УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА РЕМЕЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

For any $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$, and any measurable set $B \in I_d := [0, d]$, $\mu B = \beta$, we obtain the following sharp inequality of the Remez type:

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}$$

on the set $S_\varphi(\omega)$ of functions x with minimal period d ($d \ge 2\omega$) and a given sine-shaped 2ω-periodic comparison function φ.

In particular, we prove the sharp Remez-type inequalities on the Sobolev spaces of differentiable periodic functions. We also obtain inequalities of the indicated type on the spaces of trigonometric polynomials and polynomial splines.

Для довільних $\omega > 0$, $\beta \in (0, 2\omega)$ і будь-якої вимірної множини $B \in I_d := [0, d]$, $\mu B = \beta$, отримано точну нерівність типу Ремеза

$$\|x\|_\infty \le \frac{3\|\varphi\|_\infty - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}$$

на класах $S_\varphi(\omega)$ функцій x мінімального періоду d ($d \ge 2\omega$), що мають задану синусоподібну 2ω-періодичну функцію порівняння φ.

Як наслідок отримано точні нерівності типу Ремеза на соболєвських класах диференційовних періодичних функцій та просторах тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів.

1. Введение. В теории аппроксимации полиномами важную роль играют неравенства типа Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n,\beta)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1}$$

на классе T_n тригонометрических полиномов T порядка не выше n, где B — произвольное измеримое по Лебегу множество $B \subset I_{2\pi} := [0, 2\pi]$, $\mu B = \beta \in (0, 2\pi)$.

Начало этой тематике положила работа [1], в которой найдена точная константа в неравенстве вида (1) для алгебраических многочленов. В неравенстве Ремеза экстремальным является многочлен Чебышева 1-го рода. Точная константа в неравенстве (1) для тригонометрических полиномов неизвестна. В ряде работ получены двусторонние оценки для точных констант $C(n,\beta)$. Кроме того, известно асимптотическое поведение констант $C(n,\beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [2] и $\beta \to 0$ [3]. Подробную библиографию по данной тематике можно найти в [2 – 5].

В работе [3] доказано неравенство

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{2}$$

для произвольного полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $2\pi/m$, и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B = \beta$, где $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Равенство в (2) достигается для полинома $T(t) = \cos nx - \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{\beta}{2}\right)$. Отметим, что из (2) следует асимптотическое равенство

$$C(n,\beta) = 1 + \frac{(n\beta)^2}{8} + O(\beta^4), \quad \beta \to 0.$$

В работе [3] также доказано, что точная константа $C(n,\beta)$ в неравенстве (1) совпадает с точной константой в аналогичном неравенстве на пространствах полиномов с комплексными коэффициентами.

В настоящей работе рассматриваются только полиномы с вещественными коэффициентами и вещественнозначные функции. Получено обобщение неравенства (2) на произвольные классы функций с заданной функцией сравнения (теорема 1). Как следствие установлены точные неравенства типа Ремеза на соболевских классах дифференцируемых периодических функций (теорема 2), а также на классах $S_{n,r}$ периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению (теорема 4). Еще одним следствием теоремы 1 является неравенство (2) и его модификация (следствие 2 из теоремы 3).

2. Неравенства типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения. Будем рассматривать функции, определенные на числовой оси $\mathbf{R}$ или на некотором подмножестве $B \subset \mathbf{R}$. Для $G = B$ или $G = \mathbf{R}$ через $L_\infty(G)$ обозначим пространство измеримых на G функций x, имеющих конечную норму

$$\|x\|_{L_\infty(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{\mathrm{t}\in\mathrm{G}} |x(t)|.$$

Пусть $d > 0$, I_d — окружность, реализованная в виде отрезка $[0,d]$ с отождествленными концами. Если $G = \mathbf{R}$ или $G = I_d$, то вместо $\|x\|_{L_\infty(G)}$ будем писать $\|x\|_\infty$. Для таких G и $r \in \mathbf{N}$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим множество функций $x \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Для 2π-периодических функций и $q \in [1,\infty)$ будем рассматривать также пространства $L_q(I_{2\pi})$ измеримых функций с конечной нормой

$$\|x\|_q := \left(\int_0^{2\pi} |x(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, если существует такое $\alpha \in \mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \max_{t\in\mathbf{R}} f(t) + \alpha, \quad \min_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \min_{t\in\mathbf{R}} f(t) + \alpha,$$

и из равенства $x(\xi) = f(\eta) + \alpha$, где $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, следует неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ будем называть S-функцией, если она имеет такие свойства: φ — четная относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ — выпуклая вверх на $[0,\omega]$ и строго монотонная на $[0,\omega/2]$.

Для 2ω-периодической S-функции φ через $S_\varphi(\omega)$ обозначим класс функций x из пространства $L^1_\infty(I_d)$ с некоторым $d \ge 2\omega$, для которых φ является функцией сравнения. Отметим, что классы $S_\varphi(\omega)$ рассматривались в работах [6, 7]. Примерами классов $S_\varphi(\omega)$ являются соболевские классы

$$\bigcup_{d\ge\lambda}\left\{x\in L^r_\infty(I_d)\colon \|x\|_\infty\le A_0,\ \|x^{(r)}\|_\infty\le A_r\right\},$$

а также ограниченные подмножества пространства T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и пространства $S_{n,r}$ (сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k\in\mathbf{Z}$).

Для $d>0$ и $x\in L_\infty(I_d)$ положим $E_0(x)_\infty:=\inf\{\|x-c\|_\infty\colon c\in\mathbf{R}\}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема. Схема доказательства этой теоремы заимствована из работы [3], но вместо перестановок здесь использована общая идея сравнения, восходящая к Колмогорову [8], что позволило обобщить неравенство (2) на классы $S_\varphi(\omega)$.

Теорема 1. *Пусть φ — S-функция с периодом 2ω, $\beta\in(0,2\omega)$. Тогда для любого $d>0$, любой функции $x\in S_\varphi(\omega)$, имеющей минимальный период d, и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset I_d$, $\mu B=\beta$, выполнены неравенства*

$$\|x\|_\infty\le\frac{3\|\varphi\|_\infty-\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{\|\varphi\|_\infty+\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}\,\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \tag{3}$$

и

$$E_0(x)_\infty\le\frac{2\|\varphi\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty+\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}\,\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}. \tag{4}$$

Неравенства (3) *и* (4) *являются точными на классе $S_\varphi(\omega)$ и обращаются в равенства для функции $x(t)=\varphi(t)+\dfrac{1}{2}\left(\|\varphi\|_\infty-\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)\right)$.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $x\in S_\varphi(\omega)$ с минимальным периодом d. Не ограничивая общности можем считать, что

$$\|\varphi\|_\infty=1, \tag{5}$$

а так как φ является S-функцией, то для любого $\alpha\in\mathbf{R}$

$$\max_{t\in\mathbf{R}}\varphi(t)+\alpha=1+\alpha,\quad \min_{t\in\mathbf{R}}\varphi(t)+\alpha=\alpha-1.$$

Поскольку φ является функцией сравнения для x, существует такое $\alpha\in\mathbf{R}$, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}}x(t)=1+\alpha,\quad \min_{t\in\mathbf{R}}x(t)=\alpha-1.$$

Переходя, если нужно, к функции $-x$, можем считать, что

$$\max_{t\in\mathbf{R}}x(t)\ge\left|\min_{t\in\mathbf{R}}x(t)\right|.$$

Тогда $\alpha\ge0$, $\|x\|_\infty=1+\alpha$.

Пусть для определенности функция φ возрастает на отрезке $\left[-\dfrac{\omega}{2}, \dfrac{\omega}{2}\right]$. Для $\tau \in \mathbf{R}$ положим $x_\tau(t) := x(\tau + t)$, $t \in \mathbf{R}$. Выберем $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ так, чтобы

$$x_{\tau_1}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \max_{t\in\mathbf{R}} x(t) = 1 + \alpha, \quad x_{\tau_2}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \min_{t\in\mathbf{R}} x(t) = \alpha - 1. \tag{6}$$

Поскольку φ является функцией сравнения для x, выполнены неравенства

$$(x_{\tau_1}(t))_+ \geq (\varphi(t) + \alpha)_+, \quad \left|t - \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{7}$$

и

$$(x_{\tau_2}(t))_- \geq (\varphi(t) + \alpha)_-, \quad \left|t + \frac{\omega}{2}\right| \leq \omega, \tag{8}$$

где $u_\pm := \max\{\pm u, 0\}$. Отметим, что из (7) и (8), в частности, следует соотношение $d \geq 2\omega$.

Докажем неравенство (3). Возможны два случая: $\alpha \in [0,1]$ и $\alpha > 1$. Пусть сначала $\alpha \in [0,1]$, причем α и β таковы, что

$$\varphi\left(\frac{\omega - \beta}{2}\right) + \alpha \geq 1 - \alpha. \tag{9}$$

Положим $B_1 := \left[\dfrac{\omega - \beta}{2}, \dfrac{\omega + \beta}{2}\right]$. Символом c_1 обозначим ближайший слева от $-\dfrac{\omega}{2}$ нуль функции $\varphi + \alpha$, а символом c_2 — ближайший справа от $\dfrac{\omega}{2}$ нуль этой функции и положим $I := [c_1, c_2]$. Ясно, что $c_2 - c_1 = 2\omega$. Применяя последовательно (7), (9) и (6), получаем

$$\left\|(x_{\tau_1})_+\right\|_{L_\infty(I\setminus B_1)} \geq \varphi\left(\frac{\omega - \beta}{2}\right) + \alpha \geq 1 - \alpha = \left\|(x_{\tau_2})_-\right\|_\infty .$$

Поэтому для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B = \beta$,

$$\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \geq \left\|(x_{\tau_1})_+\right\|_{L_\infty(I\setminus B_1)} \geq \varphi\left(\frac{\omega - \beta}{2}\right) + \alpha. \tag{10}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \leq \frac{1 + \alpha}{\varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right) + \alpha} := f(\alpha). \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что $f'(\alpha) \leq 0$ для $\alpha \geq 0$. А так как в силу предположения (9) $\alpha \geq$ $\geq \dfrac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)\right)$, то

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \leq \frac{1 + \dfrac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)\right)}{\varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)\right)} = \frac{3 - \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)}{1 + \varphi\left(\dfrac{\omega - \beta}{2}\right)}.$$

Тем самым (3) доказано в случае, когда $\alpha \in [0,1]$, причем α и β таковы, что выполнено неравенство (9).

Пусть, по-прежнему, $\alpha \in [0,1]$, но выполнено неравенство, противоположное (9), т. е.

$$\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\alpha < 1-\alpha = \left\|(\varphi+\alpha)_-\right\|_\infty .$$

В этом случае существуют такие числа $u, v > 0$, $u+v=\beta$, $v \ge u$, что

$$\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha = -\left(\varphi\left(\frac{-\omega-u}{2}\right)+\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)-\alpha. \tag{12}$$

Положим $B_2 := \left[\frac{\omega-v}{2}, \frac{\omega+v}{2}\right] \bigcup \left[\frac{-\omega-u}{2}, \frac{-\omega+u}{2}\right]$. Тогда в силу (7), (8) и (12)

$$\min\left\{\left\|(x_{\tau_1})_+\right\|_{L_\infty(I\setminus B_2)}, \left\|(x_{\tau_2})_-\right\|_{L_\infty(I\setminus B_2)}\right\} \ge \varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha.$$

Ясно, что для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B = \beta$,

$$\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \ge \min\left\{\left\|(x_{\tau_1})_+\right\|_{L_\infty(I\setminus B_2)}, \left\|(x_{\tau_2})_-\right\|_{L_\infty(I\setminus B_2)}\right\}.$$

Поэтому

$$\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)} \ge \varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha. \tag{13}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \le \frac{1+\alpha}{\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\alpha}.$$

Учитывая, что в силу (12) $\alpha = \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)\right)$, имеем

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \le \frac{1+\frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)\right)}{\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{2+\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)}.$$

После несложного преобразования и подстановки $v=\beta-u$ получаем

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \le 2\,\frac{1+\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right)}-1. \tag{14}$$

Докажем, что

$$\frac{1+\varphi\left(\dfrac{\omega+u}{2}\right)}{\varphi\left(\dfrac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\dfrac{\omega+u-\beta}{2}\right)} \le \frac{2}{1+\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}. \tag{15}$$

Ясно, что (15) эквивалентно неравенству

$$1+\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) \le$$

$$\le \varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+2\varphi\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) := F(u). \tag{16}$$

Заметим, что $F(0)=1+\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)$. Кроме того, $u+v=\beta$, $u\le v$. Следовательно, $u\le\dfrac{\beta}{2}<\omega$. Поэтому для доказательства (16) достаточно убедиться в том, что

$$F'(u)\ge 0, \quad u\in\left[0,\frac{\beta}{2}\right]. \tag{17}$$

Имеем

$$2F'(u)=\varphi'\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+2\varphi'\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right)-\varphi'\left(\frac{\omega+u}{2}\right)\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)=$$

$$=\varphi'\left(\frac{\omega+u}{2}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right)+2\varphi'\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right). \tag{18}$$

Заметим, что $\dfrac{\omega}{2}<\dfrac{\omega+u}{2}<\dfrac{\omega+\beta/2}{2}<\omega$. Поэтому, в силу предположения о возрастании функции φ на $\left[-\dfrac{\omega}{2},\dfrac{\omega}{2}\right]$, она убывает на $\left[\dfrac{\omega}{2},\omega\right]$. Следовательно, $\varphi'\left(\dfrac{\omega+u}{2}\right)\le 0$ для почти всех $u\in\left[0,\dfrac{\beta}{2}\right]$. С другой стороны, $\dfrac{\beta-u}{2}\le\dfrac{\beta}{2}<\omega$. Поэтому $-\dfrac{\omega}{2}<\dfrac{\omega+u-\beta}{2}<\dfrac{\omega}{2}$ и $\varphi'\left(\dfrac{\omega+u-\beta}{2}\right)\ge 0$ для почти всех $u\in\left[0,\dfrac{\beta}{2}\right]$ в силу указанного предположения. Покажем, что

$$\left|\varphi'\left(\frac{\omega+u}{2}\right)\right|\le\varphi'\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right), \quad u\in\left[0,\frac{\beta}{2}\right]. \tag{19}$$

Для этого вследствие выпуклости вверх функции φ на $[0,\omega]$ и нечетности этой функции достаточно заметить, что расстояние $\dfrac{u}{2}$ точки $\dfrac{\omega+u}{2}$ до точки $\dfrac{\omega}{2}$ максимума функции φ не превышает расстояния ρ_1 точки $\dfrac{\omega+u-\beta}{2}$ до точки $\dfrac{\omega}{2}$ и это расстояние $\dfrac{u}{2}$ не превышает расстояния ρ_2 точки $\dfrac{\omega+u-\beta}{2}$ до точки $-\dfrac{\omega}{2}$ минимума функции φ. Действительно, так как $u+v=\beta$ и $u\le v$, то $2u\le\beta$. Поэтому

$$\rho_1 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega + u - \beta}{2} = \frac{\beta - u}{2} \geq \frac{u}{2}$$

и

$$\rho_2 = \frac{\omega + u - \beta}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega - \frac{\beta - u}{2} = \frac{2\omega - \beta}{2} + \frac{u}{2} \geq \frac{u}{2}.$$

Тем самым (19) доказано. Из (19) и (18) следует (17) в силу очевидного двойного неравенства $0 \leq 1 - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right) \leq 2$. Из (17) в свою очередь вытекают неравенства (16) и (15). Оценивая правую часть (14) с помощью неравенства (15), получаем неравенство (3) в случае $\alpha \in [0,1]$.

Осталось рассмотреть случай $\alpha > 1$. Как и в предыдущем случае, устанавливаем неравенство (11). А поскольку $f'(\alpha) \leq 0$ для $\alpha \geq 0$, то для $\alpha > 1$ имеем

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}} \leq \frac{1+\alpha}{\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right) + \alpha} \leq \frac{2}{\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right) + 1} \leq \frac{3 - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}{1 + \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)}.$$

Таким образом, (3) полностью доказано.

Докажем теперь неравенство (4). В силу предположения (5) и того, что φ является функцией сравнения для функции x, имеем $E_0(x)_\infty = \|\varphi\|_\infty = 1$. Как и при доказательстве (3), рассмотрим два случая возможных значений α в равенствах (6).

Пусть сначала $\alpha \in [0,1]$, причем выполнено предположение (9), т. е.

$$\alpha \geq \frac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right).$$

Тогда в силу неравенств (10) для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B = \beta$,

$$\frac{E_(x)_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}} \leq \frac{1}{\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right) + \alpha} \leq \frac{1}{\varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\dfrac{\omega-\beta}{2}\right)\right)}.$$

Отсюда в рассматриваемом случае следует (4).

Пусть теперь $\alpha \in [0,1]$, но вместо (9) имеет место неравенство

$$\alpha < \frac{1}{2}\left(1 - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)\right).$$

Тогда существуют такие числа $u, v > 0$, $u + v = \beta$, $v \geq u$, что выполнены равенства (12). Поэтому для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_d$, $\mu B = \beta$, в силу (7) и (8) имеют место неравенства (13). Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\frac{E_(x)_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}} \leq \frac{1}{\varphi\left(\dfrac{\omega-v}{2}\right) + \alpha}.$$

Учитывая, что в силу (12) $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\varphi\left(\dfrac{\omega+u}{2}\right) - \varphi\left(\dfrac{\omega-v}{2}\right)\right)$, имеем

$$\frac{E_{(}x)_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \le \frac{2}{\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega-v}{2}\right)} = \frac{2}{\varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right)}. \qquad (20)$$

Из (19) следует, что функция $g(u) := \varphi\left(\frac{\omega+u}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega+u-\beta}{2}\right)$ возрастает на $\left[0,\frac{\beta}{2}\right]$. Поэтому $g(u) \ge g(0) = 1+\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$ для $u \in \left[0,\frac{\beta}{2}\right]$ и из (20) следует (4). Тем самым (4) доказано для $\alpha \in [0,1]$.

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда аналогично предыдущему случаю имеем

$$\frac{E_{(}x)_\infty}{\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}} \le \frac{1}{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\alpha} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+1}.$$

Отсюда непосредственно следует (4).

Теорема 1 доказана.

3. Неравенства типа Ремеза на классах дифференцируемых периодических функций. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$, удовлетворяющий условию $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Ясно, что сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t)$ является S-функцией с периодом $2\pi/\lambda$. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $x \in L^r_\infty(\mathbf{R})$. Положим $A_r := \left\|x^{(r)}\right\|_\infty$ и выберем λ из условия $E_0(x)_\infty = A_r\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty$, т. е.

$$\lambda = \left(\frac{K_r A_r}{E_0(x)_\infty}\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$ — константа Фавара. Тогда в силу теоремы сравнения Колмогорова [8] сплайн $\varphi(t) := A_r\varphi_{\lambda,r}(t)$ является функцией сравнения для функции x. Если к тому же функция x является d-периодической с минимальным периодом d, то $x \in S_\varphi\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)$, причем вследствие теоремы сравнения Колмогорова $d \ge \frac{2\pi}{\lambda}$. Поэтому в силу теоремы 1 для произвольного $\beta \in \in (0, 2\pi)$ и любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B = \frac{\beta}{\lambda}$, выполнены неравенства

$$\|x\|_\infty \le \frac{3A_r\lambda^{-r}K_r - A_r\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda}-\frac{\beta}{\lambda}\right)\right)}{A_r\lambda^{-r}K_r + A_r\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda}-\frac{\beta}{\lambda}\right)\right)}\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}$$

и

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2A_r\lambda^{-r}K_r}{A_r\lambda^{-r}K_r + A_r\varphi_{\lambda,r}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\lambda}-\frac{\beta}{\lambda}\right)\right)}\|x\|_{L_\infty(I_d\setminus B)}.$$

Приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, а функция $x \in L^r_\infty(I_d)$ имеет минимальный период d, $d \ge \frac{2\pi}{\lambda}$, где*

$$\lambda = \left(\frac{K_r A_r}{E_0(x)_\infty} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Тогда для любого $\beta \in (0, 2\pi)$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_d$, $\mu B = \dfrac{\beta}{\lambda}$, *выполнены неравенства*

$$\|x\|_\infty \le \frac{3K_r - \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta)\right)}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta)\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}$$

и

$$E_0(x)_\infty \le \frac{2K_r}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta)\right)} \|x\|_{L_\infty(I_d \setminus B)}.$$

При каждом фиксированном $\lambda > 0$ *оба неравенства являются точными на классе*

$$\bigcup \left\{ L^r_\infty(I_d) \colon d \ge \frac{2\pi}{\lambda} \right\}$$

функций с некоторым минимальным периодом $d \ge \dfrac{2\pi}{\lambda}$ *и обращаются в равенства для функции* $x(t) = \varphi_{\lambda,r}(t) + \dfrac{1}{2}\left(\lambda^{-r}K_r - \varphi_{\lambda,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{\lambda} - \dfrac{\beta}{\lambda}\right)\right)\right)$.

Пусть теперь $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, $k = 1, \ldots, r-1$, $q \in [1, \infty]$. Применяя к функции x неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-\frac{k}{r}}} E_0(x)_\infty^{1-\frac{k}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k}{r}},$$

принадлежащее Колмогорову [8] при $q = \infty$ и Лигуну [9] при $q < \infty$, а затем оценивая $E_0(x)_\infty$ с помощью второго неравенства из теоремы 2, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $k = 1, \ldots, r-1$, $q \in [1, \infty]$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *любого* $\beta \in (0, 2\pi)$ *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_d$, $\mu B = \dfrac{\beta}{\lambda}$ *(где* λ *определено в теореме* 2), *выполнено неравенство*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{2\|\varphi_{r-k}\|_q}{\left[K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta)\right)\right]^{1-\frac{k}{r}}} \|x\|^{1-\frac{k}{r}}_{L_\infty(I_{2\pi} \setminus B)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k}{r}}.$$

Данное неравенство является точным и обращается в равенство для функции $x(t) = \varphi_r(t) + \dfrac{1}{2}\left(K_r - \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}(\pi - \beta)\right)\right)$.

4. Неравенства типа Ремеза для тригонометрических полиномов. Напомним, что символом T_n мы обозначаем пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n. Зафиксируем полином $T \in T_n$ и пусть его минимальный период равен $\dfrac{2\pi}{m}$, $m \in \mathbf{N}$. Положим $A := \|T\|_\infty$. Известно (см., например, доказательство теоремы 8.1.1 из [10]), что полином

$\varphi(t) := A\sin nt$ является функцией сравнения для полинома $T(t)$. Очевидно, что φ является S-функцией с периодом $\dfrac{2\pi}{n}$. Таким образом, $T \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Поэтому, применяя теорему 1 к полиному T, для произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{\frac{2\pi}{m}}$, $\mu B = \beta < \dfrac{2\pi}{n}$, получаем такие оценки:

$$\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}} \le \frac{3A - A\sin n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\beta\right)\right)}{A + A\sin n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\beta\right)\right)} = \frac{3-\cos\frac{\beta n}{2}}{1+\cos\frac{\beta n}{2}} = 1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}$$

и

$$\frac{E_0(T)_\infty}{\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}} \le \frac{2A}{A + A\sin n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\beta\right)\right)} = \frac{2}{1+\cos\frac{\beta n}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}.$$

Пусть теперь $k \in \mathbf{N}$. Тогда, применяя неравенство Бернштейна (см., например, [11, с. 20]), а затем оценивая $E_0(T)_\infty$ с помощью последнего неравенства, имеем

$$\left\|T^{(k)}\right\|_\infty \le n^k E_0(T)_\infty \le n^k\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}\right)\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}.$$

Если вместо неравенства Бернштейна применить его обобщение [12] (см. также [13])

$$\left\|T^{(k)}\right\|_q \le n^k\|\cos(\cdot)\|_q\, E_0(T)_\infty, \quad q \ge 1,$$

то получим неравенство

$$\left\|T^{(k)}\right\|_q \le n^k\|\cos(\cdot)\|_q\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}\right)\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $n, m \in \mathbf{N}$, $\beta \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T \in T_n$, имеющего минимальный период $\dfrac{2\pi}{m}$, и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{\frac{2\pi}{m}}$, $\mu B = \beta$, выполнены неравенства*

$$\|T\|_\infty \le \left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}\right)\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)} \tag{21}$$

и

$$E_0(T)_\infty \le \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}\right)\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}. \tag{22}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbf{N}$ и $q \in [1,\infty]$

$$\left\|T^{(k)}\right\|_q \le n^k\|\cos(\cdot)\|_q\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4}\right)\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}. \tag{23}$$

Неравенства (21)–(23) являются точными на классе T_n и обращаются в равенства для полинома $T(t) = \sin nt + \dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{n\beta}{2}\right)$.

***Замечание* 1.** Неравенства (21) и (23) (при $q=\infty$) были получены ранее в работе [3].

Перейдем теперь в теореме 3 от периода $\dfrac{2\pi}{m}$ к основному периоду 2π и от множества $B\subset I_{\frac{2\pi}{m}}$ к произвольному множеству $B\subset I_{2\pi}$. При этом ясно, что если множество B_1 реализует точную верхнюю грань (при фиксированном T)

$$\sup\left\{\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}}: B\subset I_{\frac{2\pi}{m}},\quad \mu B=\frac{\beta}{m}\right\},$$

то множество $\tilde{B}_1:=\bigcup_{k=1}^m\left(B_1+\dfrac{2\pi}{m}k\right)$ реализует верхнюю грань

$$\sup\left\{\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}}: B\subset I_{2\pi},\quad \mu B=\beta\right\}.$$

Справедливо такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть $n,m\in\mathbf{N}$, $\beta\in\left(0,\dfrac{2\pi}{n}m\right)$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T\in T_n$, имеющего минимальный период $\dfrac{2\pi}{m}$, и произвольного измеримого по Лебегу множества $B\subset I_{2\pi}$, $\mu B=\beta$, выполнены неравенства*

$$\|T\|_\infty\le\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{24}$$

и

$$E_0(T)_\infty\le\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}. \tag{25}$$

Кроме того, для любого $k\in\mathbf{N}$ и $q\in[1,\infty]$

$$\left\|T^{(k)}\right\|_q\le n^k\|\cos(\cdot)\|_q\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta n}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}. \tag{26}$$

Неравенства (24) – (26) *являются точными на классе T_n и обращаются в равенства для полинома $T(t)=\sin nt+\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{\beta}{2}\right)$.*

***Замечание* 2.** Неравенства (24) и (26) (при $q=\infty$) были получены в работе [3].

5. Неравенства типа Ремеза для периодических полиномиальных сплайнов. В настоящем пункте получены аналоги результатов из предыдущего пункта для полиномиальных сплайнов. Пусть $r,n\in\mathbf{N}$. Напомним, что символом $S_{n,r}$ обозначено пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n$, $k\in\mathbf{Z}$. Ясно, что $S_{n,r}\subset L^r_\infty(\mathbf{R})$.

Зафиксируем сплайн $s\in S_{n,r}$, и пусть он имеет минимальный период $2\pi/m$. Положим $A:=\|s\|_\infty/\|\varphi_{n,r}\|_\infty$, $\varphi(t):=A\varphi_{n,r}(t)$. Тогда в силу неравенства Тихомирова [14]

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty\le\frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty}=A. \tag{27}$$

Таким образом, для сплайна $s \in L^r_\infty(\mathbf{R})$ выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [8]

$$\|s\|_\infty \le A\,\|\varphi_{n,r}\|_\infty, \quad \left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le A.$$

Согласно этой теореме, функция $\varphi(t) := A\,\varphi_{n,r}(t)$ является функцией сравнения для сплайна s. Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\pi/n$. Таким образом, $s \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Поэтому в силу теоремы 1 для любого измеримого по Лебегу множества $B \subset I_{\frac{2\pi}{m}}$, $\mu B = \beta < 2\pi/n$, выполняются неравенства

$$\|s\|_\infty \le \frac{3An^{-r}K_r - A\varphi_{n,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \beta\right)\right)}{An^{-r}K_r + A\varphi_{n,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \beta\right)\right)}\,\|s\|_{L_\infty\left(I_{2\pi/m}\setminus B\right)}$$

и

$$E_0(s)_\infty \le \frac{2An^{-r}K_r}{An^{-r}K_r + A\varphi_{n,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \beta\right)\right)}\,\|s\|_{L_\infty\left(I_{2\pi/m}\setminus B\right)}. \tag{28}$$

Пусть теперь $r \in \mathbf{N}$, $k = 1, 2, \ldots, r$. Применяя неравенство Тихомирова [14]

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le n^k\,\frac{K_{r-k}}{K_r} E_0(s)_\infty, \quad s \in S_{n,r},$$

а затем оценивая $E_0(s)_\infty$ с помощью неравенства (28), имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le n^k\,\frac{K_{r-k}}{K_r}\,E_0(s)_\infty \le \frac{2n^k K_{r-k}}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}\|s\|_{L_\infty\left(I_{2\pi/m}\setminus B\right)}.$$

Применяя вместо неравенства Тихомирова неравенство Лигуна [15]

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le n^k\,\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{K_r}\,E_0(s)_\infty, \quad q \in [1, \infty), \quad k = 1, 2, \ldots, r-1,$$

для сплайнов $s \in S_{n,r}$, получаем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le \frac{2n^k\|\varphi_{r-k}\|_q}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}\|s\|_{L_\infty\left(I_{2\pi/m}\setminus B\right)}.$$

Приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть* $r, n, m \in \mathbf{N}$, $\beta \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$, *имеющего минимальный период* $\dfrac{2\pi}{m}$, *и произвольного измеримого по Лебегу множества* $B \subset I_{\frac{2\pi}{m}}$, $\mu B = \beta$, *выполнены неравенства*

$$\|s\|_\infty \le \frac{3K_r - \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}\|s\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}$$

и

$$E_0(s)_\infty \le \frac{2K_r}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}\|s\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}.$$

Кроме того, для $q \in [1, \infty)$ и $k = 1, \ldots, r-1$ или $q = \infty$ и $k = 1, \ldots, r$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le \frac{2n^k\|\varphi_{r-k}\|_q}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\,(\pi - \beta n)\right)}\|s\|_{L_\infty\left(I_{\frac{2\pi}{m}}\setminus B\right)}.$$

Все три неравенства являются точными на классе $S_{n,r}$ и обращаются в равенства для сплайна $s(t) = \varphi_{n,r}(t) + \dfrac{1}{2}\left(n^{-r}K_r - \varphi_{n,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\beta}{n}\right)\right)\right)$.

Рассуждая, как и в предыдущем пункте, переходя в теореме 4 от периода $\dfrac{2\pi}{m}$ к основному периоду 2π и от множества $B \subset I_{\frac{2\pi}{m}}$ к произвольному множеству $B \subset I_{2\pi}$, приходим к такому следствию.

***Следствие* 3.** *Пусть $r, n, m \in \mathbf{N}$, $\beta \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}m\right)$. Тогда для любого сплайна $s \in S_{n,r}$, имеющего минимальный период $\dfrac{2\pi}{m}$, и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \subset I_{2\pi}$, $\mu B = \beta$, выполнены неравенства*

$$\|s\|_\infty \le \frac{3K_r - \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\beta n}{m}\right)\right)}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\beta n}{m}\right)\right)}\|s\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}$$

и

$$E_0(s)_\infty \le \frac{2K_r}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\beta n}{m}\right)\right)}\|s\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}.$$

Кроме того, для $q \in [1, \infty)$ и $k = 1, \ldots, r-1$ или $q = \infty$ и $k = 1, \ldots, r$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le \frac{2n^k\|\varphi_{r-k}\|_q}{K_r + \varphi_r\left(\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\beta n}{m}\right)\right)}\|s\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)}.$$

Все три неравенства являются точными на классе $S_{n,r}$ и обращаются в равенства для сплайна $s(t) = \varphi_{n,r}(t) + \dfrac{1}{2}\left(n^{-r}K_r - \varphi_{n,r}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\beta}{n}\right)\right)\right)$.

Литература

1. *Remes E.* Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef // Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. товариства. Сер 4. – 1936. – **13**, вип. 1. – С. 93 – 95.
2. *Ganzburg M. I.* On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials // J. Approxim. Theory. – 2012. – 164. – P. 1233 – 1237.
3. *Nursultanov E., Tikhonov S.* A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials // Consr. Approxim. – 2013. – **38**. – P. 101 – 132.
4. *Borwein P., Erdelyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. – New York: Springer, 1995.
5. *Ganzburg M. I.* Polynomial inequalities on measurable sets and their applications // Consr. Approxim. – 2001. – **17**. – P. 275 – 306.
6. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
7. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сранения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
8. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
9. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
10. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
11. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. — 616 с.
12. *Calderon A. P., Klein G.* On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials // Stud. Math. – 1951. – **12**. – P. 166 – 169.
13. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства Бернштейна // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **78**. – С. 43 – 47.
14. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
15. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.

Получено 12.03.15