УДК 515.173.2, 517.54, 517.572

Є. О. Полулях (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДЕРЕВА ЯК МНОЖИНИ РІВНЯ ПСЕВДОГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПЛОЩИНІ. II

Let T be a forest formed by finitely many locally finite trees. Let V_0 be the set of all vertices of T of degree 1. We propose a sufficient condition for the image of an embedding $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ to be a level set of a pseudoharmonic function.

Пусть T — лес, состоящий из конечного количества локально конечных деревьев, V_0 — множество его вершин валентности 1. Предложено достаточное условие того, чтобы образ вложения $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ являлся множеством уровня псевдогармонической функции.

1. Означення і основний результат. Нехай $\Gamma = (V, E)$ — граф (можливо, нескінченний) з множиною вершин V і множиною ребер E.

Валентністю вершини будемо далі називати кількість ребер, інцидентних даній вершині. Будемо вважати, що ця величина для кожної вершини є скінченною. Позначимо через V_0 множину всіх вершин Γ валентності 1.

Шляхом, що з'єднує вершини $v'v'' \in V$, називається скінченна послідовність ребер $e_k = (v_{k-1}, v_k)$, $k = 1, \ldots, n$, така, що $v' = v_0$, $v'' = v_n$ і $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$. Шлях називається *простим*, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

На графі Γ можна природним чином задати структуру топологічного простору $\hat{\Gamma}$ (див. [1]). Ми не будемо розрізняти граф Γ і його „топологічний носій" $\hat{\Gamma}$.

Припустимо, що граф T є деревом (кожну пару різних вершин T можна з'єднати єдиним шляхом).

Нехай S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$, наприклад її північний полюс.

Означення 1 [1]. *Неперервне відображення $\Phi : T \to S^2$ називається плоским, якщо воно має такі властивості*:

(i) $\Phi^{-1}(s) = V_0$ (*у випадку* $V_0 = \varnothing$ *це означає, що* $s \notin \Phi(T)$);

(ii) *множина* $\Phi(T) \cup \{s\}$ *є замкненою в* S^2;

(iii) *відображення* $\Phi|_{T \setminus V_0} : T \setminus V_0 \to S^2$ *є гомеоморфізмом на свій образ.*

Означення 2 [1]. *Неперервне відображення $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ називається плоским, якщо існують такі плоске відображення $\Phi : T \to S^2$ і гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$, що*

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_0}.$$

Розглянемо скінченний ліс $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ (диз'юнктне об'єднання скінченної кількості дерев, самі дерева можуть бути і нескінченними).

Означення 3. *Неперервне відображення $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ називається плоским, якщо плоскими є всі відображення $\Psi_i = \Psi \,|_{T_i \setminus V_0} : T_i \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$, а також $\Psi(T_i \setminus V_0) \cap \Psi(T_j \setminus V_0) = \varnothing$ при $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.*

Означення 4 [2, 3]. *Функція $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається псевдогармонічною в точці $z \in \mathbb{R}^2$, якщо існують такі відкритий окіл U_z цієї точки і гомеоморфізм $\varphi\colon U_z \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, що $\varphi(z) = 0$, а функція $f \circ \varphi^{-1}$ гармонічна і не є сталою.*

Функція $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається псевдогармонічною, якщо вона псевдогармонічна в кожній точці $z \in \mathbb{R}^2$.

Наступна теорема є основним результатом даної статті.

Теорема 1. *Припустимо, що валентність кожної вершини скінченного лісу T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим ніж 2. Нехай $\Psi: T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ — плоске відображення.*

Тоді існує псевдогармонічна функція $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

Далі будемо позначати через $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$ і $\operatorname{Fr} A$ внутрішність, замикання і межу множини A відповідно.

Нехай W — область на площині $\mathbb{R}^2$ або на двовимірній сфері S^2. Позначимо $I = [0,1]$.

Означення 5 [4]. *Проста неперервна крива $\eta\colon I \to \overline{W}$ називається надрізом області W, якщо $\eta(0) \in \operatorname{Fr} W$ і $\eta(t) \in W$ при $t > 0$.*

Точка $z \in \operatorname{Fr} W$ називається досяжною з W, якщо існує такий надріз η області W, що $\eta(0) = z$.

Проста неперервна крива $\nu: I \to \overline{W}$ називається розрізом області W між точками $z_1, z_2 \in \operatorname{Fr} W$, якщо $\nu(0) = z_1$, $\nu(1) = z_2$, $\nu(t) \in W$ при $t \in (0,1)$.

Означення 6 [4]. *Нехай X — топологічний простір, $E \subset X$. Множина E називається локально зв'язною в точці $x \in X$, якщо для кожного околу U точки x в X знайдеться такий окіл V цієї точки, що будь-яку пару точок $y', y'' \in V \cap E$ можна з'єднати зв'язною підмножиною множини $U \cap E$.*

2. Властивості плоских відображень скінченного лісу. ***2.1. Дводольні графи, які є деревами.*** В цьому пункті ми будемо вважати, що валентність вершин графа може бути нескінченною.

***Зауваження* 1.** Якщо граф є деревом, то кожне його ребро однозначно визначається своїми кінцями. Тому ми будемо записувати шлях, що з'єднує вершини дерева v' і v'', як $P(v', v'') = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$, маючи на увазі, що $P(v', v'')$ є послідовністю ребер $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Означення 7. *Граф $G = (V, E)$ називається дводольним, якщо множина його вершин V є сумою двох підмножин V' і V'', що не перетинаються, і кожне ребро $e \in E$ з'єднує деяку вершину з V' з якоюсь вершиною з V''.*

Вершини $v_1, v_2 \in V$ будемо називати *сусідніми*, якщо вони з'єднані ребром, тобто $(v_1, v_2) \in E$.

Нехай $v \in V$. Позначимо через

$$N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\} \tag{1}$$

множину всіх вершин G, що є сусідніми з v. Зрозуміло, що у випадку, коли граф G є дводольним, $N(v') \subset V''$ для кожного $v' \in V'$, і навпаки, $N(v'') \subset V'$ для кожного $v'' \in V''$.

Зафіксуємо функції

$$f_v\colon N(v) \to \{-1, 1\}, \quad v \in V'. \tag{2}$$

Для кожного $\varepsilon\colon V' \to \{-1, 1\}$ розглянемо набір функцій

$$\varphi_v^\varepsilon = \varepsilon(v) \cdot f_v \colon N(v) \to \{-1, 1\}, \quad v \in V'. \tag{3}$$

Скажемо, що функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ *узгоджені*, якщо або $N(v_1) \cap N(v_2) = \varnothing$, або $\varphi_{v_1}^\varepsilon(w) = \varphi_{v_2}^\varepsilon(w)$ для кожної вершини $w \in N(v_1) \cap N(v_2)$.

Твердження 1. *Якщо дводольний граф G є деревом, то для довільного набору функцій* (2) *знайдеться таке відображення $\varepsilon \colon V' \to \{-1, 1\}$, що для кожної пари вершин $v_1, v_2 \in V'$ функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ узгоджені.*

Доведення. Побудуємо $\varepsilon \colon V' \to \{-1, 1\}$. Зафіксуємо вершину $v_0 \in V'$.

Нехай $v \in V'$. Граф G є деревом, тому існує єдиний шлях

$$(v_0, w_1, v_1, \ldots, w_n, v_n = v), \qquad v_i \in V', w_i \in V'', \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

який з'єднує v_0 з v в G (очевидно, n залежить від v).

Позначимо

$$r(v) = \big|\{i \in \{1, \ldots, n\} \colon f_{v_{i-1}}(w_i) \neq f_{v_i}(w_i)\}\big|, \quad \varepsilon(v) = (-1)^{r(v)}\,.$$

Для $v = v_0$ будемо вважати, що $n = 0$. Тому $r(v_0) = 0$ і $\varepsilon(v_0) = 1$.

Перевіримо, що функції з набору $\{\varphi_v^\varepsilon,\ v \in V'\}$ попарно узгоджені.

Нехай $v^{(1)}, v^{(2)} \in V'$. Якщо $N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)}) = \varnothing$, то $\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon$ і $\varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon$ узгоджені за означенням.

Нехай $w \in N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)})$. З того, що G є деревом, випливає рівність $\{w\} = N(v^{(1)}) \cap \cap N(v^{(2)})$. Дійсно, якщо існує інша вершина $w' \in N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)})$, то замкнений шлях $(v^{(1)}, w, v^{(2)}, w', v^{(1)})$ утворює цикл, а це неможливо.

Розглянемо шляхи $P(v_0, v^{(1)})$ і $P(v_0, v^{(2)})$. Зазначимо, що принаймні один із них проходить через вершину w. Дійсно, якщо це не так, то сума шляхів $P(v_0, v^{(1)})$ і $P(v_0, v^{(2)})$ містить шлях $P(v^{(1)}, v^{(2)})$, який не проходить через w. Разом зі шляхом $P'(v^{(1)}, v^{(2)}) = (v^{(1)}, w, v^{(2)})$ він утворює цикл, а це неможливо, тому що G є деревом.

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що через вершину w проходить шлях $P(v_0, v^{(1)})$. Внаслідок того, що G є деревом, шлях $P(v_0, v^{(1)})$ містить також ребро $(w, v^{(1)}) \in E$. Тому

$$P(v_0, v^{(1)}) = \big(v_0, w_1, v_1, \ldots, w_{m-1}, v_{m-1}, w_m = w, v_m = v^{(1)}\big).$$

Розглянемо два випадки:

1. Шлях $P(v_0, v^{(1)})$ не проходить через вершину $v^{(2)}$. Тоді

$$P(v_0, v^{(2)}) = (v_0, w_1, v_1, \ldots, w_{m-1}, v_{m-1}, w, v^{(2)}),$$

$$r(v^{(k)}) = \begin{cases} r(v_{m-1}), & \text{якщо} \quad f_{v_{m-1}}(w) = f_{v^{(k)}}(w), \\ r(v_{m-1}) + 1, & \text{якщо} \quad f_{v_{m-1}}(w) \neq f_{v^{(k)}}(w), \end{cases} \qquad k = 1, 2.$$

Легко бачити, що $f_{v^{(1)}}(w) = f_{v^{(2)}}(w)$ тоді й тільки тоді, коли $r(v^{(1)}) = r(v^{(2)})$. Тому рівність $f_{v^{(1)}}(w) = f_{v^{(2)}}(w)$ рівносильна рівності $\varepsilon(v^{(1)}) = \varepsilon(v^{(2)})$. Внаслідок цього

$$\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon(w) = \varepsilon(v^{(1)}) f_{v^{(1)}}(w) = \varepsilon(v^{(2)}) f_{v^{(2)}}(w) = \varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon(w) \tag{4}$$

і $\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon$ узгоджена з $\varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon$.

2. Шлях $P(v_0, v^{(1)})$ проходить через $v^{(2)}$. Тоді він повинен містити також ребро $(v^{(2)}, w)$, тому

$$P(v_0, v^{(1)}) = (v_0, w_1, v_1, \ldots, w_{m-1}, v_{m-1} = v^{(2)}, w, v^{(1)}),$$

$$r(v^{(1)}) = \begin{cases} r(v^{(2)}), & \text{якщо} \quad f_{v^{(2)}}(w) = f_{v^{(1)}}(w), \\ r(v^{(2)}) + 1, & \text{якщо} \quad f_{v^{(2)}}(w) \neq f_{v^{(1)}}(w), \end{cases}$$

і рівність (4) знову виконується. Отже, у цьому випадку також $\varphi^{\varepsilon}_{v^{(1)}}$ узгоджена з $\varphi^{\varepsilon}_{v^{(2)}}$.

Беручи до уваги довільність у виборі вершин $v^{(1)}$ і $v^{(2)}$, приходимо до висновку, що функція ε відповідає вимогам твердження.

Твердження 1 доведено.

2.2. Властивості компонент доповнення до образу скінченного лісу при плоскому відображенні. Нехай граф $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ є скінченним лісом, а відображення $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ — плоским.

Введемо наступні позначення. Нехай

$$\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

— множина всіх компонент зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$, індексованих за допомогою елементів деякої множини Λ. Для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ нехай

$$\mathcal{Q}_i = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_i}, \qquad \Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \neq \varnothing\}$$

— множина тих компонент $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$, які межують з образом дерева T_i.

Нехай $\mathcal{Q}^{(i)}$ є множиною компонент доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_0)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Зрозуміло, що для будь-якого $i \in \{1, \ldots, n\}$ кожна множина, яка є елементом $\mathcal{Q}$, міститься в якійсь множині, що є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$. З іншого боку, справджується таке твердження.

Твердження 2. *Нехай $i \in \{1, \ldots, n\}$. Кожна множина, яка є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$, містить рівно одну підмножину, що є елементом $\mathcal{Q}_i$.*

Доведення. Згідно з означенням 3 позначимо $\Psi_i = \Psi \mid_{T_i \setminus V_0}$. Нехай Ψ_i разом з відображеннями $\Phi_i : T_i \to S^2$ і $\psi_i : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$ відповідають означенню 2.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}^{(i)}$. Позначимо $\hat{Q} = \psi_i(Q)$. Згідно з лемою 2 з [1] межа $\operatorname{Fr} \hat{Q}$ гомеоморфна колу S^1. З цього випливає (див. [4]), що:

область $\hat{Q}$ локально зв'язна в кожній точці межі $\operatorname{Fr} \hat{Q}$;

кожна точка $\hat{z} \in \operatorname{Fr} \hat{Q}$ досяжна з $\hat{Q}$.

Отже, внаслідок рівності $\operatorname{Fr} Q = \psi_i^{-1}(\operatorname{Fr} \hat{Q} \setminus \{s\})$ кожна точка $z \in \operatorname{Fr} Q$ досяжна з Q.

1. Доведемо, що Q містить деяку множину Q_λ з $\mathcal{Q}_i$.

З означень 1–3 випливає, що кожна множина $\Psi(T_j \setminus V_0)$, $i = 1, \ldots, n$, є замкненою в $\mathbb{R}^2$. Фіксуємо $z \in \operatorname{Fr} Q \subset \Psi(T_i \setminus V_0)$. Зауважимо, що точка z відділена від замкненої множини

$$R_i = \Psi(T \setminus V_0) \setminus \Psi(T_i \setminus V_0) = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \ldots, n\} \\ j \neq i}} \Psi(T_j \setminus V_0). \tag{5}$$

Тому існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T \setminus V_0) = U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$.

Ми знаємо, що точка z досяжна з Q, тобто існує така проста неперервна крива $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, що $\alpha(0) = z$ і $\alpha(t) \in Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_0)$ при кожному $t > 0$.

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $\alpha(t) \in U_\varepsilon(z)$, $t \in I$. Тоді зв'язна множина $A = \{\alpha(t) \mid t > 0\}$ міститься в $U_\varepsilon(z) \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. Отже, існує $\lambda \in \Lambda$, для якого $A \subset Q_\lambda \subset Q$.

З іншого боку, за побудовою $z \in \overline{A} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \subset \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \neq \varnothing$. Внаслідок цього $\lambda \in \Lambda_i$ і $Q_\lambda \in \mathcal{Q}_i$.

2. Нехай для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda_i$ виконується включення $Q_\lambda \cup Q_\mu \subset Q$. Доведемо, що $Q_\lambda = Q_\mu$.

Зафіксуємо $w_1 \in \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$ і $w_2 \in \overline{Q_\mu} \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$. Зрозуміло, що $w_1, w_2 \in \operatorname{Fr} Q$. Розглянемо точки $\hat{w}_1 = \psi_i(w_1)$, $\hat{w}_2 = \psi_i(w_2) \in \operatorname{Fr} \hat{Q}$.

Зі співвідношення $\operatorname{Fr} \hat{Q} \cong S^1$ випливає, що існує проста дуга $\hat{L} \subset \operatorname{Fr} \hat{Q}$ з кінцями $\hat{w}_1$ і $\hat{w}_2$, яка не містить виділену точку s сфери S^2. Тоді множина $L = \psi_i^{-1}(\hat{L}) \subset \operatorname{Fr} Q \subset \Psi(T_i \setminus V_0)$ є простою дугою з кінцями w_1 і w_2.

Компакт L не перетинається з замкненою множиною R_i (див. (5)), тому L відділений від R_i і існує $a > 0$, для якого $U_a(L) \cap R_i = \varnothing$.

Множина $\psi_i(U_a(L))$ є відкритим околом компакта $\hat{L}$, тому існує таке $\varepsilon > 0$, що $\hat{L} \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \subset$ $\subset \psi_i(U_a(L))$. Позначимо $U(L) = \psi_i^{-1}(U_\varepsilon(\hat{L}))$. Це відкритий окіл дуги L.

Область $\hat{Q}$ локально зв'язна в точках $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \operatorname{Fr} \hat{Q}$ (див. вище). Тому існує таке $\delta > 0$, що довільну пару точок з $U_\delta(\hat{w}_k) \cap \hat{Q}$ можна з'єднати зв'язною множиною в $U_\varepsilon(\hat{w}_k) \cap \hat{Q}$, $k = 1, 2$.

Нехай $U(w_k) = \psi_i^{-1}(U_\delta(\hat{w}_k)$, $k = 1, 2$. Множина $U(w_1)$ є відкритим околом точки $w_1 \in$ $\in \operatorname{Fr} Q_\lambda$, тому існує $z_1 \in Q_\lambda \cap U(w_1)$. Аналогічно, знайдеться $z_2 \in Q_\mu \cap U(w_2)$. Позначимо $\hat{z}_k = \psi_i(z_k) \in U_\delta(\hat{w}_k)$, $k = 1, 2$.

Відомо (див. [4]), що для кожної дуги L простої замкненої кривої γ в S^2 і для довільного $\varepsilon > 0$ кожна з компонент доповнення $S^2 \setminus \gamma$ має розріз l між кінцями дуги L, котрий міститься в $U_\varepsilon(L)$.

Отже, знайдеться такий розріз $\hat{l}$ області $\hat{Q}$ між точками $\hat{w}_1$ і $\hat{w}_2$, що $\hat{l} \subset U_\varepsilon(\hat{L})$.

Зрозуміло, що існують точки $\hat{w}_k' \in (U_\delta(\hat{w}_k) \setminus \{\hat{w}_k\}) \cap \hat{l}$, $k = 1, 2$. Нехай $\hat{l}' \subset \hat{l}$ — проста дуга з кінцями $\hat{w}_1'$ і $\hat{w}_2'$. Очевидно, що $\hat{l}' \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$.

Скористаємося локальною зв'язністю області $\hat{Q}$ в точках $\hat{w}_1$ та $\hat{w}_2$ і знайдемо зв'язні множини $\hat{A}_k$, які з'єднують точки $\hat{z}_k$ та $\hat{w}_k'$ в $\hat{Q} \cap U_\varepsilon(\hat{w}_k)$, $k = 1, 2$.

За побудовою $\hat{A}_1, \hat{A}_2 \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$. Отже, зв'язна множина $\hat{B} = \hat{A}_1 \cup \hat{l}' \cup \hat{A}_2$ є підмножиною $U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$ і містить точки $\hat{z}_1$ та $\hat{z}_2$.

Таким чином, зв'язна множина $B = \psi_i^{-1}(\hat{B})$ містить точки z_1 та z_2 і є підмножиною $U(L) \cap Q \subset U(L) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_0))$ (див. рис. 1). За побудовою $U(L) \cap R_i \subset U_a(L) \cap R_i = \varnothing$, тому

$$B \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0).$$

Зі співвідношень $z_1 \in B \cap Q_\lambda$ і $z_2 \in B \cap Q_\mu$ випливає, що множина $B \cup Q_\lambda \cup Q_\mu$ є зв'язною. Очевидно, вона міститься в доповненні $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. Але за означенням множини Q_λ і Q_μ є компонентами $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. Тому повинна виконуватись рівність $Q_\lambda = B \cup Q_\lambda \cup Q_\mu = Q_\mu$.

Твердження 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *Для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ існує бієктивна відповідність між множинами $\mathcal{Q}_i$ та $\mathcal{Q}^{(i)}$.*

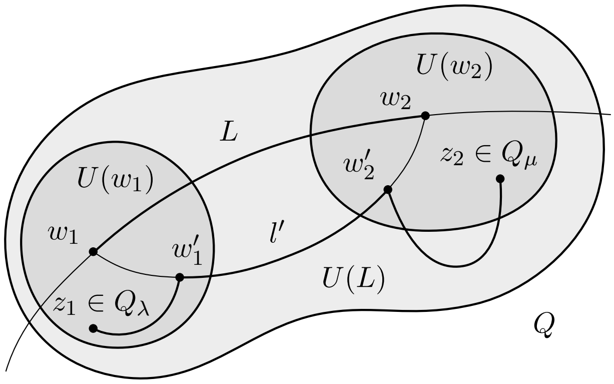

Рис. 1. Множина B.

Отже, ми можемо індексувати елементи $\mathcal{Q}^{(i)}$ за допомогою Λ_i. Введемо такі позначення:

$$\mathcal{Q}^{(i)} = \{Q_\lambda^{(i)}\}_{\lambda\in\Lambda_i}, \qquad Q_\lambda^{(i)} \supset Q_\lambda, \quad i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Наслідок 2. *Для кожної пари індексів $i \in \{1,\ldots,n\}$ та $\lambda \in \Lambda_i$ виконується рівність*

$$\overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) = \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_0).$$

Більш того, кожна точка $z \in \Psi(T_i \setminus V_0) \cap \operatorname{Fr} Q_\lambda$ досяжна з області Q_λ за допомогою простої неперервної кривої.

Доведення. Очевидно, виконується нерівність $\overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \subseteq \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$.

Нехай $z \in (\overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_0))$ для деяких $i \in \{1,\ldots,n\}$ та $\lambda \in \Lambda_i$. Лема 2 з [1] гарантує, що точка z досяжна з області $Q_\lambda^{(i)}$. Тому існує надріз $\alpha\colon I \to \overline{Q_\lambda^{(i)}}$ області $Q_\lambda^{(i)}$ в точці z її межі.

З іншого боку, за означенням плоского відображення точка z відділена від замкненої множини $R_i = (\Psi(T \setminus V_0) \setminus \Psi(T_i \setminus V_0))$. Тому існує таке $\varepsilon > 0$, що $U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T \setminus V_0) = U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$.

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $\alpha(I) \subset U_\varepsilon(z)$. Тоді знайдеться $\mu \in \Lambda_i$, для якого $\alpha(I) \subset \overline{Q_\mu}$, причому $\alpha(t) \in Q_\lambda^{(i)} \cap Q_\mu$ для кожного $0 < t \leq 1$. Внаслідок цього $Q_\mu \subset Q_\lambda^{(i)}$ і з твердження 2 випливає рівність $\mu = \lambda$.

Наслідок 2 доведено.

2.3. Граф $G(\Psi)$. Зіставимо плоскому відображенню Ψ наступний граф $G(\Psi)$.

Вершинами графа $G(\Psi)$ нехай будуть такі об'єкти:

1) дерева $T_1, \ldots, T_n$;

2) елементи Q_λ множини $\mathcal{Q}$.

Вершини Q_λ і T_i з'єднаємо *ребром*, якщо $\lambda \in \Lambda_i$ (тобто $\Psi(T_i \setminus V_0) \cap \overline{Q_\lambda} \neq \varnothing$).

Граф $G(\Psi) = (V, E)$ є *дводольним* (множина його вершин розпадається в суму двох підмножин, що не перетинаються, $V = \{T_i\} \sqcup \{Q_\lambda\}$, а кінці кожного ребра належать до різних підмножин з цієї суми).

Зауважимо, що вершини графа $G(\Psi)$ можуть мати нескінченну валентність.

Лема 1. *Граф $G(\Psi)$ є деревом.*

Доведення. Припустимо, що граф $G(\Psi)$ містить цикл

$$T_{k_1},\ Q_{\lambda_1},\ldots,\ T_{k_m},\ Q_{\lambda_m},\ T_{k_{m+1}}=T_{k_1}.$$

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що цей цикл є простим (всі його вершини різні). Тоді $Q_{\lambda_i}\cap Q_{\lambda_j}=\varnothing$ при $i\neq j$. Аналогічно і $\Psi(T_{k_i}\setminus V_0)\cap\Psi(T_{k_j}\setminus V_0)=\varnothing$ при $i\neq j$.

Скористаємося наслідком 2 та лемою 2 з [1] і для кожного $i\in\{1,\ldots,m\}$ виберемо точки $w_i'\in\Psi(T_{k_i}\setminus V_0)\cap\overline{Q_{k_i}}$ і $w_i''\in\Psi(T_{k_{i+1}}\setminus V_0)\cap\overline{Q_{k_i}}$ так, щоб виконувались такі умови:

якщо T_{k_i} складається з єдиного ребра, то $w_i'=w_{i-1}''$ ($w_1'=w_m''$ при $i=1$);

якщо T_{k_i} містить більше одного ребра, то $\Psi^{-1}(w_i'),\Psi^{-1}(w_{i-1}'')\in V$ (і $\Psi^{-1}(w_m'')\in V$ при $i=1$).

Знову використаємо наслідок 2 і для кожного $i\in\{1,\ldots,m\}$ знайдемо розріз $\alpha_i: I\to\overline{Q_{k_i}}$ області Q_{k_i} між точками $w_i',w_i''\in\operatorname{Fr}Q_{k_i}$.

Якщо $w_{i+1}'\neq w_i''$ ($w_1'\neq w_m''$ при $i=m$), то точки $\Psi^{-1}(w_{i+1}')$ та $\Psi^{-1}(w_i'')$ є вершинами дерева T_{k_i}. Тому є шлях P_i в T_{k_i}, що їх з'єднує. Зрозуміло, що він не містить вершин з V_0. Отже, образ цього шляху в $\Phi(T_{k_i}\setminus V_0)$ є носієм простої неперервної кривої $\beta_i: I\to\mathbb{R}^2$.

Проходячи послідовно криві α_i, β_i, отримуємо просту замкнену криву γ. Вона обмежує замкнений диск D.

Зрозуміло, що для кожного $i\in\{1,\ldots,m\}$ точка $\alpha_i(1/2)\in Q_{\lambda_i}$ лежить на межі диска D, а множина Q_{λ_i} є відкритим околом цієї точки. Внаслідок цього $Q_{\lambda_i}\cap\operatorname{Int}D\neq\varnothing$, $i\in\{1,\ldots,m\}$.

Відкриті множини $Q_\lambda\cap\operatorname{Int}D$, $\lambda\in\Lambda$, попарно не перетинаються, тому непорожня множина

$$(\mathbb{R}^2\setminus\Psi(T\setminus V_0))\cap\operatorname{Int}D=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(Q_\lambda\cap\operatorname{Int}D)$$

не є зв'язною. Отже, $\Psi(T\setminus V_0)\cap\operatorname{Int}D\neq\varnothing$.

Диск D є компактом, тому для кожного $i\in\{1,\ldots,m\}$ множина $T_i\cap\Psi^{-1}(D)$ міститься у скінченному підграфі дерева T_i (див. [1], твердження 5) і існує скінченне число таких ребер $e_1,\ldots,e_q$ графа T, що $\Psi(e_j)\cap\operatorname{Int}D\neq\varnothing$, $i=1,\ldots,q$, та

$$\Psi(T\setminus V_0)\cap\operatorname{Int}D\subseteq\bigcup_{j=1}^{q}\Psi(e_j).$$

Очевидно, існує найменший підграф R графа T, який містить ребра $e_1,\ldots,e_q$. Нехай R_0 є невиродженою (містить принаймні одне ребро) зв'язною компонентою R. Зрозуміло, що R_0 є деревом. Перевіримо наступні твердження.

1. Всі ребра R лежать в $\Psi^{-1}(D)$.
2. Рівно одна вершина R_0 лежить в $\Psi^{-1}(\operatorname{Fr}D)$. Всі інші вершини R_0 належать до $\Psi^{-1}(\operatorname{Int}D)$.

Почнемо з першого твердження. Зауважимо, що коли T_{k_i} містить рівно одне ребро e, то $\Psi(e)\cap\operatorname{Int}D=\varnothing$. Дійсно, $\Psi(e\setminus V_0)\cap\operatorname{Fr}D=\{w_i'\}$. З іншого боку, обидва кінця ребра e за означенням містяться в V_0, тому обидві компоненти множини $\Psi(e\setminus V_0)\setminus\{w_i'\}$ мають непорожній перетин з околом нескінченності $\mathbb{R}^2\setminus D$ (див. [1], лема 2). З викладеного випливає, що $e\notin\{e_1,\ldots,e_q\}$.

Якщо T_{k_i} містить більше одного ребра, то або $w_{i-1}''=w_i'$ і $\Psi^{-1}(\operatorname{Fr}D)\cap T_{k_i}=\{\Psi^{-1}(w_i')\}\subset$ $\subset V$, або за побудовою $P_i=\Psi^{-1}(\operatorname{Fr}D)\cap T_{k_i}=\Psi^{-1}\circ\beta_i(I)$ є шляхом, що з'єднує вершини $\Psi^{-1}(w_{i-1}'')$ та $\Psi^{-1}(w_i')$. Отже, у множину P_i входять лише цілі ребра графа T.

За побудовою $T \cap \Psi^{-1}(\operatorname{Fr} D) \subset \bigcup_{i=1}^{m} T_{k_i}$, тому $e_j \cap \Psi^{-1}(\operatorname{Fr} D) \subset V$ для кожного ребра e_j графа R. З нерівності $\Psi(e_k) \cap \operatorname{Int} D \neq \varnothing$ випливає, що $\Psi(e_k) \subset \overline{\operatorname{Int} D} = D$.

Перевіримо друге твердження. Оскільки граф R_0 зв'язний, то існує таке $i \in \{1, \ldots, m\}$, що $R_0 \subset T_{k_i}$. Ми вже встановили вище, що $P_i = \Psi^{-1}(\operatorname{Fr} D) \cap T_{k_i}$ є зв'язним підграфом дерева T_{k_i} і не має спільних ребер з R_0.

Припустимо, що існують дві вершини $v_1 \neq v_2$ графа R_0 такі, що $\Psi(v_1),\ \Psi(v_2) \in \operatorname{Fr} D \cap \cap \Psi(R_0)$. Тоді знайдуться шляхи P' та P'' в графах P_i та R_0 відповідно, які з'єднують v_1 з v_2. Множини ребер графів P_i та R_0 не перетинаються, тому $P' \neq P''$ і існують два різних шляхи, які з'єднують вершини v_1 і v_2 в T_{k_i}. А це неможливо, оскільки T_{k_i} є деревом.

Отже, рівно одна вершина R_0 (позначимо її v) лежить в $\Psi^{-1}(\operatorname{Fr} D)$, а всі інші вершини належать до $\Psi^{-1}(\operatorname{Int} D)$.

Із викладеного вище випливає, що валентність кожної вершини R_0, крім v, збігається з валентністю цієї вершини в T_{k_i}. Дійсно, якщо вершина w графа R_0 належить до $\Psi^{-1}(\operatorname{Int} D)$, то образи всіх її суміжних ребер в T_{k_i} мають непорожній перетин з $\operatorname{Int} D$. Внаслідок цього всі ребра графа T_{k_i}, суміжні w, є ребрами підграфа R_0.

Відомо (див. [1], твердження 2), що в дереві R_0 є вершина $v' \neq v$, яка має валентність 1. Тому валентність v' в T_{k_i} також дорівнює 1. А це неможливо, оскільки $v' \notin V_0$ згідно з означенням плоского відображення. Отримали суперечність. Отже, граф $G(\Psi)$ не містить циклів.

Перевіримо зв'язність графа $G(\Psi)$.

Зрозуміло, що для кожного $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$ існує така компонента $T_{i(\lambda)}$ графа T, що $\overline{Q_\lambda} \cap T_{i(\lambda)} \neq \varnothing$. За означенням графа $G(\Psi)$ його вершини Q_λ і $T_{i(\lambda)}$ з'єднані ребром.

Внаслідок викладеного кожна компонента графа $G(\Psi)$ містить вершину вигляду T_i.

Припустимо, що G_1 і G_2 — дві різні компоненти $G(\Psi)$. Нехай G_1 містить вершину T_i, а G_2 — вершину T_j. Позначимо через $V(G_1)$ множину вершин компоненти G_1. Тоді $T_i \in V(G_1)$, $T_j \notin V(G_1)$. Введемо ще такі позначення:

$$C_1 = \bigcup_{T_k \in V(G_1)} \Psi(T_k \setminus V_0), \qquad \hat{C}_1 = \bigcup_{T_k \notin V(G_1)} \Psi(T_k \setminus V_0).$$

За означенням плоского відображення всі множини $\Psi(T_k \setminus V_0)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, замкнені і попарно не перетинаються. Тому множини C_1 і $\hat{C}_1$ замкнені та не перетинаються.

Зафіксуємо $w_i \in \Psi(T_i \setminus V_0) \subset C_1$, $w_j \in \Psi(T_j \setminus V_0) \subset \hat{C}_1$ і з'єднаємо ці дві точки простою неперервною кривою $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = w_i$, $\gamma(1) = w_j$.

Оскільки множина $\gamma^{-1}(C_1) \ni 0$ замкнена в I і $w_j = \gamma(1) \notin C_1$, то $1 > \tau_1 = \max\{t \in \in I \mid \gamma(t) \in C_1\}$. Нехай $\gamma(\tau_1) \in \Psi(T_r \setminus V_0)$ для деякого $r \in \{1, \ldots, n\}$. З іншого боку, замкнені множини $\gamma^{-1}(\hat{C}_1) \ni 1$ та $\gamma^{-1}(C_1)$ не перетинаються, тому існує $\tau_2 = \min\{t \in (\tau_1, 1]) \mid \gamma(t) \in \in \hat{C}_1\}$. За побудовою $\gamma(\tau_2) \in \Psi(T_s \setminus V_0)$ для деякого $s \in \{1, \ldots, n\}$.

З одного боку, $T_r \in V(G_1)$. Також $T_s \notin V(G_1)$, оскільки $\gamma(\tau_2) \notin C_1$.

З іншого боку, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$ для кожного $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Множина $\{\gamma(t) \mid \tau_1 < t < < \tau_2\}$ зв'язна як образ зв'язної множини при неперервному відображенні, тому знайдеться таке $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$, що $\gamma(t) \in Q_\lambda$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Очевидно, $\gamma(\tau_1), \gamma(\tau_2) \in \overline{Q_\lambda}$. Внаслідок цього вершина Q_λ з'єднана ребром з кожною з вершин T_r та T_s. Отже, вершини T_r та T_s графа $G(\Psi)$ мають належати до однієї компоненти зв'язності. Отримали суперечність. Отже, граф $G(\Psi)$ є зв'язним.

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} \neq \varnothing$ *для деяких* Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$. *Тоді існує єдиний індекс* $i \in$ $\in \{1, \ldots, n\}$ *такий, що* Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}_i$.

Доведення. За означенням $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cup \operatorname{Fr} Q_\mu \subset \Psi(T \setminus V_0)$. Якщо $Q_\lambda \in \mathcal{Q}_i$ для деякого $i \in$ $\in \{1, \ldots, n\}$, то $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \neq \varnothing$ і в графі $G(\Psi)$ вершини Q_λ та T_i з'єднані ребром. З урахуванням цього наслідок випливає з леми 1.

Означення 8. *Назвемо множини* Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$, $\lambda \neq \mu$, *суміжними, якщо множина* $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap$ $\cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ *містить більше однієї точки.*

***Наслідок* 4.** *Нехай* $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} \neq \varnothing$ *для деяких* $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Тоді справджуються такі твердження:

Перетин $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu = \operatorname{Fr} Q_\lambda^{(i)} \cap \operatorname{Fr} Q_\mu^{(i)}$ *є зв'язною множиною* (*індекс* i *відповідає наслідку* 3).

Якщо Q_λ *і* Q_μ *суміжні, то області* $Q_\lambda^{(i)}$, $Q_\mu^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ *суміжні в сенсі означення* 7 *з* [1].

Доведення. Перше твердження випливає з наслідків 2, 3 і наслідку 2 з [1]. Друге твердження випливає з першого і з твердження 6 з [1].

***2.4. Відображення* Sign.**

Лема 2. *Нехай валентність кожної вершини лісу* $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ *або дорівнює одиниці, або є парним числом, більшим ніж* 2.

Тоді існує таке відображення $\operatorname{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\}$, *що для кожної пари суміжних областей* Q_λ, $Q_\mu \in \mathcal{Q}$ *виконується нерівність* $\operatorname{Sign}(Q_\lambda) \neq \operatorname{Sign}(Q_\mu)$.

Доведення. Розіб'ємо множину вершин графа $G(\Psi)$ на дві частини $V_1 = \{T_1, \ldots, T_n\}$ та $V_2 = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, що не перетинаються.

За побудовою

$$N(T_k) = \{Q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_k\} = \mathcal{Q}_k$$

для кожної вершини $T_k \in V_1$ (див. (1)).

Згідно з лемою 3 з [1] для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$ існує відображення $\operatorname{Sign}^{(k)}\colon \mathcal{Q}^{(k)} \to$ $\to \{-1, 1\}$, для якого виконується така умова: якщо $Q_\lambda^{(k)}$ і $Q_\mu^{(k)}$ суміжні, то $\operatorname{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)}) \neq$ $\neq \operatorname{Sign}^{(k)}(Q_\mu^{(k)})$.

Визначимо набір відображень $\operatorname{Sign}_k\colon \mathcal{Q}_k \to \{-1, 1\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, за допомогою співвідношення $\operatorname{Sign}_k(Q_\lambda) = \operatorname{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)})$, $\lambda \in \Lambda_k$. Внаслідок твердження 1 існує така функція $\varepsilon\colon$ $\{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$, що $\varepsilon(r) \operatorname{Sign}_r(Q_\lambda) = \varepsilon(s) \operatorname{Sign}_s(Q_\lambda)$, якщо $\lambda \in \Lambda_r \cap \Lambda_s$, $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Отже, коректно визначено функцію

$$\operatorname{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\},$$

$$\operatorname{Sign}(Q_\lambda) = \varepsilon(k) \operatorname{Sign}_k(Q_\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda_k, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Нехай множини Q_λ і Q_μ суміжні для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$. Згідно з наслідком 3 існує таке $k \in \{1, \ldots, n\}$, що $\lambda, \mu \in \Lambda_k$. Наслідок 4 гарантує, що множини $Q_\lambda^{(k)}$ та $Q_\mu^{(k)}$ суміжні, отже, з властивостей відображення $\operatorname{Sign}^{(k)}$ випливають співвідношення

$$\operatorname{Sign}(Q_\lambda) = \varepsilon(k) \operatorname{Sign}_k(Q_\lambda) = \varepsilon(k) \operatorname{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)}) \neq$$

$$\neq \varepsilon(k) \operatorname{Sign}^{(k)}(Q_\mu^{(k)}) = \varepsilon(k) \operatorname{Sign}_k(Q_\mu) = \operatorname{Sign}(Q_\mu).$$

Лему 2 доведено.

3. Побудова псевдогармонічної функції. Ми скористаємось наступним топологічним критерієм того, що функція є псевдогармонічною (див. [5]).

Нехай F — топологічний простір, $f\colon F \to \mathbb{R}$ — функція. Позначимо через $L_c = \{z \in F \mid f(z) = c\}$, $c \in f(F)$, множину рівня функції f.

Означення 9 [5]. *Сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ множин рівня функції f називається одностайно локально зв'язною в точці $z \in F$, якщо для кожного околу W точки z знайдеться інший її окіл $W' \subset W$ такий, що для будь-якого $c \in f(F)$ кожну пару точок з $L_c \cap W'$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини L_c.*

Якщо сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ одностайно локально зв'язна в кожній точці $z \in F$, кажуть, що $\{L_c\}$ одностайно локально зв'язна на F.

Теорема 2 [5]. *Нехай F — двовимірна поверхня. Функція $f\colon F \to \mathbb{R}$ є псевдогармонічною на F тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:*

(1) *функція f неперервна;*

(2) *відображення f відкрите;*

(3) *сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна на F, можливо, за винятком деякого дисконтинууму $E \subset F$.*

3.1. Деякі технічні результати.

Лема 3. *Нехай $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — деяка сім'я зв'язних відкритих підмножин площини, а $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція.*

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) *$U_i \cap U_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$;*

2) *$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{U_i} = \mathbb{R}^2$;*

3) *для всіх $i \in \mathbb{N}$ та $x \in \operatorname{Fr} U_i$ точка x досяжна з U_i;*

4) *для кожного $i \in \mathbb{N}$ функція $f\,|_{U_i}\colon U_i \to \mathbb{R}$ є відкритим відображенням;*

5) *$f^{-1}(0) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$; внаслідок зв'язності кожного U_i та неперервності функції f з цього випливає, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ функція f набуває на U_i значень одного знаку;*

6) *для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ знайдуться дві множини U_j та U_k такі, що $x \in \operatorname{Fr} U_j \cap \cap \operatorname{Fr} U_k$ і f набуває значень різних знаків на U_j і U_k;*

7) *сім'я $\{L^i_c\}_{c\in f(\overline{U_i})}$ множин рівня функції $f|_{\overline{U_i}}\colon \overline{U_i} \to \mathbb{R}$ одностайно локально зв'язна на $\overline{U_i}$, $i \in \mathbb{N}$.*

Тоді функція f відповідає таким вимогам:

a) *$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є відкритим відображенням;*

b) *нехай для деякого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ існують відкритий окіл V та індекси $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$, такі, що $V \subset \overline{U_j} \cup \overline{U_k}$; тоді сім'я $\{L_c\}_{c\in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f одностайно локально зв'язна в точці x.*

Доведення. a) Перевіримо, що відображення f є відкритим.

Нехай множина $W \in \mathbb{R}^2$ відкрита. Згідно з умовою 4 даної леми всі множини $f(W \cap U_i)$ відкриті, тому множина

$$f\left(W \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(W \cap U_i)$$

є відкритою.

Нехай $x \in W \cap \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Тоді $f(x) = 0$ згідно з умовою 5. Відповідно до умови 6 знайдемо такі індекси $j, k \in \mathbb{N}$, що $x \in \operatorname{Fr} U_j \cap \operatorname{Fr} U_k$, а також f від'ємна на U_j і додатна на U_k.

Скористаємось умовою 3 і знайдемо надрізи $\alpha_j\colon [0,1] \to \overline{U_j}$ і $\alpha_k\colon [0,1] \to \overline{U_k}$ областей U_j і U_k відповідно в точці x їх спільної межі. Тоді $f \circ \alpha_j(0) = f \circ \alpha_k(0) = f(x) = 0$, $f \circ \alpha_j(t) < 0$ і $f \circ \alpha_k(t) > 0$ при $t > 0$.

Зафіксуємо окіл $W_x \subset W$ точки x. Криві α_j і α_k неперервні, тому знайдуться такі $t_j, t_k \in \in (0,1]$, що $\alpha_j(t) \in W_x$ при $t \le t_j$ і $\alpha_k(t) \in W_x$ при $t \le t_k$. За побудовою $c_j = f \circ \alpha_j(t_j) < 0$ і $c_k = f \circ \alpha_k(t_k) > 0$.

Позначимо $V_{f(x)} = (c_j, c_k)$. Множина

$$A = \{\alpha_j(t) \mid t \in [0, t_j]\} \cup \{\alpha_k(t) \mid t \in [0, t_k]\} \subset W_x$$

зв'язна, тому і її образ $f(A)$ є зв'язною множиною. Очевидно, $c_j, c_k \in f(A)$, тому і $V_{f(x)} = = (c_j, c_k) \subset f(A) \subset f(W_x) \subset f(W)$. Зрозуміло, що множина $V_{f(x)}$ є відкритим околом точки $f(x) = 0$.

Отже, для довільної точки $x \in W \cap \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ знайдуться її відкритий окіл $W_x \subset W$ і відкритий окіл $V_{f(x)}$ її образу $f(x)$ такі, що $V_{f(x)} \subset f(W_x)$. Позначимо для зручності $F = = W \cap \left(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right)$. З очевидної рівності

$$W = \{x \in F\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (W \cap U_i) = \bigcup_{x\in F} W_x \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (W \cap U_i)$$

випливає, що

$$f(W) = \bigcup_{x\in F} f(W_x) \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(W \cap U_i) \supset \bigcup_{x\in F} V_{f(x)} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(W \cap U_i) \supset$$

$$\supset \{f(x) | x \in F\} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(W \cap U_i) = f(W).$$

Отже,

$$f(W) = \bigcup_{x\in F} V_{f(x)} \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(W \cap U_i)$$

і множина $f(W)$ є відкритою.

Відкритість відображення f випливає з довільності вибору відкритої множини $W \in \mathbb{R}^2$.

б) Нехай $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ і існують відкритий окіл V та індекси $j, k \in \mathbb{N}$, $j \ne k$, такі, що $V \subset \overline{U_j} \cup \overline{U_k}$. Перевіримо, що сім'я $\{L_c\}_{c\in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f є одностайно локально зв'язною у точці x.

З умови 1 випливає, що $U_l \cap (\overline{U_j} \cup \overline{U_k}) = \varnothing$ для кожного $l \notin \{j,k\}$, $l \in \mathbb{N}$. Тому

$$\overline{U_l} \cap V = \varnothing \quad \text{при} \quad l \notin \{j,k\}. \tag{6}$$

Внаслідок умови 6 і попереднього співвідношення f набуває значень різних знаків на U_j і U_k. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що f від'ємна на U_j і додатна на U_k, тобто $f(U_j) \subset (-\infty, 0)$ і $f(U_j) \subset (0, +\infty)$.

Зазначимо, що з умови 6 і рівності (6) також випливає, що $V \setminus (U_j \cup U_k) \subset (\operatorname{Fr} U_j \cap \operatorname{Fr} U_k)$. Внаслідок цього $f^{-1}(0) \cap V \subset (\operatorname{Fr} U_j \cap \operatorname{Fr} U_k)$.

Розглянемо відкритий окіл W точки x в $\mathbb{R}^2$. Позначимо $W_0 = W \cap V$.

Використавши умову 7, знайдемо відкритий окіл $Q_j \subset W_0 \cap \overline{U_j}$ точки x у просторі $\overline{U_j}$, який має таку властивість: для будь-якого $c \in f(\overline{U_j})$ кожну пару точок з $L_c^j \cap Q_j$ можна з'єднати у $W_0 \cap \overline{U_j}$ зв'язною підмножиною множини L_c^j. Виберемо також відкритий окіл $Q_k \subset W_0 \cap \overline{U_k}$ точки x у просторі $\overline{U_k}$ такий, що для будь-якого $c \in f(\overline{U_k})$ кожну пару точок з $L_c^k \cap Q_k$ можна з'єднати у $W_0 \cap \overline{U_k}$ зв'язною підмножиною множини L_c^k.

З означення індукованої топології на підпросторі випливає, що знайдуться такі відкриті околи W_j' і W_k' точки x в $\mathbb{R}^2$, що $Q_j = W_j' \cap \overline{U_j}$ і $Q_k = W_k' \cap \overline{U_k}$. Позначимо $W' = V \cap W_j' \cap W_k'$.

Нехай $y_1, y_2 \in W' \cap L_c$ для деякого $c \in f(\mathbb{R}^2)$.

Якщо $c \geq 0$, то $y_1, y_2 \in \overline{U_j}$. Тому за означенням $y_1, y_2 \in L_c^j$. З вибору околу W' випливає, що $y_1, y_2 \in Q_j$. Внаслідок цього існує зв'язна підмножина $C \subset L_c^j \cap W_0 \cap \overline{U_j}$, яка містить ці точки. Очевидно, $L_c^j \subset L_c$, тому пару точок y_1, y_2 можна з'єднати у W зв'язною підмножиною множини L_c.

Якщо $c \leq 0$, то $y_1, y_2 \in \overline{U_k}$. Повторюючи попередні міркування, приходимо до висновку, що і в цьому випадку точки y_1 і y_2 можна з'єднати у W зв'язною підмножиною множини L_c.

Враховуючи довільність вибору відкритого околу W точки x, робимо висновок, що сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f одностайно локально зв'язна у точці x.

Лему 3 доведено.

Нехай $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ — замкнений диск радіуса 1 з центром у точці $(0, 1)$. Позначимо також $D' = D \setminus \{0\} = \{(x, y) \in D \mid x > 0\}$, $D_0 = \operatorname{Int} D$, $\operatorname{Fr} D = D \setminus D_0$.

Твердження 3. *Існує неперервна функція* $g\colon D' \to \mathbb{R}$, *яка має такі властивості*:

(i) $g(D') = [0, 1)$, $g(\operatorname{Int} D) = (0, 1)$, $\operatorname{Fr} D \setminus \{0\} = g^{-1}(0)$;

(ii) *відображення* $g\,|_{\operatorname{Int} D}\colon \operatorname{Int} D \to \mathbb{R}$ *відкрите*;

(iii) *сім'я* $\{L_c\}_{c \in [0,1)}$ *множин рівня функції* g *одностайно локально зв'язна на* D'.

Доведення. Розглянемо спочатку функцію $g_0\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_0(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Легко бачити, що множиною рівня $g_0^{-1}(c)$, $c \neq 0$, цієї функції є коло $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ радіуса $|c|$ з центром у точці $(c, 0)$, з якого вилучено початок координат. Зокрема, $g_0(D') = (0, 1]$, $g_0(\operatorname{Int} D) = (0, 1)$ і $\operatorname{Fr} D \setminus \{0\} = g_0^{-1}(1)$.

Зауважимо також, що $D' = \{z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid g_0(z) \in (0, 1]\}$.

Нехай

$$g_1(z) = 1 - g_0(z), \quad z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Тоді $g_1(D') = [0, 1)$, $g_1(\operatorname{Int} D) = (0, 1)$ і $\operatorname{Fr} D \setminus \{0\} = g_1^{-1}(0)$. Отже, функція g_1 відповідає умові (i).

Також виконується співвідношення

$$D' = \{z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid g_1(z) \in [0, 1)\}. \tag{7}$$

Легко бачити, що функція $g_1\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є гладкою і не має критичних точок в області визначення.

Згідно з теоремою про ранг (див. [6]) для кожного $z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ існує такий окіл U_z, що функція $g_1|_{U_z}\colon U_z \to \mathbb{R}$ топологічно еквівалентна координатній проекції $\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

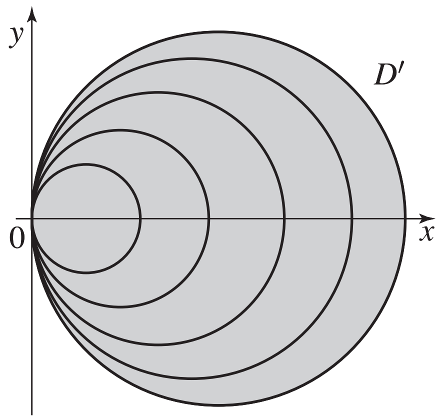

Рис. 2. Множини рівня функції g.

$\pi_1(x, y) = x$, у деякому околі початку координат. Тобто існують такі вкладення $\chi_z : U_z \to \mathbb{R}^2$ і гомеоморфізм $\eta_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $\chi_z(z) = 0$ і діаграма

$$\begin{array}{ccc} U_z & \xrightarrow{g_1|_{U_z}} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \chi_z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_z} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[\pi_1]{} & \mathbb{R} \end{array}$$

є комутативною. З цього безпосередньо випливає, що відображення g_1 є відкритим.

Перевіримо, що сім'я множин рівня функції g_1 одностайно локально зв'язна в області визначення цієї функції.

Нехай W — окіл точки z в $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Множина $\chi_z(U_z \cap W)$ є околом точки $0 = \chi_z(z)$, тому існує таке $\delta > 0$, що $V_\delta(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \delta^2\} \subset \chi_z(U_z \cap W)$. Тоді $W' = \chi_z^{-1}(V_\delta(0)) \subset W$ і $z \in W'$.

Зрозуміло, що для кожного $c \in g_1(W')$ виконується включення

$$\chi_z(g_1^{-1}(c)) \subset \pi_1^{-1}(\eta_z(c)) = \{\eta_z(c)\} \times \mathbb{R},$$

тому множина

$$W' \cap g_1^{-1}(c) = \chi_z^{-1}\big(V_\delta(0) \cap (\{\eta_z(c)\} \times \mathbb{R})\big) \subset W$$

є зв'язною, як образ інтервалу під дією неперервного відображення χ_z^{-1}. Отже, для будь-якого $c \in g_1(W')$ кожну пару точок з множини $W' \cap g_1^{-1}(c)$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини $g_1^{-1}(c)$.

Внаслідок довільності вибору точки z та її околу W сім'я множин рівня функції g_1 одностайно локально зв'язна на множині $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $g = g_1|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ (див. рис. 2).

З викладеного вище випливає, що g відповідає умові (i).

Відображення $g\,|_{\mathrm{Int}\, D} = g_1|_{\mathrm{Int}\, D} :\ \mathrm{Int}\, D \to \mathbb{R}$ є відкритим, тому що g_1 — відкрите відображення і $\mathrm{Int}\, D$ — відкрита підмножина його області визначення. Отже, умова (ii) також виконується для g.

Справедливість умови (iii) для g випливає з одностайної локальної зв'язності сім'ї множин рівня функції g_1 і з того, що D' є повним прообразом множини $[0,1)$ (див. рівність (7)).

Твердження 3 доведено.

Наслідок 5. *Нехай A є власною відкритою підмножиною межі* $\operatorname{Fr} D$, $\hat{D} = \operatorname{Int} D \cup A$. *Тоді існує неперервна функція $\hat{g}\colon \hat{D} \to \mathbb{R}$, яка має такі властивості*:

(i) $\hat{g}(\hat{D}) = [0,1)$, $\hat{g}(\operatorname{Int} D) = (0,1)$, $A = \hat{g}^{-1}(0)$;

(ii) *відображення* $\hat{g}\,|_{\operatorname{Int} D}\colon \operatorname{Int} D \to \mathbb{R}$ *відкрите*;

(iii) *сім'я* $\{\hat{L}_c\}_{c\in[0,1)}$ *множин рівня функції* $\hat{g}$ *одностайно локально зв'язна на* $\hat{D}$.

Доведення. За умовою наслідку $A \neq \operatorname{Fr} D$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $0 \notin A$. Тоді $\hat{D} \subset D'$.

Розглянемо функцію $g\colon D' \to \mathbb{R}$, яка відповідає твердженню 3. Нехай $\hat{g} = g\,|_{\hat{D}}\colon \hat{D} \to \mathbb{R}$.

Очевидно, $\hat{g}$ задовольняє вимоги (i) та (ii) наслідку.

Для перевірки умови (iii) зазначимо, що внаслідок відкритості A в $\operatorname{Fr} D$ для кожного $z \in A$ існує такий окіл W_z^0 в $\mathbb{R}^2$, що $W_z = W_z^0 \cap \hat{D} = W_z^0 \cap D'$. Тоді для кожного околу W точки z в D' окіл $W \cap W_z$ цієї точки в D' буде підмножиною $\hat{D}$. Для завершення доведення залишилося зауважити, що $\hat{L}_c = L_c \cap \hat{D}$ для кожного $c \in [0,1)$, і скористатись означенням 9.

Наслідок 5 доведено.

3.2. Побудова функції f.

Твердження 4. *Набір множин $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ утворює локально скінченне замкнене покриття площини.*

Для кожного $z \in \Phi(T\setminus V_0)$ існують принаймні дві компоненти $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$, які є суміжними і такими, що $z \in \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$.

Якщо $z \in \Psi(T \setminus V)$, то $z \in \operatorname{Int}(\overline{Q_\lambda} \cup \overline{Q_\mu})$.

Доведення. Нехай $z \in \mathbb{R}^2$. Щоб перевірити першу частину твердження, потрібно знайти окіл $U_z \ni z$, який перетинається лише зі скінченною кількістю елементів $\{\overline{Q_\lambda}\}$.

За означенням $\mathbb{R}^2 = \Psi(T \setminus V_0) \cup \bigcup_\lambda Q_\lambda$.

Припустимо, $z \in Q_\mu$ для якогось $\mu \in \Lambda$. Внаслідок того, що всі Q_λ відкриті і попарно не перетинаються, справджується рівність $Q_\mu \cap \overline{Q_\lambda} = \varnothing$ і окіл $U_z = Q_\mu$ відповідає даним вимогам.

Нехай $z \in \Psi(T \setminus V_0)$. Тоді існує $i \in \{1,\ldots,n\}$, для якого $z \in \Psi(T_i \setminus V_0)$. Як і при доведенні твердження 2, зазначимо, що точка z відділена від замкненої множини R_i (див. (5)). Тому існує такий її окіл $\tilde{U}$, що $\tilde{U} \cap \Psi(T \setminus V_0) = \tilde{U} \cap \Psi(T_i \setminus V_0)$.

Розглянемо плоске відображення $\Psi_i = \Psi|_{T_i\setminus V_0}\colon T_i \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$. Нехай U_z є околом точки z, який відповідає лемі 1 з [1] відносно Ψ_i. Зауважимо, що його можна вибрати як завгодно малим, тому можемо вважати, що $U_z \subset \tilde{U}$.

Позначимо $\Delta_z = \{\lambda \in \Lambda_i \mid \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap U_z \neq \varnothing\}$.

Лема 1 [1] і твердження 7 [1] стверджують, що окіл U_z гомеоморфний одиничному диску, розділеному на сектори скінченною кількістю променів, які з'єднують образ точки z з його межею. Образом дерева T в диску є об'єднання цих променів, а образами множин $Q_\mu^{(i)}$, $\mu \in \Delta_z$, є сектори, причому образом кожної множини $Q_\mu^{(i)}$ є рівно один сектор.

З викладеного випливають такі наслідки:

$z \in \overline{Q_\mu^{(i)}}$, $\mu \in \Delta_z$;

є принаймні два індекси $\lambda, \mu \in \Delta_z$, для яких образи компонент $Q_\lambda^{(i)}$ і $Q_\mu^{(i)}$ є сусідніми секторами в диску, отже, області $Q_\lambda^{(i)}$ і $Q_\mu^{(i)}$ є суміжними (див. означення 7 і твердження 6 з [1]);

якщо $z \in \Psi_i(T_i \backslash V) = \Psi(T_i \backslash V)$, то число секторів і променів дорівнює 2, тобто $\Delta_z = \{\lambda, \mu\}$ і $U_z \subset Q_\lambda^{(i)} \cup Q_\mu^{(i)} \cup (\overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \overline{Q_\mu^{(i)}})$.

Внаслідок вибору околу $\tilde{U}$ з нерівності $\overline{Q_\mu} \cap U_z \neq \varnothing$ випливає, що $\mu \in \Lambda_i$. Тоді твердження 2 і наслідок 2 гарантують, що $\overline{Q_\mu} \cap U_z = \overline{Q_\mu^{(i)}} \cap U_z$.

Зокрема, $z \in U_z \subset \bigcup_{\lambda \in \Delta_z} \overline{Q_\lambda}$. З означення сім'ї $\{Q_\lambda\}$ і з попереднього співвідношення випливає, що $U_z \cap \overline{Q_\mu} = \varnothing$ для кожного $\mu \notin \Delta_z$. Внаслідок цього сім'я $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ утворює локально скінченне замкнене покриття площини.

З урахуванням викладеного вище наслідок 4 гарантує наступне:

$z \in \overline{Q_\mu}$, $\mu \in \Delta_z$;

є принаймні два індекси $\lambda, \mu \in \Delta_z$, для яких області Q_λ і Q_μ є суміжними;

якщо $z \in \Psi(T \setminus V)$, то $\Delta_z = \{\lambda, \mu\}$ і $U_z \subset (\overline{Q_\lambda} \cup \overline{Q_\mu})$.

Твердження 4 доведено.

Введемо наступні поняття (див. [7]).

Відкритою кривою A назвемо гомеоморфний образ інтервалу $(0, 1)$ в $\mathbb{R}^2$. Нехай множина A є образом вкладення $\alpha\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ і A *прямує до нескінченності в обох напрямках*, тобто $|\alpha(t)| \to \infty$ як при $t \to 0$, так і при $t \to 1$. Тоді за теоремою Жордана про криву (див. [4]) доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus A$ має дві компоненти зв'язності. Позначимо їх $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}^*$.

Теорема 3 [7]. *Нехай* A_i, $i = 1, \ldots, n$, *є відкритими кривими, що не перетинаються і прямують до нескінченності в обох напрямках. Нехай* $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \varnothing$ *для всіх* $i \neq j$ *при належному виборі* $\mathcal{D}(A_i)$ *і* $\mathcal{D}^*(A_i)$.

Тоді множину

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(A_i)} = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}(A_i)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

можна гомеоморфно відобразити зі збереженням орієнтації на об'єднання внутрішності одиничного диска в $\mathbb{R}^2$ *і* n *відкритих дуг* $A_1', \ldots, A_n'$, *що лежать на його межі і не перетинаються. При цьому дуга* A_i' *буде образом відкритої кривої* A_i.

Нехай $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$ — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$ і $\lambda \in \Lambda_i$. Тоді $A_i = \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \neq \varnothing$. Згідно з наслідком 2 $A_i = \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_0) \neq \varnothing$. З леми 2 [1] випливає, що A_i є відкритою кривою і прямує до нескінченності в обох напрямках. Отже, A_i ділить $\mathbb{R}^2$ на дві компоненти зв'язності. Позначимо через $\mathcal{D}(A_i)$ ту з них, яка містить Q_λ, а через $\mathcal{D}^*(A_i)$ — іншу.

Позначимо $J(\lambda) = \big\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda \in \Lambda_i\big\}$. Зрозуміло, що $J(\lambda) \neq \varnothing$.

Перевіримо, що $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \varnothing$ для кожної пари індексів $i, j \in J(\lambda)$, $i \neq j$.

Множини A_i та A_j зв'язні і не перетинаються. Тому $(A_j \subset \mathcal{D}(A_i)) \vee (A_j \subset \mathcal{D}^*(A_i))$. Якщо $A_j \subset \mathcal{D}^*(A_i)$, то $\mathcal{D}^*(A_i) \cap Q_\lambda \neq \varnothing$, тому що множина $\mathcal{D}^*(A_i)$ відкрита і $A_j = \operatorname{Fr} Q_\lambda$. А це неможливо, тому що $\varnothing \neq Q_\lambda \subset \mathcal{D}(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)$.

Отже, $A_j \subset \mathcal{D}(A_i)$. Внаслідок цього $\mathcal{D}^*(A_j) \cap \mathcal{D}(A_i) \neq \varnothing$, тому що множина $\mathcal{D}(A_i)$ відкрита і за побудовою $A_j = \operatorname{Fr} \mathcal{D}^*(A_j)$.

Аналогічно, $A_i \subset \mathcal{D}(A_j)$ і $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j) \neq \varnothing$.

Очевидно, $\mathcal{D}^*(A_i) = (\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j)) \cup (\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)) \cup (\mathcal{D}^*(A_i) \cap A_j)$. Якщо ми припустимо, що $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) \neq \varnothing$, то також повинна виконуватись нерівність $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \cap A_j \neq \varnothing$. Дійсно, в цьому випадку маємо непорожні відкриті множини $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j)$ і

$\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)$, що не перетинаються. Їх об'єднання не може збігатися зі зв'язною множиною $\mathcal{D}^*(A_i)$.

Отже, $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \varnothing$ для кожної пари індексів $i, j \in J(\lambda)$, $i \neq j$.

Внаслідок викладеного множини A_i, $i \in J(\lambda)$, відповідають умовам теореми 3.

З наслідку 2 випливає, що

$$\overline{\bigcap_{i \in J(\lambda)} \mathcal{D}(A_i)} = \left(\bigcap_{i \in J(\lambda)} \mathcal{D}(A_i) \right) \cup \bigcup_{i \in J(\lambda)} A_i = Q_\lambda \cup \bigcup_{i \in J(\lambda)} A_i = \overline{Q_\lambda}.$$

Отже, існує гомеоморфізм h_λ множини $\overline{Q_\lambda}$ на об'єднання внутрішності одиничного диска в $\mathbb{R}^2$ і відкритих дуг A'_i, $i \in J(\lambda)$, що лежать на його межі і не перетинаються. При цьому $A'_i = h_\lambda(A_i)$, $i \in J(\lambda)$.

Очевидно, ми можемо замість стандартного одиничного диска взяти $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ і вважати, що $\hat{D} = h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) \subset D'$, $h_\lambda(Q_\lambda) = \operatorname{Int} D$, $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) \cap \operatorname{Fr} D = \bigcup_{i \in J(\lambda)} h_\lambda(A_i) = \bigcup_{i \in J(\lambda)} A'_i$.

Скористаємося наслідком 5 і зафіксуємо неперервну функцію $g_\lambda \colon \hat{D} \to \mathbb{R}$, яка відповідає умовам (i) – (iii).

Нехай $f_\lambda \colon \overline{Q_\lambda} \to \mathbb{R}$, $f_\lambda(z) = \operatorname{Sign}(\lambda) \cdot g_\lambda \circ h_\lambda(z)$, $z \in \overline{Q_\lambda}$.

З умов (i) – (iii) наслідку 5 випливає, що f_λ має такі властивості:

$\operatorname{Fr} Q_\lambda = f_\lambda^{-1}(0)$;

відображення $f_\lambda|_{Q_\lambda} \colon Q_\lambda \to \mathbb{R}$ відкрите;

сім'я $\{L^\lambda_c\}_{c \in f_\lambda(\overline{Q_\lambda})}$ множин рівня функції f_λ одностайно локально зв'язна на $\overline{Q_\lambda}$.

Побудуємо функцію $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$f(z) = f_\lambda(z), \quad \text{якщо} \quad z \in \overline{Q_\lambda}.$$

За означенням відкриті множини Q_λ і Q_μ не перетинаються при $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Внаслідок цього $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} = \operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$. Отже, якщо $z \in \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$, $\lambda \neq \mu$, то $z \in \operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ і $f_\lambda(z) = f_\mu(z) = 0$, тобто функцію f означено коректно.

З твердження 4 випливає, що сім'я $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ утворює замкнене локально скінченне покриття площини. За означенням функція $f|_{\overline{Q_\lambda}} = f_\lambda \colon \overline{Q_\lambda} \to \mathbb{R}$ неперервна для кожного $\lambda \in \Lambda$, тому функція $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є неперервною (див. [8]).

Твердження 5. *Сім'я $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ відкритих зв'язних підмножин площини і функція f задовольняють умови леми* 3.

Доведення. Множина Λ зліченна, тому що простір $\mathbb{R}^2$ має зліченну базу топології і $Q_\lambda \cap Q_\mu = \varnothing$ при $\lambda \neq \mu$ за означенням.

Очевидно, сім'я $\{Q_\lambda\}$ відповідає умові 1. Умова 2 є наслідком твердження 4. Умова 3 випливає з наслідку 2. Умови 4, 5 і 7 справедливі за побудовою функції f. Умова 6 є наслідком твердження 4 і леми 2.

Твердження 6. *Якщо $z \in \Psi(T \setminus V)$, то сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна в точці z.*

Доведення. Це безпосередній наслідок леми 3 і твердження 4.

Твердження 7. *Функція f є псевдогармонічною.*

Доведення. З означення 3 і твердження 5 з [1] випливає, що образи вершин графа T під дією відображення Ψ утворюють дискретну підмножину E площини.

Тому функція f задовольняє умови 1 – 3 теореми 2 внаслідок тверджень 5 і 6.

Література

1. *Полулях Є. О.* Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 7. – С. 974 – 995.
2. *Morse M.* Topological methods in the theory of functions of a complex variable. – Princeton, 1947. – 145 p.
3. *Polulyakh E., Yurchuk I.* On the pseudo-harmonic functions defined on a disk // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **80**. – 151 с.
4. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964. – 214 p.
5. *Tôki Y.* A topological characterization of pseudo-harmonic functions // Osaka Math. J. – 1951. – **3**, № 1. – P. 101 – 122.
6. *Зорич В. А.* Математический анализ: В 2 т. – М.: МЦНМО, 2002. – Т. 1. – 664 с.
7. *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane. I // Duke Math. J. – 1940. – **7**. – P. 154 – 185.
8. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.

Одержано 21.01.15