ и $L_v^2(G)$ квадратно интегрируемых векторных полей на $\mathcal{M}$ и в $G$. Аналогично — $L_v^p(\mathcal{M})$; $L_v^p(G)$.

Пусть $G$ — ограниченная область в $\mathcal{M}$, граница которой $S = \partial G$ — гладкое вложенное в $\mathcal{M}$ подмногообразие коразмерности $1$ — согласована с мерой $\sigma$, т. е. мера $\sigma$ дифференцируема (по Фомину) вдоль поля $\mathbf{n} \in C_{b;v}^1(\mathcal{M})$ ($\mathbf{n}$ — продолжение поля единичной нормали к $S$). В этом случае корректно определена ассоциированная с $\sigma$ поверхностная мера $\tau$ [2–4].

Оператор $\mathbf{grad}_G : L^2(G) \supset C^1(G) \ni u\,\mathbf{grad}\,u \in L_v^2(G)$ плотно определен. В случае, когда $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$ и оператор $\mathbf{grad}_G$ допускает замыкание, корректно определен (ограниченный) оператор следа $\gamma\colon \mathcal{D}\left(\overline{\mathbf{grad}}\right) \to L^2(S) = L^2(S,\tau)$, совпадающий на $C^1(G)$ с оператором ограничения: $u \mapsto u\big|_S$ [2, 4].

Операторы $\operatorname{div}_G : L_v^2(G) \to L^2(G)$ и $\Delta_G\colon L^2(G) \to L^2(G)$ определены формулами

$$\operatorname{div}_G = -\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\,\Big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*, \qquad \Delta_G = \operatorname{div}_G \circ \overline{\mathbf{grad}}_G\,.$$

**2. Задача Дирихле.** Рассмотрим пример задачи Дирихле для уравнения с лапласианом по мере в ограниченной области на римановом многообразии. Подобная задача в классическом конечномерном случае приведена, например, в [5], а в случае гильбертова пространства исследуется в работе [6].

Далее предполагаем выполнение следующих условий:

а) векторное поле $\mathbf{n}$ является полным и мера $\sigma$ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$ (согласование $S$ и $\sigma$);

б) $\operatorname{div}_\sigma \mathbf{n} \in L^\infty(\mathcal{M})$;

в) оператор $\mathbf{grad}_G$ замыкаем.

Выполнение этих условий позволяет корректно ввести операторы $\overline{\mathbf{grad}}_G$; $\Delta_G$, а также оператор следа $\gamma\colon L^2(G) \to L^2(S)$ с областью определения $\mathcal{D}\big(\overline{\mathbf{grad}}_G\big)$.

Пусть $a(\cdot) \in C(G)$, $a(x) \geq \alpha > 0\ \ \forall x \in \overline{G}$, $f \in L^2(G)$, $\varphi \in \gamma(\mathcal{D}(\Delta_G))$. Рассмотрим задачу поиска функции $u \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, удовлетворяющую в $G$ уравнению

$$\Delta_G u - a \cdot u = f \tag{1}$$

и краевому условию

$$\gamma(u) = \varphi. \tag{2}$$

Поставленная задача решается по классической схеме.

Сначала рассмотрим случай $\varphi = 0$. Поскольку $C_0^1(G)$ плотно в $L^2(G)$ и $\operatorname{Ker}\gamma \supset C_0^1(G)$, функция $u$ является решением задачи (1), (2) с $\varphi = 0$ в том и только в том случае, когда $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и для всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_G v(\Delta_G u - a \cdot u)\, d\sigma = \int\limits_G vf\, d\sigma$$

или, что эквивалентно, уравнению

$$\int\limits_G \big(\big(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u, \overline{\mathbf{grad}}_G\, v\big) + auv\big)\, d\sigma = -\int\limits_G vf\, d\sigma. \tag{3}$$

Левая часть уравнения (3) представляет собой скалярное произведение $(u,v)_1$ в $\mathcal{D}\big(\overline{\mathbf{grad}}_G\big)$, и соответствующая норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме графика. При этом существует такое число $C > 0$, что при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ выполняются неравенства

$$\left|\int\limits_G vf\, d\sigma\right| \leq \|f_{L^2(G)}\|\|v\|_{L^2(G)} \leq \|f\|_{L^2(G)} C\|v\|_1.$$

В гильбертовом пространстве $\big(\operatorname{Ker}\gamma, (\cdot,\cdot)_1\big)$ применяем теорему Рисса, в силу которой существует, и притом единственная, функция $u \in \operatorname{Ker}\gamma$, при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяющая уравнению (3).

Если теперь $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ удовлетворяет уравнению (3) при всех $v \in \operatorname{Ker}\gamma$, то, записывая уравнение (3) в виде

$$\int\limits_G \left(\left(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u, \overline{\mathbf{grad}}_G\, v\right)\right) d\sigma = -\int\limits_G v(f + a \cdot u)\, d\sigma,$$

приходим к выводу, что $\overline{\mathbf{grad}}_G\, u \in \mathcal{D}(\mathrm{div}_G)$, и при этом $\Delta_G u = \mathrm{div}_G \left(\overline{\mathbf{grad}}_G\, u\right) = f + au$.

Тем самым для граничного условия $\gamma(u) = 0$ доказано существование и единственность решения краевой задачи (1), (2).

Если $\varphi \in \gamma\left(\mathcal{D}(\Delta_G)\right)$, то существует функция $w \in \mathcal{D}(\Delta_G)$, для которой $\varphi = \gamma(w)$. В этом случае функция $u_1 = u - w$ должна удовлетворять задаче

$$\Delta_G u_1 - a \cdot u_1 = f - \Delta_G w + a \cdot w \in L^2(G),$$

$$\gamma(u_1) = 0,$$

существование и единственность решения которой обосновано выше.

Тем самым доказано следующее предложение.

**Теорема 2.** *При выполнении технических условий* а) – в) *задача* (1), (2) *в области риманова многообразия имеет*, *и притом единственное*, *решение.*

**3. Выполнение технических условий п. 1.** В работе [1] в качестве нетривиального модельного примера риманова многообразия $\mathcal{M}$ была рассмотрена граница области $D$ гильбертова пространства $H$. Соответствующая борелевская мера $\sigma$ на $\mathcal{M}$ имела полный носитель, при этом $\mathcal{M}$ является полным метрическим пространством относительно внутренней метрики. Поэтому любое векторное поле на $\mathcal{M}$ класса $C^1_{b;v}(\mathcal{M})$ является полным. Кроме того, оператор $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}}$ : $L^2(\mathcal{M}, \sigma) \to \mathcal{L}^{\in}_{\sqsubseteq}(\mathcal{M}, \sigma)$ замыкаем.

С другой стороны, если $G$ — ограниченная область в $\mathcal{M}$ и соответствующее векторное поле $\mathbf{n}$ не согласовано с $S = \partial G$, то к мере $\sigma$ применима процедура сглаживания меры вдоль поля $\mathbf{n}$ (см. [6]). При этом строится мера $\sigma_\varphi$ на $(\mathcal{M}, \mathfrak{B}(\mathcal{M}))$ по правилу

$$\sigma_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\sigma\left(\Phi_t^{\mathbf{n}} A\right) dt,$$

где $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{M}),\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt < \infty.$

Полученная мера $\sigma_\varphi$ согласована с $S$. Если при этом существует константа $C > 0$, для которой при всех $s$ имеет место неравенство $|\varphi'(s)| \leq C\varphi(s)$ $\left(\text{например, } \varphi(s) = \dfrac{1}{1+s^2}\right)$, то $\mathrm{div}_{\sigma_\varphi} \in L^\infty(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$.

Переход к мере $\sigma_\varphi$ сохраняет также свойства полноты носителя меры и замыкаемости оператора $\mathbf{grad}_{\mathcal{M}} \colon L^2(\mathcal{M}, \sigma_\varphi) \to \mathcal{L}^{\in}_{\sqsubseteq}(\mathcal{M}, \sigma_\varphi)$ (эти факты в [6] доказаны для случая $\mathcal{M} = \mathcal{H}$, но в случае риманова многообразия полностью аналогичны). Потому для меры $\sigma_\varphi$ выполняются свойства а), б) и остается лишь доказать свойство в) — замыкаемость оператора $\mathbf{grad}_G$, что и реализуется в приведенной ниже теореме 3.

**Теорема 3.** *Пусть* $\mathcal{M}$ — *риманово многообразие класса* $C^2$, $\sigma$ — *конечная борелевская мера на* $\mathcal{M}$ *с полным носителем, оператор* $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_{\mathcal{M}} \colon L^2(\mathcal{M}, \sigma) \supset \mathcal{C}^\infty_{\lfloor}(\mathcal{M}) \ni \sqcap \longmapsto$ $\longmapsto \mathbf{grad}\,\sqcap \in \mathcal{L}^{\in}_{\sqsubseteq}(\mathcal{M}, \sigma)$ *замыкаем.* $G$ — *ограниченная область в* $\mathcal{M}$, *граница которой согласована с мерой* $\sigma$, *и для соответствующего векторного поля* $\mathbf{n} \in C^1_b(\mathcal{M})$ (*продолжение поля единичной внешней нормали к* $S = \partial G$) $\mathrm{div}_G\, \mathbf{n} \in L^\infty(\sigma)$. *Для* $u \in C^1(G)$ *положим*

$\mathbf{grad}_G\, u = (\mathbf{grad}\, \tilde{u})\big|_G$ ($\tilde{u} \in C_b^1(\mathcal{M})$ — *продолжение* $u$ *на* $\mathcal{M}$). *Тогда оператор* $\mathbf{grad}_G \colon L^2(G;\sigma) \supset C^1(G) \ni u \longmapsto \mathbf{grad}_G\, u \in L_v^2(G;\sigma)$ *замыкаем.*

***Доказательство.*** *Шаг* 1. Пусть $u_m \in C^1(G)$, $u_m \to 0$ в $L^2(G)$, $\mathbf{grad}_G\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_v^2(G;\sigma)$. Построим функции $\tilde{u}_m \in C_b^1(\mathcal{M})$ по следующей схеме. Пусть $\varphi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \leq \varphi_m \leq 1$, $\delta_m > 0$, $\varphi_m(t) = 0$ при $t \geq \delta_m$, $\varphi_m(t) = 1$ при $t \leq 0$, $\varphi_m'(0) = 0$. Если $x = \Phi_t y$ (здесь и в дальнейшем $\Phi_t$ — поток векторного поля $\mathbf{n}$), $y \in S = \partial G$, $0 \leq t \leq \delta_m$, то полагаем $\tilde{u}_m(x) = \varphi_m(t) u_m\big(\Phi_{-2t} x\big)$ $\big(= \varphi_m(t(x)) u_m\big(\Phi(-2t(x), x)\big)\big)$; для остальных значений $x$ полагаем $\tilde{u}_m(x) = 0$, если $x \notin G$, $\tilde{u}_m(x) = u(x)$, если $x \in G$. Тогда $\tilde{u}_m\mid_G = u_m$, $\tilde{u}_m \in \in C_b^1(\mathcal{M})$.

Докажем, что при подходящем выборе последовательности $\delta_m$ достигаются сходимости $\displaystyle\int_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}} \tilde{u}_m^2 d\sigma \to 0$, $\displaystyle\int_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}} \|\,\mathbf{grad}\, \tilde{u}_m\|^2 d\sigma \to 0$.

*Шаг* 2. По аналогии с доказательством теоремы 1 (см. формулы (10), (11) в [1]) получим

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int\limits_{\Phi_{\delta_m} G\setminus G} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int 0\delta_m dt \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2 d\sigma\right), \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Phi_{2t} G_1} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \int\limits_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, d\sigma_{2t} = \int\limits_{G_1} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma} d\sigma. \tag{5}$$

Применяя равенство (5) к области $G_1 = \Phi_{-t+s} G$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Phi_t G} \tilde{u}_m^2 d\sigma = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{2t}(\Phi_{-t+s} G)} \tilde{u}_m^2 d\sigma =$$

$$= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, \frac{d\sigma_{2t}}{d\sigma} d\sigma \leq$$

$$\leq e^{2C|t|} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2\, d\sigma. \tag{6}$$

Здесь $C = \|\operatorname{div}_G \mathbf{n}\|_{L^\infty(\mathcal{M},\sigma)}$.

Пусть $S_{-t} = \partial(\Phi_{-t} G)$. Поле $\mathbf{n}$, вообще говоря, не является нормальным к поверхности $S_{-t}$. Однако (при достаточно малых $t$) $\mathbf{n}$ трансверсально к $S_{-t}$, что, в силу результатов работы [4], доказывает существование на $S_{-t}$ поверхностной меры $\tau_{-t}$, ассоциированной с мерой $\sigma$. В этом случае для функций $v_1, v_2 \in C_b(\mathcal{M})$, совпадающих на $S_{-t}$, следует существование производных и равенство

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} v_1\, d\sigma = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_{\Phi_{-t+s} G} v_2\, d\sigma$$

(проверка этого факта аналогична доказательству леммы 4 из работы [3]).

Поскольку функции $v_1 = (\tilde{u}_m \circ \Phi_{2t})^2 \in C_b(\mathcal{M})$ и $v_2 = \varphi_m^2(t) u_m^2 \in C_b(\mathcal{M})$ совпадают на $S_{-t}$, то

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int\limits_{\Phi_{-t+s}G}(\tilde{u}_m\circ\Phi_{2t})^2\,d\sigma=\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int\limits_{\Phi_{-t+s}G}\varphi_m^2(t)u_m^2\,d\sigma. \tag{7}$$

Теперь из (4), (6), (7) получаем

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}}\tilde{u}_m^2\,d\sigma\le\int\limits_0^{\delta_m}\left(e^{2C|t|}\varphi_m^2(t)\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int\limits_{\Phi_{-t+s}G}u_m^2\,d\sigma\right)dt\le$$

$$\le e^{2C\delta_m}\int\limits_0^{\delta_m}dt\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_{-t}G}u_m^2\,d\sigma=e^{2C\delta_m}\int\limits_{-\delta_m}^{0}\left(\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_tG}u_m^2\,d\sigma\right)=$$

$$=e^{2C\delta_m}\int\limits_{mG\setminus\Phi_{-\delta_m}}u_m^2\,d\mu\to 0,\quad m\to 0$$

(здесь достаточно лишь ограниченности последовательности $\delta_m$).

*Шаг* 3. По аналогии с шагом 3 доказательства теоремы 1 имеем (далее $x\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}$)

$$\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m(x)=\big(\tilde{u}_m'(x)\big)^*=\Big[\big(\varphi_m(t(x))u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\big)'\Big]^*=$$

$$=\left[\varphi_m'(t(x))t'(x)u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)+\varphi_m(t(x))\frac{d}{dx}u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\right]^*=$$

$$=\varphi_m'(t(x))u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\,\mathbf{grad}\,t(x)+$$

$$+\varphi_m(t(x))\left[u_m'\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\left(-2\frac{\partial\Phi}{\partial t}(-2t(x),x)t'(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x)\right)\right]^*=$$

$$=\varphi_m'(t(x))u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\,\mathbf{grad}\,t(x)+$$

$$+\varphi_m(t(x))\left(-2\,\mathbf{grad}\,t(x)\mathbf{n}^*(-2t(x),x)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x)\right)^*\right)\times$$

$$\times\,\mathbf{grad}\,u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big). \tag{8}$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 1, используется интерпретация вектора $v$ из касательного пространства $T_p(\mathcal{M})$ как линейного оператора $v\colon\mathbb{R}\mapsto T_p(\mathcal{M})$ и, соответственно, $v^*\colon T_p(\mathcal{M})\mapsto\mathbb{R}$. Если $v_1\in T_q(\mathcal{M})$, $v_2\in T_p(\mathcal{M})$, то $v_1\cdot v_2^*$ — линейный оператор из $T_p(\mathcal{M})$ в $T_q(\mathcal{M})$, действующий по правилу $v_1v_2^*\colon h(h,v_2)\mapsto v_1$. Напомним также, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x)$ — линейный оператор из $T_x(\mathcal{M})$ в $T_{\Phi_tx}(\mathcal{M})$.

Поскольку формула (17) из [1] сохраняется и в случае риманова многообразия, из этой формулы и (8) получаем

$$\mathbf{grad}\,\tilde{u}_m(x)=\varphi_m'(t(x))u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^*\times$$

$$\times\mathbf{n}\big(\Phi(-t(x),x)\big)+\varphi_m\big(t(x)\big)\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x\right)\right)^*-$$

$$-2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right)^*\mathbf{n}\big(\Phi(-t(x),x)\big)\mathbf{n}^*\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\times$$

$$\times\,\mathbf{grad}\,u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big). \tag{9}$$

При достаточно малых $\delta_m$ при всех $x\in\mathcal{M}$ и $t(x)\in(0,\delta_m)$ выполняются неравенства $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-t(x),x)\right\|\le 2$, $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(-2t(x),x)\right\|\le 2$ (соответствующий вывод полностью повторяет шаг 5 доказательства теоремы 1), а также $\big\|\mathbf{n}\big(\Phi\big(-t(x),x\big)\big)\mathbf{n}^*\big(\Phi\big(-2t(x),x\big)\big)\big\|\le 2$ (следует из условия $\sup_{\mathcal{M}}\big\|\mathbf{n}'(\cdot)\big\|<\infty$). Функции $\varphi_m$ подбираем таким образом, чтобы для всех $t\in\mathbb{R}$ было выполнено неравенство $|\varphi_m'(t)|\le\frac{2}{\delta_m}$.

Тогда из (9) получаем (для всех $s\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}$)

$$\|\mathbf{grad}\,\tilde u_m(x)\|\le\frac{4}{\delta_m}\big\|u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\big\|+10\big\|\,\mathbf{grad}\,u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\big\|,$$

откуда следует

$$\big\|\,\mathbf{grad}\,\tilde u_m(x)\big\|^2\le\frac{32}{\delta_m^2}u_m^2\big(\Phi(-2t(x),x)\big)+200\big\|\,\mathbf{grad}\,u_m\big(\Phi(-2t(x),x)\big)\big\|^2.$$

Далее, по аналогии с шагом 2 имеем

$$\int\limits_{\mathcal{M}\setminus\mathcal{G}}\big\|\,\mathbf{grad}\,\tilde u_m\big\|^2d\sigma=\int\limits_0^{\delta_m}dt\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_tG}\big\|\,\mathbf{grad}\,\tilde u_m\big\|^2d\sigma\le$$

$$\le\int\limits_0^{\delta_m}e^{2C|t|}dt\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\int\limits_{\Phi_{-t+s}G}\big\|\,\mathbf{grad}\,\tilde u_m\big\|^2\circ\Phi_{2t}d\sigma\le$$

$$\le e^{2C\delta_m}\int\limits_{-\delta_m}^{0}dt\frac{d}{dt}\int\limits_{\Phi_tG}\frac{32}{\delta_m^2}u_m^2+200\big\|\,\mathbf{grad}\,u_m\big\|^2d\sigma\le$$

$$\le\frac{32}{\delta_m^2}e^{2C\delta_m}\|u_m\|^2_{L^2(G)}+200e^{2C\delta_m}\int\limits_{G\setminus\Phi_{-\delta_m}G}\big\|\,\mathbf{grad}\,u_m\big\|^2d\sigma. \tag{10}$$

Возьмем $\delta_m=\|u_m\|^{1/2}_{L^2(G)}$. Тогда первое слагаемое в правой части неравенства (10) стремится к 0 при $m\to\infty$. А из сходимости $\|\,\mathbf{grad}_G\,u_m\|^2\to\|\mathbf{Z}\|^2$ в $L^1(G;\sigma)$ следует равномерная абсолютная непрерывность интегралов от функций $\|\,\mathbf{grad}_G\,u_m\|^2$. Потому и второе слагаемое в правой части неравенства (10) также стремится к нулю.

Пусть теперь векторное поле $\mathbf{W}\in L^2_v(\mathcal{M};\sigma)$ определено условием $\mathbf{W}(x)=\mathbf{Z}(x)$, $x\in G$, $\mathbf{W}(x)=0$, $x\notin G$. В силу доказанного выше $\tilde u_m\to 0$ в $L^2(\mathcal{M})$, $\mathbf{grad}\,\tilde u_m\to\mathbf{W}$ в $L^2_v(\mathcal{M})$. Но поскольку оператор $\mathbf{grad}$ замыкаем, то $\mathbf{W}=0\ (\mathrm{mod}\,\sigma)$. Отсюда следует равенство $\mathbf{Z}=0(\mathrm{mod}\,\sigma\mid_G)$, что и доказывает замыкаемость оператора $\mathbf{grad}_G$.

Теорема доказана.

## Литература

1. *Богданский Ю. В., Потапенко А. Ю.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I // Укр. мат. журн. – 2016.0– **68**, № 7. – С. 897 – 907.
2. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в $L_2$-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
3. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
4. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
6. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.

Получено 24.09.09