УДК 517.9

А. Лопушанський (Жешув. ун-т, Польща),
Г. Лопушанська, В. Рапіта (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

For a linear nonhomogeneous diffusion equation with fractional derivative of order $\beta \in (0, 2)$ with respect to time, we establish a unique solvability of the inverse problem of determination of a pair of functions: the generalized solution u (classical as a function of time) of the first boundary-value problem for the indicated equation with given generalized functions on the right-hand sides and the unknown (depending on time) continuous coefficient of the minor term of the equation under the overdetermination condition

$$\big(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \qquad t \in [0, T].$$

Here, F is a given continuous function and $(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$ is the value of the unknown generalized function u on a given test function φ_0 for any $t \in [0, T]$.

Установлена однозначная разрешимость обратной задачи для линейного неоднородного уравнения диффузии с дробной производной порядка $\beta \in (0, 2)$ по времени — задачи об определении пары функций: обобщенного решения u (классического по времени) первой краевой задачи для такого уравнения с обобщенными функциями в правых частях и неизвестного, зависящего от времени, непрерывного коэффициента в младшем члене уравнения при условии переопределения

$$\big(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot)\big) = F(t), \qquad t \in [0, T].$$

Здесь F — заданная непрерывная функция, $(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$ — значение неизвестной обобщенной функции u на заданной основной функции φ_0 для каждого $t \in [0, T]$.

1. Вступ. Рівняння з дробовими похідними та обернені задачі для них виникають при вивченні аномальної дифузії та в інших областях науки і техніки. Умови класичної розв'язності задачі Коші та першої крайової задачі для рівнянь з регуляризованою дробовою похідною за часом отримано у багатьох працях (див., наприклад, [1 – 8]). Деякі обернені крайові задачі для рівняння дифузії з різними невідомими функціями і параметрами було досліджено, наприклад, у [9 – 15].

Еліптичні й параболічні крайові задачі з узагальненими функціями у правих частинах досліджено достатньо повно (див. [16 – 20] та наведену там бібліографію). В роботах [21, 22] доведено розв'язність першої крайової задачі для рівнянь з дробовою похідною за часом у просторах узагальнених функцій.

У цій статті доведено існування та єдиність розв'язку (u, b) оберненої крайової задачі

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} - b(t)u = g(t)F_0(x), \qquad (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \qquad x \in (0, l), \tag{3}$$

$$u_t(x, 0) = F_2(x), \qquad x \in (0, l), \tag{4}$$

$$(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot)) = F(t), \qquad t \in [0, T], \tag{5}$$

з дробовою похідною Рімана – Ліувілля порядку $\beta \in (0, 2)$, де F_0, F_1, F_2 — задані узагальнені функції, g, F — задані неперервні функції, $(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$ — значення невідомої узагальненої функції u на заданій основній функції φ_0 для кожного $t \in [0,T]$. У випадку $\beta \in (0,1]$ умови (4) немає. Для доведення розв'язності задачі застосовано метод функції Гріна.

Зауважимо, що при $\beta = 1$ $\left(\text{та } \dfrac{\partial u}{\partial t} \text{ замість } D_t^1 u\right)$ обернені крайові задачі знаходження пари функцій (u,b) при гладких даних у правих частинах та інших умовах перевизначення досліджувалися, наприклад, у [23, 24], де доведено теореми існування та єдиності.

2. Основні позначення, означення та допоміжні результати. Будемо використовувати наступні позначення: $Q_0 = (0,l) \times (0,T]$, $\mathcal{D}(R)$ та $\mathcal{D}(0,l)$ — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в R і $(0,l)$, $\mathcal{D}[0,l] = C^\infty[0,l]$,

$$\mathcal{D}(\overline{Q}_0) = \left\{ v \in C^\infty(\overline{Q}_0) \colon \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k v|_{t=T} = 0, \;\; k = 0,1,\ldots \right\},$$

$\mathcal{D}'(R)$, $\mathcal{D}'(0,l)$, $\mathcal{D}'[0,l]$ і $\mathcal{D}'(\overline{Q}_0)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій [25, с. 13 – 15]) на $\mathcal{D}(R)$, $\mathcal{D}(0,l)$, $\mathcal{D}[0,l]$ і $\mathcal{D}(\overline{Q}_0)$ відповідно, (f,φ) — значення $f \in \mathcal{D}'(R)$ (також $f \in \mathcal{D}'(0,l)$, $f \in \mathcal{D}'[0,l]$ і $f \in \mathcal{D}'(\overline{Q}_0)$) на основній функції $\varphi \in \mathcal{D}(R)$ (на $\varphi \in \mathcal{D}(0,l)$, $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$ і $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0)$ відповідно),

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}_0) \colon (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0,l] \right\}.$$

Позначимо через $g\hat{*}\varphi$ згортку узагальненої g та основної φ функцій: $(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi))$. Через $f*g$ позначимо згортку узагальнених функцій f та g: $(f*g,\varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$ для кожної основної функції φ. Будемо використовувати функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} & \text{для} \quad \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t) & \text{для} \quad \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція, $\theta(t)$ — функція Хевісайда. Справджуються співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \qquad f_\lambda \hat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Зауважимо, що похідну Рімана – Ліувілля $v_t^{(\beta)}(x,t)$ порядку $\beta > 0$ визначено формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

похідну Джрбашяна – Капуто (регуляризовану похідну дробового порядку) — формулами

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x,0)}{t^\beta} \right] =$$

$$= u_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t) u(x,0) \quad \text{для} \quad \beta \in (0,1),$$

$$D_t^\beta u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau - \frac{u_t(x,0)}{(t-\tau)^{\beta-1}} \right] =$$

$$= u_t^{(\beta)}(x,t) - f_{1-\beta}(t)u(x,0) - f_{2-\beta}(t)u_t(x,0) \quad \text{для} \quad \beta \in (1,2).$$

Нехай

$$C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(Q_0) \,|\, v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\},$$

$$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = \{v \in C_{2,\beta}(Q_0) \mid v, v_t \in C(\bar{Q}_0)\},$$

$$C_{2,\beta}(\bar{Q}_0) = C_{2,\beta}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0) \text{ у випадку } \beta \in (0,1].$$

Введемо оператори

$$L: \quad (Lv)(x,t) \equiv v_t^{(\beta)}(x,t) - v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0, \qquad v \in \mathcal{D}'(\overline{Q}_0),$$

$$L^{\text{reg}}: \quad (L^{\text{reg}}v)(x,t) \equiv D_t^\beta v(x,t) - v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0, \quad v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0),$$

$$\hat{L}: \quad (\hat{L}v)(x,t) \equiv f_{-\beta} \hat{*} v(x,t) - v_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0, \quad v \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0),$$

і функціональний простір

$$X(\overline{Q}_0) = \{v \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0)\colon v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\ t \in [0,T],\ \hat{L}v \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0)\}.$$

Для $v \in C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$, $\psi \in X(\bar{Q}_0)$ правильною є формула Гріна (див. [15])

$$\int\limits_{Q_0} v(y,\tau)(\hat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_{Q_0} (L^{\text{reg}}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau +$$

$$+ \int\limits_0^l v(y,0)dy \int\limits_0^T f_{1-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau + \int\limits_0^l v_t(y,0)dy \int\limits_0^T f_{2-\beta}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau. \tag{6}$$

Останнього доданка у випадку $\beta \in (0,1]$ немає.

Введемо такі припущення:

(F_0) $g \in C[0,T]$, $\quad F_j \in \mathcal{D}'[0,l]$, $\quad j = 0,1,2$,

(F) $F, F^{(\beta)} \in C[0,T]$, $\quad |F(t)| \geq f = \text{const} > 0$, $\quad t \in [0,T]$, $\quad \varphi_0 \in \mathcal{D}(0,l)$.

Означення 1. *Пара функцій*

$$(u,b) \in \mathcal{M}(Q_0) = \mathcal{M} := \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0) \times C[0,T]$$

називається розв'язком задачі (1)–(5), *якщо вона задовольняє тотожність*

$$\int\limits_0^T \big(u(\cdot,t), (\hat{L}\psi)(\cdot,t)\big)dt = \int\limits_0^T g(t)\big(F_0(\cdot),\psi(\cdot,t)\big)dt + \int\limits_0^T b(t)\big(u(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \left(F_j(\cdot), \int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt \right) \qquad \forall \psi \in X(\bar{Q}_0) \tag{7}$$

та умову (5).

Із (3), (4) і (5) випливають необхідні умови узгодження даних:

$$(F_1, \varphi_0) = F(0), \quad (F_2, \varphi_0) = F'(0). \tag{8}$$

Означення 2. *Вектор-функція* $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y), G_2(x,t,y))$ *називається вектор-функцією Гріна задачі*

$$(L^{\text{reg}}u)(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad u_t(x,0) = F_2(x), \qquad x \in [0,l], \tag{11}$$

а також такої задачі для рівняння

$$(Lu)(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q_0,$$

якщо при достатньо регулярних F, F_1, F_2 *функція*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l G_0(x,t,y,\tau)F(y,\tau)dy + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_0^l G_j(x,t,y)F_j(y)dy, \qquad (x,t) \in \overline{Q}_0, \tag{12}$$

є класичним (*із* $C_{2,\beta}(\bar{Q}_0)$) *розв'язком задачі* (9)–(11). *У випадку* $\beta \in (0,1]$ *третьої складової* $G_2(x,t,y)$, *другої початкової умови та останнього доданка у* (12) *немає.*

Це означення для випадку однорідних крайових умов у задачі.

З означення 2 випливає, що

$$(LG_0)(x,t,y,\tau) = \delta(x-y,t-\tau), \quad (x,t),(y,\tau) \in Q_0, \quad \text{де } \delta \text{ — дельта-функція Дірака},$$

$$G_j(0,t,y) = G_j(l,t,y) = 0, \qquad y \in (0,l), \quad t \in (0,T], \quad j = 0,1,2,$$

$$(L^{\text{reg}}G_j)(x,t,y) = 0, \quad (x,t) \in Q_0, \quad y \in (0,l), \quad j = 1,2, \qquad G_1(x,0,y) = \delta(x-y),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(x,0,y) = 0, \;\; G_2(x,0,y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}G_2(x,0,y) = \delta(x-y), \qquad x,y \in (0,l).$$

Лема 1 [21, 22]**.** *Справджуються співвідношення*

$$G_j(x,t,y) = \int\limits_0^t f_{j-\beta}(\tau)G_0(x,t,y,\tau)d\tau, \qquad (x,t) \in \bar{Q}_0, y \in \Omega_0, \quad j = 1,2,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_0(\hat{L}\psi))(\xi,\tau) = \psi(\xi,\tau), \qquad (\xi,\tau) \in \bar{Q}_0,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_j(\hat{L}\psi))(\xi) = \int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\xi,t)\,dt, \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi \in X(\bar{Q}_0),$$

де

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{0}^{l} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(x,t)dx,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{0}^{l} G_j(x,t,y)\varphi(x,t)dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0), \quad j=1,2.$$

Лема 2 [15]. *Вектор-функція Гріна першої крайової задачі* (9)–(11) *існує.*

Будемо використовувати позначення

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau) = \int\limits_{0}^{l} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(x)dx,$$

$$(\widehat{G}_j\varphi)(y,t) = \int\limits_{0}^{l} G_j(x,t,y)\varphi(x)dx, \qquad j=1,2.$$

Згідно з [22], для довільної функції $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$ маємо

$$(\widehat{G_0}\varphi)(\cdot,t,\tau) \in \mathcal{D}[0,l], \qquad 0 \le \tau < t \le T,$$

$$(\widehat{G_j}\varphi)(\cdot,t) \in \mathcal{D}[0,l], \qquad t \in [0,T], \quad j=1,2,$$

та справджуються оцінки

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\right| \le c_0||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot (t-\tau)^{\beta-1}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \quad y \in [0,l], \tag{13}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\right| \le c_j||\varphi||_{C^k[0,l]} \cdot t^{j-1}, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_0, \quad j=1,2, \quad \varphi \in \mathcal{D}[0,l], \tag{14}$$

$k=0,1,2,\ldots$. Тут $||\varphi||_{C^k[0,l]} = \max_{0\le j\le k}\max_{0\le x\le l}|\varphi^{(j)}(x)|$, c_j, $j=0,1,2,$ — певні додатні сталі.

Теорема 1 [22]. *За припущення* (F_0) *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ *першої крайової задачі* (2)–(4) *для рівняння*

$$(Lu)(x,t) = g(t)F_0(x), \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{15}$$

що визначається формулою

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = \int\limits_{0}^{t} g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau + \sum_{j=1}^{2}\big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\big) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}[0,l],\ t \in [0,T]. \tag{16}$$

При доведенні теореми 1 (теореми 3 із [22]), з використанням наведених у лемі 1 формул та (13), (14), встановлено, що за припущення (F_0) функція (16) задовольняє тотожність (7) при $b(t)=0$, а також тотожність

$$(u,\widehat{L}\psi)=(F,\psi)+\sum_{j=1}^{2}\left(F_j,\int\limits_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot,t)dt\right)\qquad \forall\psi\in X(\bar{Q}_0),$$

яка є узагальненням формули Гріна (6). Саме тому взято тотожність (7) в означенні розв'язку задачі (1) – (5).

Зауважимо також, що $G_0(x,t,y,\tau)=G^0(x-y,t-\tau)$, $G_j(x,t,y)=G^j(x-y,t)$, $j=1,2$, для рівняння зі сталими коефіцієнтами та формулу (16) можна записати у вигляді

$$u=(gF_0)*G^0+\sum_{j=1}^{2}F_j*G^j.$$

Легко бачити, що при регулярних $F_j,\ j=0,1,2$, розв'язок задачі (2) – (4) для рівняння (15) буде регулярним в Q_0.

3. Теореми існування та єдиності для оберненої задачі. Перейдемо до доведення існування розв'язку оберненої задачі (1) – (5).

З теореми 1 випливає, що за припущення (F_0) при відомому значенні функції $b\in C[0,T]$ розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ першої крайової задачі (1) – (4) задовольняє рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t b(\tau)\big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+h_\varphi(t)\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\tag{17}$$

де

$$h_\varphi(t)=\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+\sum_{j=1}^{2}\big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\big),\qquad t\in[0,T],\tag{18}$$

та $h_\varphi\in C[0,T]$ для кожної функції $\varphi\in\mathcal{D}[0,l]$. Навпаки, будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ рівняння (17) (при відомому значенні функції $b\in C[0,T]$) є розв'язком задачі (1) – (4).

З рівняння (1) одержуємо

$$\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big)=\big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big)+b(t)\big(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big)+(F_0,\varphi_0)g(t).$$

Використовуючи умову (5) та припущення (F), знаходимо вираз для $b(t)$ через u:

$$b(t)=\big[F^{(\beta)}(t)-\big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big)-(F_0,\varphi_0)g(t)\big][F(t)]^{-1},\quad t\in[0,T].\tag{19}$$

З теореми 1 і припущення (F) випливає, що права частина (19) є неперервною функцією на $[0,T]$. Позначимо

$$r(u,t)=\big[F^{(\beta)}(t)-\big(u(\cdot,t),\varphi_0''(\cdot)\big)-(F_0,\varphi_0)g(t)\big][F(t)]^{-1},\quad t\in(0,T].\tag{20}$$

Підставляючи $r(u,t)$ в (17) замість $b(t)$, отримуємо нелінійне рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=\int\limits_0^t r(u,\tau)\big(u(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau+h_\varphi(t)\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],t\in[0,T],\tag{21}$$

щодо невідомої функції $u\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$. Ми звели задачу (1)–(5) до системи (21), (19). Справедливим є обернене твердження, і ми отримуємо наступний результат.

Теорема 2. *За припущень* (F_0), (F) *і* (8) *пара функцій* $(u,b)\in\mathcal{M}(Q_0)$ *є розв'язком задачі* (1)–(5) *тоді і лише тоді, коли функція* $u\in\mathcal{D}'{}_C(\bar{Q}_0)$ *є розв'язком рівняння* (21), *а функцію* $b\in C[0,T]$ *визначено формулою* (19).

Теорема 3. *За припущень* (F_0), (F) *і* (8) *існують* $T^*\in(0,T]$ ($Q_0^*=(0,l)\times(0,T^*]$ *відповідно*) *і розв'язок* $(u,b)\in\mathcal{M}(Q_0^*)=\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0^*)\times C[0,T^*]$ *задачі* (1)–(5): *функція* u *є розв'язком рівняння* (21), b *визначено згідно з* (19).

Доведення. З теореми 1 випливає, що права частина (21) неперервна на $[0,T]$. На підставі теореми 2 достатньо довести розв'язність рівняння (21) в $\mathcal{D}'{}_C(\bar{Q}_0)$.

Відомо [25], що узагальнена функція в обмеженій області має скінченний порядок сингулярності: існують $k_0,k_1,k_2\in\{0,1,2,\dots\}$ і такі функції $g_{0k},g_{1k},g_{2k}\in L_1(0,l)$, що

$$\big(F_j,\varphi\big)=\sum_{k=0}^{k_j}\int\limits_0^l g_{jk}(y)\varphi^{(k)}(y)dy\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\quad j=0,1,2,\tag{22}$$

а отже, існують такі додатні сталі C_j, що

$$\big|\big(F_j,\varphi\big)\big|\le C_j||\varphi||_{C^{k_j}[0,l]}\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\quad j=0,1,2.$$

Для $v\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ і за теоремою 1 для розв'язку v першої крайової задачі для рівняння (15) маємо

$$\big|\big(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|\le C||\varphi||_{C^K[0,l]}\quad\forall t\in[0,T],\ \ \varphi\in\mathcal{D}[0,l],$$

з деякими натуральним числом K і $C=\mathrm{const}>0$.

Нехай $K\ge\max\{k_0,k_1,k_2\}$, $R=\mathrm{const}>0$,

$$M_R=M_R(Q_0)=\left\{v\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)\colon\quad||v||_K:=\max_{t\in[0,T]}\sup_{\varphi\in\mathcal{D}[0,l]}\frac{|(v(\cdot,t),\varphi(\cdot))|}{||\varphi||_{C^K[0,l]}}\le R\right\}.$$

Визначимо оператор $P\colon\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)\to\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$ як

$$\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)+\int\limits_0^t r(v,\tau)\big(v(\cdot,t),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)d\tau,\quad t\in[0,T],\quad\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\tag{23}$$

де $v\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$, $h_\varphi(t)$ визначено згідно з (18).

Застосуємо принцип Банаха. Спочатку покажемо існування таких $R^* > 0$, $T^* \in (0,T]$, $Q_0^* = (0,l) \times (0,T^*]$ і $M_{R^*}(Q_0^*)$, що $P : M_{R^*}(Q_0^*) \to M_{R^*}(Q_0^*)$.

Згідно з (13),

$$\int_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]} d\tau = \int_0^t \max_{0\le k\le K} \max_{0\le y\le l} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| d\tau \le$$

$$\le c \max_{0\le k\le K} ||\varphi||_{C^k[0,l]} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau = q||\varphi||_{C^K[0,l]}\, t^\beta, \quad t\in[0,T],$$

де c, q — певні додатні сталі. Тоді, використовуючи (22) та (13), для довільних $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$, $t \in [0,T]$ одержуємо

$$\left| \int_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) d\tau \right| = \left| \int_0^t g(\tau) \left(\sum_{k=0}^{k_0} \int_0^l g_{0k}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau) dy \right) d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{0\le s\le T} |g(s)| \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^l |g_{0k}(y)| \left(\int_0^t \left| \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y,t,\tau)\right| d\tau \right) dy \le$$

$$\le c \max_{0\le s\le T} |g(s)| \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^l |g_{0k}(y)| dy\, ||\varphi||_{C^k[0,l]}\, t^\beta \le$$

$$\le c \max_{0\le s\le T} |g(s)| \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^l |g_{0k}(y)| dy\, ||\varphi||_{C^{k_0}[0,l]}\, t^\beta = b_0 ||\varphi||_{C^{k_0}[0,l]}\, t^\beta,$$

тобто

$$\left| \int_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) d\tau \right| \le b_0||\varphi||_{C^{k_0}[0,l]}\, t^\beta \le b_0||\varphi||_{C^K[0,l]}\, t^\beta. \tag{24}$$

Так само, використовуючи (22) при $j = 1, 2$, оцінки (14) та (24), отримуємо

$$||h_\varphi||_{C[0,T]} \le b_0||\varphi||_{C^{k_0}[0,l]}\, t^\beta + \sum_{j=1}^2 b_j ||\varphi||_{C^{k_j}[0,l]} t^{j-1} \le [b_0 t^\beta + b_1 + b_2 t] ||\varphi||_{C^K[0,l]}. \tag{25}$$

Тут b_1, b_2 — додатні сталі ($b_2 = 0$, якщо $\beta \in (0,1]$).

Для кожної $v \in M_R$ маємо

$$\big|\big(v(\cdot,\tau), \varphi_0''(\cdot)\big)\big| \le R\|\varphi_0''\|_{C^K[0,l]} = b_3 R, \quad \tau \in [0,T],$$

а отже, $|r(v,\tau)| \le \dfrac{B + b_3 R}{f}$, $\tau \in [0,T]$, де $B = \max_{t\in[0,T]} |F^{(\beta)}(t) - (F_0, \varphi_0) g(t)|$.

Тоді, враховуючи (24) та (25), для довільної функції $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$ і всіх $t \in [0,T]$ знаходимо

$$\big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big| \le$$

$$\le \big[b_0t^\beta + b_1 + b_2t\big]||\varphi||_{C^K[0,l]} + \frac{(B+b_3R)R}{f}\int\limits_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]}d\tau \le$$

$$\le \left[b_0t^\beta + b_1 + b_2t + \frac{(B+b_3R)Rqt^\beta}{f}\right]||\varphi||_{C^K[0,l]} =$$

$$= [q_0t^\beta R^2 + q_1t^\beta R + q_2]||\varphi||_{C^K[0,l]},$$

де $q_0 = \dfrac{b_3q}{f}$, $q_1 = \dfrac{Bq}{f}$, $q_2 = b_0T^\beta + b_1 + b_2T$, а звідси

$$\frac{\big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{C^K[0,l]}} \le q_0t^\beta R^2 + q_1t^\beta R + q_2 \qquad \forall t \in [0,T], \quad v \in M_R, \quad \varphi \in \mathcal{D}[0,l].$$

Виберемо $R^* = \max\{2q_2, 1\}$. Тоді $q_2 \le R^*/2$, $R^* \le R^{*2}$ та потрібна нерівність

$$(q_0+q_1)t^\beta R^{*2} + q_2 \le R^* \quad \forall t \in [0,T^*]$$

випливає з нерівності

$$2(q_0+q_1)t^\beta R^* \le 1.$$

Остання ж нерівність виконується для всіх $t \le t^* = [2(q_0+q_1)R^*]^{-\frac{1}{\beta}}$. Отже, доведено існування таких $R = R^* > 0$, $T^* = \min\{t^*, T\} > 0$, що $P\colon M_{R^*}(Q_0^*) \to M_{R^*}(Q_0^*)$.

Тепер покажемо, що оператор P є стискаючим на $M_{R^*}(Q_0^*)$. Для $v_1, v_2 \in M_{R^*}(Q_0^*)$, $\varphi \in \in \mathcal{D}[0,l]$ і $t \in [0,T^*]$ маємо

$$\big|\big((Pv_1)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) - \big((Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big| = \big|\big((Pv_1)(\cdot,t) - (Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t \big[r(v_1,\tau)\big(v_1(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) - r(v_2,\tau)\big(v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\big]d\tau\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t \big[r(v_1,\tau)\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big) + \right.$$

$$\left. + \big(r(v_1,\tau) - r(v_2,\tau)\big)\big(v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\big]d\tau\right| \le$$

$$\leq \int\limits_0^t \big|r(v_1,\tau)\big| \big|\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\big| d\tau +$$

$$+\frac{1}{f}\int\limits_0^t \big|\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), \varphi_0^{''}(\cdot)\big)\big| \big|\big(v_2(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\big| d\tau.$$

Тоді

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{D}[0,l]} \frac{\big|\big((Pv_1)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) - \big((Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{C^K[0,l]}} \leq$$

$$\leq \frac{B + b_3R^*}{f}\int\limits_0^t \sup_{\varphi\in\mathcal{D}[0,l]} \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)\big)\big|}{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]}} \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]}}{||\varphi||_{C^K[0,l]}} d\tau +$$

$$+\frac{R^*||\varphi_0^{''}||_{C^K[0,l]}}{f}\int\limits_0^t \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), \varphi_0^{''}(\cdot)\big)\big|}{||\varphi_0^{''}||_{C^K[0,l]}} \sup_{\varphi\in\mathcal{D}[0,l]} \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]}}{||\varphi||_{C^K[0,l]}} d\tau \leq$$

$$\leq \left[\frac{B + 2b_3R^*}{f} \sup_{\varphi\in\mathcal{D}[0,l]} \frac{\int_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t,\tau)||_{C^K[0,l]} d\tau}{||\varphi||_{C^K[0,l]}}\right] ||v_1 - v_2||_K \leq$$

$$\leq \frac{(B + 2b_3R^*)qt^\beta}{f}||v_1 - v_2||_K = (2q_0R^* + q_1)t^\beta ||v_1 - v_2||_K \quad \forall t \in [0, T^*].$$

Зауважимо, що при $\varphi_0^{''}(x) \equiv 0$, $x \in [0, l]$, одержаний вираз не містить множник 2 (у цьому випадку в попередній формулі $\big(v_1(\cdot,\tau) - v_2(\cdot,\tau), \varphi_0^{''}(\cdot)\big) = 0$ для всіх $\tau \in [0, T^*]$).

При $t \in [0, T^*]$ маємо

$$(2q_0R^* + q_1)t^\beta \leq \frac{2q_0R^* + q_1}{2(q_0 + q_1)R^*} = \frac{2q_0}{2(q_0 + q_1)} + \frac{q_1}{2(q_0 + q_1)R^*} \leq \frac{2q_0 + q_1}{2(q_0 + q_1)} < 1.$$

Отож, P — стискаючий оператор на $M_{R^*}(Q_0^*)$, і за теоремою Банаха одержуємо розв'язність рівняння (21) у $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0^*)$.

Теорема 4. *За умови* $F(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, *розв'язок* $(u, b) \in \mathcal{M}(Q_0)$ *задачі* (1) – (5) *єдиний.*

Доведення. Візьмемо два розв'язки $(u_1, b_1), (u_2, b_2) \in \mathcal{M}(Q_0)$ задачі (1) – (5) і підставимо їх у рівняння (1). Для $u = u_1 - u_2$, $b = b_1 - b_2$ отримуємо

$$u_t^{(\beta)} = u_{xx} + b_2u + bu_1.$$

З умов (2) – (4) випливає, що $u = 0$ на параболічній межі Q_0. Тоді за означенням 1

$$\int\limits_0^T \big(u(\cdot,t), (\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\big)dt = \int\limits_0^T \big(b_2(t)u(\cdot,t) + b(t)u_1(\cdot,t), \psi(t)\big)dt \qquad \forall\psi \in X(\bar{Q}_0).$$

Згідно з [21] (лема 3), для кожної $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0)$ існує така функція $\psi = \widehat{\mathcal{G}}_0\varrho \in X(\bar{Q}_0)$, що $\widehat{L}\psi = \varrho$ в $\bar{Q}_0$. Тоді для довільної функції $\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0)$

$$\int\limits_0^T \big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t)\big)dt = \int\limits_0^T \big(b_2(t)u(\cdot,t) + b(t)u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)dt. \tag{26}$$

Із (19) та умови перевизначення (5) випливає, що

$$\big(u(z,t), \varphi_0''(z)\big) = -b(t)F(t), \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

Тоді з (26) отримуємо рівняння

$$\int\limits_0^T \big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t)\big)dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left(b_2(t)u(\cdot,t) - \frac{(u(z,t), \varphi_0''(z))}{F(t)} u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t) \right) dt \quad \forall \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0),$$

яке можна записати як

$$\int\limits_0^T \Big(u(\cdot,t), \varrho(\cdot,t) - b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t) + \frac{\varphi_0''(\cdot)w_\varrho(t)}{F(t)}\Big)dt = 0 \quad \forall \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0), \tag{28}$$

де $w_\varrho(t) = \big(u_1(\cdot,t), (\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$ — відома функція.

Із леми 2 [21] випливає, що

$$\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0) \quad \forall \varrho \in \mathcal{D}(\bar{Q}_0),$$

а тому

$$w_\varrho \in C[0,T], \quad \varrho(\cdot,t) - b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t) + \frac{\varphi_0''(\cdot)w_\varrho(t)}{F(t)} \in \mathcal{D}[0,l], \;\; t \in [0,T],$$

та неперервна по $t \in [0,T]$. Отже, для довільних $\varphi \in \mathcal{D}[0,l]$, $\mu \in \mathcal{D}(0,T)$ існує єдиний розв'язок $\varrho = \varrho_g$ інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$\varrho(x,t) - b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(x,t) + \frac{\varphi_0''(x)w_\varrho(t)}{F(t)} = \varphi(x)\mu(t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_0,$$

$\varrho_g(\cdot,t) \in \mathcal{D}[0,l]$, $t \in [0,T]$, неперервний по $t \in [0,T]$. Тоді з (28) отримуємо

$$\int\limits_0^T \Big(u(\cdot,t), \varphi(\cdot)\Big)\mu(t)dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0,l], \;\; \mu \in \mathcal{D}(0,T).$$

За лемою Дюбуа-Реймона [26, с. 95]

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=0 \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}[0,l],\ \ t\in[0,T],$$

так що $u=0$ в $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)$. Тоді з (27) випливає, що $b(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$.

Зауваження. Так само можемо розглядати випадок крайової задачі в обмеженій області $\Omega_0\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 2$.

Аналогічні результати правильні у випадку оберненої задачі Коші

$$u_t^{(\beta)}-A(x,D)u-b(t)u=g(t)F_0(x),\ (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T]:=Q_0,$$
$$u(x,0)=F_1(x),\quad u_t(x,0)=F_2(x),\ x\in R^n,$$
$$\big(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot)\big)=F(t),\qquad t\in[0,T],$$

що полягає у знаходженні пари $(u,b)\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0)\times C[0,T]$ при заданих $\varphi_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ g,F\in C[0,T]$ та $F_j,\ j=0,1,2$, із просторів узагальнених функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^n$. Тут

$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}_0))=\{v\in\mathcal{D}'(\bar{Q}_0))\big|\big(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\in C[0,T]\ \ \forall\varphi\in\mathcal{D}(R^n)\},$$

$A(x,D)$ — еліптичний диференціальний оператор зі змінними нескінченно диференційовними коефіцієнтами.

Література

1. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Statist. Phys. – 2001. – **104(5/6)**. – P. 1349 – 1387.
2. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АрмССР. Математика. – 1968. – **3**, № 1. – С. 3 – 29.
3. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc.: Birkhäuser, 2004.
4. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 4. – С. 660 – 670.
5. *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11 – 16.
6. *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – **12**, № 4. – P. 409 – 422.
7. *Meerschaert M. M., Nane Erkan, Vallaisamy P.* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. – 2009. – **37**. – P. 979 – 1007.
8. *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. АН. – 2007. – **414**, № 4. – С. 1 – 4.
9. *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2000. – **25**. – P. 1 – 16.
10. *El-Borai Mahmoud M.* On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem // LJRRAS. – 2001. – **4**. – P. 411 – 415.
11. *Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // J. Math. Industry. – 2010. – **2A**. – P. 99 – 108.
12. *Zhang Y., Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Problems. – 2011. – **27**. – P. 1–12.
13. *Rundell W., Xu X., Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation // Appl. Anal. – 2012. – **1**. – P. 1–16.
14. *Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh., Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // J. Math. Industry. – 2013. – **5A**. – P. 51 – 57.
15. *Лопушанський А. О., Лопушанська Г. П.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння з дробовою похідною // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 655 – 667.
16. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.

17. *Rojtberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – xii+415 p.
18. *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux limites non homogenes et applications. – Paris: Dunod, 1968.
19. *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости // Доп. НАН України. – 2014. – № 6. – С. 23 – 31.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Basel: Birkhäuser, 2014. – xii+297 p.
21. *Lopushanskyj A., Lopushanska H.* Non-homogeneous fractional boundary value problem in spaces of generalized functions // Visnyk Lviv. Univ. Ser. mech.-mat. – 2013. – **78**. – P. 92 – 107.
22. *Лопушанський А. О.* Регулярність розв'язків крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з узагальненими функціями в правих частинах // Карпат. мат. публ. – 2013. – **5**, № 2. – С. 279 – 289.
23. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud.: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – **10**.
24. *Снітко Г.* Обернена задача для параболічного рівняння з невідомими молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – **68**. – С. 231 – 245.
25. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальний курс. – М.: Наука, 1965.
26. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1985.

Одержано 25.03.15,
після доопрацювання — 28.09.15