

І. В. Потапенко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЗВ'ЯЗОК МІЖ НОРМОВАНИМИ ТЕНЗОРАМИ ДВОХ РЕГУЛЯРНИХ СІТОК НА ПОВЕРХНІ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРИ E_3

We establish the relationship between the normalized tensors of two regular networks on the surfaces in the Euclidean space E_3 .

Установлена зависимость между нормированными тензорами двух регулярных сетей на поверхности в евклидовом пространстве E_3 .

Основи теорії сіток у тензорній формі було введено Я. С. Дубновим та викладено в монографії В. Ф. Кагана [1, с. 366 – 370]. Оскільки на будь-якій регулярній поверхні можна ввести довільну кількість різноманітних за своїми властивостями сіток, то виникає потреба зв'язати нормовані тензори двох довільно взятих сіток. Саме цьому питанню і присвячено дану статтю. Окремо виділено, як наслідок, зв'язок між нормованими тензорами двох регулярних сіток на поверхні зі сталим сітковим кутом між координатними лініями.

Наведемо основні поняття, які будемо використовувати в даній роботі. Під однопараметричною сім'єю кривих на поверхні, що віднесена до координат x^1 , x^2 , будемо називати сукупність кривих, які задаються рівнянням

$$f(x^1, x^2, c) = 0, \quad (1)$$

де параметр c набуває довільних значень у деякому інтервалі.

Означення 1. *Однопараметрична сім'я ліній на поверхні називається регулярною в деякій області, якщо в цій області через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна лінія сім'ї.*

Віднесемо кожну криву регулярної однопараметричної сім'ї до натурального параметра s , для довільної точки (x^1, x^2) похідні $\frac{dx^1}{ds}$, $\frac{dx^2}{ds}$ по кривій, що проходить через цю точку, є однозначними функціями від x^1 , x^2 :

$$\frac{dx^1}{ds} = \lambda^1(x^1, x^2), \quad \frac{dx^2}{ds} = \lambda^2(x^1, x^2). \quad (2)$$

Рівняння (2) називаються диференціальними рівняннями регулярної сім'ї ліній на поверхні. Зауважимо, що функції λ^1 , λ^2 є компонентами контраваріантного тензора типу $(0, 1)$ — одиничного вектора, дотичного до кривої сім'ї, що проходить через точку (x^1, x^2) , оскільки вони задовольняють в області регулярності співвідношення

$$g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = 1. \quad (3)$$

Таким чином, регулярна однопараметрична сім'я ліній на поверхні визначається полем одиничного вектора (λ^1, λ^2) або тензором типу $(0, 1)$. Позначаючи через $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ поле одинич-

ного вектора сім'ї ліній у регулярній області, будемо говорити, що воно повністю визначає регулярну однопараметричну сім'ю кривих на поверхні через диференціальне рівняння (2).

Означення 2. Дві різні однопараметричні сім'ї кривих, що є регулярними у спільній області, утворюють на поверхні регулярну сітку, якщо: 1) через кожну точку області сітки проходять дві криві, що належать різним сім'ям; 2) лінії з різних сімей у жодній точці не мають спільної дотичної.

Зауважимо, що В. Ф. Каган [1] використовував термін „регулярна область сітки”.

Нехай $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ та $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють сітку. Диференціальні рівняння двох утворюючих сімей будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{ds^1} &= \lambda^1(x^1, x^2), & \frac{dx^2}{ds^1} &= \lambda^2(x^1, x^2), \\ \frac{dx^1}{ds^2} &= \mu^1(x^1, x^2), & \frac{dx^2}{ds^2} &= \mu^2(x^1, x^2), \end{aligned} \quad (4)$$

де ds^1 , ds^2 — довжини дуг першої та другої складових сімей. Виключаючи ds^1 , ds^2 з (4), маємо

$$\left(\frac{dx^1}{dx^2} - \frac{\lambda^1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{dx^1}{dx^2} - \frac{\mu^1}{\mu^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) запишемо у вигляді

$$\lambda^2 \mu^2 (dx^1)^2 - (\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1) dx^1 dx^2 + \lambda^1 \mu^1 (dx^2)^2 = 0. \quad (6)$$

Оскільки рівняння (6) визначає обидві сім'ї сітки, то його можна розглядати як диференціальне рівняння сітки.

Запишемо рівняння (6) у тензорному вигляді. Для цього розглянемо контраваріантний тензор другої валентності:

$$\lambda^i \mu^j. \quad (7)$$

Виконуючи симетрування (7) з діленням на інваріантний скаляр $\frac{1}{2} \sin \omega$, де $\omega(x^1, x^2)$ — сітковий кут, що змінюється в межах від 0 до π , отримуємо контраваріантний тензор з матрицею компонент:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\lambda^1 \mu^1}{\sin \omega} & \frac{\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1}{\sin \omega} \\ \frac{\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1}{\sin \omega} & \frac{2\lambda^2 \mu^2}{\sin \omega} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Оскільки напрямні вектори однопараметричних сімей $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ та $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — орти, то мають місце співвідношення

$$g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = \cos \omega, \quad (9)$$

$$\lambda^1 \mu^2 - \lambda^2 \mu^1 = \frac{\sin \omega}{\sqrt{g}}. \quad (10)$$

Використовуючи дискримінантний тензор поверхні c^{ij} , (10) записуємо у вигляді

$$\lambda^i \mu^j - \lambda^j \mu^i = c^{ij} \sin \omega. \quad (11)$$

Дискримінант матриці (8) дорівнює $-\frac{1}{g}$.

Для регулярної сітки зведені мінори матриці (8) утворюють симетричний тензор другої валентності $\overset{\circ}{\phi}_{ij}$ з компонентами

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{2\lambda^2 \mu^2 g}{\sin \omega} & \frac{(\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1)g}{\sin \omega} \\ \frac{(\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1)g}{\sin \omega} & -\frac{2\lambda^1 \mu^1 g}{\sin \omega} \end{array} \right). \quad (12)$$

В індексному позначенні матимемо

$$\overset{\circ}{\phi}_{ij} = -\frac{c_{i\alpha} c_{j\beta} (\lambda^\alpha \mu^\beta + \lambda^\beta \mu^\alpha)}{\sin \omega}. \quad (13)$$

Тензор (13), уведений Я. С. Дубновим [1, с. 341], називається нормованим тензором сітки, відіграє ключову роль в теорії регулярних сіток і є основним об'єктом дослідження в даній роботі.

Використовуючи тензор сітки (13), диференціальне рівняння сітки (6) записуємо у вигляді

$$\overset{\circ}{\phi}_{ij} dx^i dx^j = 0. \quad (14)$$

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. Нехай $\bar{l}_1(\lambda^1, \lambda^2)$, $\bar{m}_1(\mu^1, \mu^2)$ та $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$, $\bar{m}_2(\tilde{\mu}^1, \tilde{\mu}^2)$ — напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні сітки на заданій поверхні з сітковими кутами $\omega_1(x^1, x^2)$, $\omega_2(x^1, x^2)$, репери (\bar{l}_1, \bar{m}_1) , (\bar{l}_2, \bar{m}_2) орієнтовані в додатному напрямі та $\overset{\circ}{\phi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\psi}_{ij}$ — нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Psi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin(\alpha + \beta) & \sin \alpha \sin \beta \\ \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & -\frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta & \sin(\alpha + \beta) & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Phi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{22} \end{pmatrix} + \sqrt{g} \sin(\beta - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

де $\alpha(x^1, x^2)$, $\beta(x^1, x^2)$ — кути між векторами \bar{l}_1 , \bar{l}_2 та \bar{m}_1 , \bar{m}_2 відповідно, що відкладаються в додатному напрямі.

Доведення. Позначимо через $\alpha(x^1, x^2)$ кут між векторами \bar{l}_1 , \bar{l}_2 , тоді кут між векторами \bar{m}_1 , \bar{m}_2 буде дорівнювати $\alpha(x^1, x^2) + \Delta\omega(x^1, x^2) = \beta(x^1, x^2)$, де $\Delta\omega(x^1, x^2) = \omega_2(x^1, x^2) - \omega_1(x^1, x^2)$ — приріст сіткового кута при переході від першої регулярної сітки до другої з сітковими кутами $\omega_1(x^1, x^2)$, $\omega_2(x^1, x^2)$ відповідно, всі кути відкладаються в додатному напрямі.

Оскільки вектори-орти \bar{l}_2 , \bar{m}_2 є результатами повороту одиничних векторів \bar{l}_1 , \bar{m}_1 у кожній точці дотичної площини на кути $\alpha(x^1, x^2)$ та $\beta(x^1, x^2)$ відповідно, то мають місце такі формули зв'язку між координатами цих векторів [1, с. 345]:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^1 &= \lambda^1 \cos \alpha - \lambda^2 \sin \alpha, & \tilde{\lambda}^2 &= \lambda^1 \sin \alpha + \lambda^2 \cos \alpha, \\ \tilde{\mu}^1 &= \mu^1 \cos \beta - \mu^2 \sin \beta, & \tilde{\mu}^2 &= \mu^1 \sin \beta + \mu^2 \cos \beta. \end{aligned}$$

Використовуючи формули [1, с. 341]

$$\begin{aligned} \lambda^1 \mu^1 &= -\frac{\sin \omega_1}{2g} \overset{\circ}{\Phi}_{22}, & \lambda^1 \mu^2 &= \frac{\sin \omega_1}{2g} (\overset{\circ}{\Phi}_{12} + \sqrt{g}), \\ \lambda^2 \mu^1 &= \frac{\sin \omega_1}{2g} (\overset{\circ}{\Phi}_{12} - \sqrt{g}), & \lambda^2 \mu^2 &= -\frac{\sin \omega_1}{2g} \overset{\circ}{\Phi}_{11}, \end{aligned}$$

маємо

$$\overset{\circ}{\Psi}_{11} = -\frac{2g \tilde{\lambda}^2 \tilde{\mu}^2}{\sin \omega_2} = -\frac{2g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \sin \alpha + \lambda^2 \cos \alpha)(\mu^1 \sin \beta + \mu^2 \cos \beta) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \mu^1 \sin \alpha \sin \beta + \lambda^1 \mu^2 \sin \alpha \cos \beta + \\
&\quad + \lambda^2 \mu^1 \cos \alpha \sin \beta + \lambda^2 \mu^2 \cos \alpha \cos \beta) = \\
&= -\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \left(-\overset{\circ}{\varphi}_{22} \sin \alpha \sin \beta + \left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} + \sqrt{g} \right) \sin \alpha \cos \beta + \right. \\
&\quad \left. + \left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} - \sqrt{g} \right) \cos \alpha \sin \beta - \overset{\circ}{\varphi}_{11} \cos \alpha \cos \beta \right) = \\
&= \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \left(\overset{\circ}{\varphi}_{11} \cos \alpha \cos \beta - \overset{\circ}{\varphi}_{12} \sin(\alpha + \beta) \right) + \\
&\quad + \overset{\circ}{\varphi}_{22} \sin \alpha \sin \beta + \sqrt{g} \sin(\beta - \alpha), \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Psi}_{12} &= \frac{g(\tilde{\lambda}^1 \tilde{\mu}^2 + \tilde{\lambda}^2 \tilde{\mu}^1)}{\sin \omega_2} = \frac{g}{\sin \omega_2} ((\lambda^1 \cos \alpha - \lambda^2 \sin \alpha)(\mu^1 \sin \beta + \mu^2 \cos \beta) + \\
&\quad + (\lambda^1 \sin \alpha + \lambda^2 \cos \alpha)(\mu^1 \cos \beta - \mu^2 \sin \beta)) = \\
&= \frac{g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \mu^1 \cos \alpha \sin \beta + \lambda^1 \mu^2 \cos \alpha \cos \beta - \lambda^2 \mu^1 \sin \alpha \sin \beta - \\
&\quad - \lambda^2 \mu^2 \sin \alpha \cos \beta + \lambda^1 \mu^1 \sin \alpha \cos \beta - \lambda^1 \mu^2 \sin \alpha \sin \beta + \\
&\quad + \lambda^2 \mu^1 \cos \alpha \cos \beta - \lambda^2 \mu^2 \cos \alpha \sin \beta) = \\
&= \frac{g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \mu^1 \sin(\alpha + \beta) - \lambda^2 \mu^2 \sin(\alpha + \beta) + (\lambda^1 \mu^2 + \lambda^2 \mu^1) \cos(\alpha + \beta)) = \\
&= \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \left(\overset{\circ}{\varphi}_{11} \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \overset{\circ}{\varphi}_{12} \cos(\alpha + \beta) - \overset{\circ}{\varphi}_{22} \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Psi}_{22} &= -\frac{2g\tilde{\lambda}^1 \tilde{\mu}^1}{\sin \omega_2} = -\frac{2g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \cos \alpha - \lambda^2 \sin \alpha)(\mu^1 \cos \beta - \mu^2 \sin \beta) = \\
&= -\frac{2g}{\sin \omega_2} (\lambda^1 \mu^1 \cos \alpha \cos \beta - \lambda^1 \mu^2 \cos \alpha \sin \beta - \\
&\quad - \lambda^2 \mu^1 \sin \alpha \cos \beta + \lambda^2 \mu^2 \sin \alpha \sin \beta) = \\
&= -\frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \left(-\overset{\circ}{\varphi}_{22} \cos \alpha \cos \beta - \left(\overset{\circ}{\varphi}_{12} + \sqrt{g} \right) \cos \alpha \sin \beta - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\overset{\circ}{\Phi}_{12} - \sqrt{g} \right) \sin \alpha \cos \beta - \overset{\circ}{\Phi}_{11} \sin \alpha \sin \beta \Big) = \\
& = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \left(\overset{\circ}{\Phi}_{11} \sin \alpha \sin \beta + \overset{\circ}{\Phi}_{12} \sin(\alpha + \beta) + \overset{\circ}{\Phi}_{22} \cos \alpha \cos \beta + \sqrt{g} \sin(\beta - \alpha) \right). \quad (18)
\end{aligned}$$

З (16)–(18) випливає (15).

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $\bar{l}_1(\lambda^1, \lambda^2)$, $\bar{m}_1(\mu^1, \mu^2)$ та $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$, $\bar{m}_2(\tilde{\mu}^1, \tilde{\mu}^2)$ — напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні сітки на заданій поверхні з однаковими сітковими кутами $\omega_1(x^1, x^2) = \omega_2(x^1, x^2)$, репери (\bar{l}_1, \bar{m}_1) , (\bar{l}_2, \bar{m}_2) орієнтовані в додатному напрямі та $\overset{\circ}{\Phi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\Psi}_{ij}$ — нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Psi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -\sin(2\alpha) & \sin^2 \alpha \\ \frac{1}{2} \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) & -\frac{1}{2} \sin(2\alpha) \\ \sin^2 \alpha & \sin(2\alpha) & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Phi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{22} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

де $\alpha(x^1, x^2)$ — кут між векторами \bar{l}_1 , \bar{l}_2 .

Доведення випливає з (15) та умови $\omega_1(x^1, x^2) = \omega_2(x^1, x^2)$, $\Delta\omega = \beta(x^1, x^2) - \alpha(x^1, x^2) = 0$. Тобто $\beta(x^1, x^2) = \alpha(x^1, x^2)$.

Наслідок 1 доведено.

Як приклад, що ілюструє останній наслідок, розглянемо дві відомі регулярні ортогональні сітки ліній на поверхні, а саме сітку ліній кривини [1, с. 363, 364] та LGT-сітку [2].

Лінії, вздовж яких геодезичний скрут досягає екстремального значення, було введено в [3, с. 353, 354]. Вони завжди існують в будь-якій не омбілічній точці поверхні. Дотичні вектори цих ліній утворюють кути $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ з відповідними лініями кривини в даній точці поверхні та ортогональну сітку, яку будемо називати, використовуючи термінологію [2], LGT-сіткою.

Наслідок 2. Нехай $\bar{l}_1(\lambda^1, \lambda^2)$, $\bar{m}_1(\mu^1, \mu^2)$ та $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$, $\bar{m}_2(\tilde{\mu}^1, \tilde{\mu}^2)$ — напрямні вектори однопараметричних сімей, що утворюють дві регулярні ортогональні сітки на заданій поверхні, а саме сітку ліній кривини і LGT-сітку, репери (\bar{l}_1, \bar{m}_1) , (\bar{l}_2, \bar{m}_2) орієнтовані в додатному напрямі та $\overset{\circ}{\Phi}_{ij}$, $\overset{\circ}{\Psi}_{ij}$ — нормовані тензори цих сіток відповідно. Тоді дані тензори зв'язані між собою співвідношенням

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Psi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Psi}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Phi}_{11} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{12} \\ \overset{\circ}{\Phi}_{22} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Доведення. Для доведення (20) скористаємося співвідношенням (19), підставляючи замість $\alpha(x^1, x^2)$ значення $\frac{\pi}{4}$, оскільки при переході від сітки ліній кривини до LGT-сітки напрям вектора $\bar{l}_2(\tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2)$ можна вибрати так, щоб кут $\alpha(x^1, x^2)$ був гострим, а отже, згідно з [3, с. 353, 354], саме $\frac{\pi}{4}$.

Наслідок 2 доведено.

Різноманіття сіток на поверхні вражає. Найбільш відомі чебишовська, геодезична, асимптотична, сітка ліній кривини, ізотермічна та інші. Саме наявність на поверхні певного типу сітки характеризує тип самої поверхні.

Отриманий у даній роботі результат дозволяє за допомогою формул (15) переходити від однієї регулярної сітки поверхні до іншої через нормований тензор сітки (13), використовуючи диференціальне рівняння (14).

Література

1. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть вторая. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 408 с.
2. Бескорвайная Л. Л., Ваишанова Т. Ю. LGT-сеть и ее свойства // Вестн. Киев. нац. ун-та им. Т. Шевченко. Сер. физ.-мат. науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 7 – 12.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

Одержано 01.04.15