

РОБАСТНЫЙ ПОЗИЦИОННЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

The paper deals with the problems of global and local robust feedback synthesis of bounded control for a system with unknown bounded perturbation. Our approach is based on the method of controllability function proposed by V. I. Korobov. The ranges of perturbations are found from the condition that the total derivative of the controllability function with respect to the perturbed system must be negative. We determine the largest segment of variation of the perturbation and construct a positional control that steers an arbitrary initial point to the origin within a finite period of time. The length of this period is estimated both from below and from above. A two-dimensional system is considered as an example.

Розглянуто задачі глобального і локального робастного позиційного синтезу обмеженого керування системою з невідомим обмеженим збуренням. Розв'язок базується на методі функції керованості В. І. Коробова. Межі зміни збурення знаходяться з умови, щоб повна похідна функції керованості в силу збуреної системи була від'ємною. У роботі знайдено найширший відрізок зміни меж збурення та побудовано керування, яке переводить довільну початкову точку у початок координат за скінченний час, на який отримано оцінки зверху та знизу. Як приклад розглянуто двовимірну систему.

1. Введение. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x + b_0u, \quad (1)$$

где $t \geq 0$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, Q — некоторая окрестность начала координат, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$, A_0 — матрица, элементы главной наддиагонали которой равны 1, а остальные элементы нулевые, b_0 — вектор, у которого последний элемент равен 1, а остальные элементы нулевые,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ r_{n-21} & r_{n-22} & r_{n-23} & r_{n-24} & \dots & r_{n-2n-1} & 0 \\ r_{n-11} & r_{n-12} & r_{n-13} & r_{n-14} & \dots & r_{n-1n-1} & r_{n-1n} \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & \dots & r_{nn-1} & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

r_{ij} — некоторые заданные числа, $1 \leq j \leq i + 1$, $1 \leq i, j \leq n$. Будем считать, что функция $p(t, x)$ неизвестна, тогда такие системы называют робастными (см., например [1; 2, с. 173]). Возмущения матрицы A_0 вида $A_0 + pR$ в [2, с. 176] называются аффинными. Будем считать, что $p(t, x)$ удовлетворяет заданному ограничению $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$. Требуется построить ограниченное управление, переводящее произвольную начальную точку $x_0 \in Q$ в начало координат за конечное время при любом возмущении $p(t, x)$, удовлетворяющем ограничению $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$.

Классическим примером такой постановки задачи является управление движением тележки по поверхности с неизвестным ограниченным трением. Движение этой системы описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 + u.$$

Слагаемое $p(t, x_1, x_2)x_2$ — сила трения.

При решении задач оптимального управления, т. е. при нахождении экстремума функционала, управление ищут либо в виде $u = u(t)$ (программное управление), либо в виде функции от фазовых координат $u = u(x)$ (синтезирующее управление). Под задачей оптимального быстрогодействия понимается задача нахождения программного управления, переводящего заданную точку в заданную за минимальное время. Конкретные примеры решения линейных задач оптимального быстрогодействия приведены в книге [3]. В общем случае линейная задача оптимального быстрогодействия решена В. И. Коробовым и Г. М. Скларом в работе [4] на основании введения понятия min-проблемы моментов Маркова. В работе [5] приведен общий подход к решению задачи синтеза допустимых управлений, т. е. нахождения управления, переводящего произвольную начальную точку в начало координат за конечное время. В работе [6] для системы $\dot{x} = Ax + b(u + v)$, $|u| \leq d$, $|v| \leq \gamma < d$ было построено не зависящее от возмущения v ограниченное управление $u = u(x)$, решающее задачу синтеза. В отличие от настоящей работы, в работе [6] использована техника дифференциальных включений. Задача позиционного синтеза в постановке, близкой к приведенной в настоящей работе, рассматривалась в [7, 8]. В работе [9] применен метод Ляпунова для стабилизации за конечное время системы $\dot{x} = A_0x + b_0u + d(t, x)$, где $d(t, x)$ удовлетворяет некоторому ограничению, заданному в неявной форме. В этой работе используется метод функции управляемости и условия стабилизации за конечное время сформулированы на языке линейных матричных неравенств.

В последнее время идея синтеза за конечное время рассматривается в разных формулировках [9–13]. В работе [12] изучаются треугольные системы, являющиеся частным случаем предложенных систем из [14]. Отметим, что в отличие от работ [11, 12] применение метода функции управляемости позволяет построить управление, удовлетворяющее заранее заданным ограничениям, и получить оценку на время попадания. В [2, с. 201] решается задача робастной стабилизации систем с аффинными постоянными возмущениями.

2. Постановка задачи. Вначале опишем условия, которым должно удовлетворять возмущение $p(t, x)$.

Определение 1. Множеством допустимых возмущений \mathcal{P}_{d_1, d_2} называется множество таких функций $p(t, x): [0, +\infty) \times Q \rightarrow \mathbb{R}$, что выполняются следующие условия:

- 1) $p(t, x)$ непрерывна по t и x ;
- 2) в каждой области $K_1(\rho_2) = \{(t, x) : 0 \leq t < +\infty, \|x\| \leq \rho_2\}$ функция $p(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица $|p(t, x'') - p(t, x')| \leq \ell_1(\rho_2)\|x'' - x'\|$ (где $\ell_1(\rho_2)$ зависит от функции p);
- 3) $d_1 \leq p(t, x) \leq d_2$ для всех $(t, x) \in [0, +\infty) \times Q$.

При $p(t, x) \equiv 0$ система (1) называется канонической: $\dot{x} = A_0x + b_0u$. В рассматриваемом нами подходе она занимает центральное место, так как решение задачи синтеза для произвольной линейной системы с одномерным управлением может быть сведено к решению задачи синтеза для канонической системы [10, с. 42].

При $p(t, x) \equiv 0$ система (1) является полностью управляемой. В работе [15] дано управление $u(x)$, решающее задачу синтеза для канонической системы (точное определение задачи синтеза будет дано ниже). Наша цель — для заданных r_{ij} найти такие $d_1 < 0$ и $d_2 > 0$, при которых

значение $d_2 - d_1 \rightarrow \max$, и при этом для всех возмущений $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$ траектория $x(t)$ замкнутой системы с управлением $u = u(x)$

$$\dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x + b_0u(x), \quad (3)$$

выходящая из произвольной начальной точки $x_0 \in Q$, заканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0, p(t, x))$, т. е. $\lim_{t \rightarrow T(x_0, p(t, x))} x(t) = 0$. Эту задачу будем называть (d_1, d_2) -локальным робастным позиционным синтезом ограниченного управления (или робастной стабилизацией за конечное время). Если $Q = \mathbb{R}^n$, то задачу будем называть (d_1, d_2) -глобальным робастным позиционным синтезом. Заметим, что при $r_{11} = 0$ в системе (1) первая координата неуправляема (при $r_{12} p(t, x) \equiv -1$), т. е. не при всех d_1 и d_2 задача разрешима.

Опишем кратко структуру статьи. В п. 3 приведены результаты применения метода функции управляемости. Основные результаты работы содержатся в п. 4. В п. 5 в качестве модельного примера использована двумерная система.

3. Метод функции управляемости. В этом пункте мы напомним основные понятия и результаты применения метода функции управляемости [5, 10]. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4)$$

где $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$, причем Ω таково, что $0 \in \text{int } \Omega$, $f(0, 0) = 0$.

Определение 2. Под локальным позиционным синтезом ограниченного управления будем понимать нахождение такого управления $u = u(x)$, $x \in Q$, что: 1) $u(x) \in \Omega$; 2) траектория $x(t)$ замкнутой системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (5)$$

выходящая из произвольной начальной точки $x_0 \in Q$, заканчивается в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$.

Достаточные условия разрешимости задачи синтеза для системы (4) сформулированы в [10, с. 14].

Замечание 1. Отметим трудности решения этой задачи.

1. Поскольку через конечную точку проходит бесконечное число траекторий и время движения по каждой траектории в эту точку конечно, в силу теоремы о единственности решения правая часть уравнения (5) не может удовлетворять условию Липшица в рассматриваемой окрестности.

2. Управление удовлетворяет заранее заданным ограничениям.

Для решения задачи позиционного синтеза в 1979 г. В. И. Коробовым был предложен метод функции управляемости [5], развитый в работах [6, 7, 15, 16]. Приложение метода функции управляемости к задачам управления хаосом можно найти в работе [17].

Опишем один из возможных подходов к решению задачи глобального позиционного синтеза для канонической системы [10, с. 98; 15]:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = u, \quad (6)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, u — скалярное управление, удовлетворяющее ограничению $|u| \leq 1$. Заметим, что при $p(t, x) \equiv 0$ система (1) совпадает с полностью управляемой системой (6). Обозначим

$$F^{-1} = \int_0^1 (1-t)e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt = \left(\frac{(-1)^{2n-i-j}}{(n-i)!(n-j)!(2n-i-j+1)(2n-i-j+2)} \right)_{i,j=1}^n, \quad (7)$$

$$D(\Theta) = \text{diag} \left(\Theta^{-\frac{2n-2i+1}{2}} \right)_{i=1}^n.$$

В работе [18] указан аналитический метод нахождения элементов f_{ij} матрицы F .

Теорема 1 [10, с. 98; 15]. *Определим функцию управляемости $\Theta = \Theta(x)$ при $x \neq 0$ как единственное положительное решение уравнения*

$$2a_0\Theta = (D(\Theta)FD(\Theta)x, x), \quad (8)$$

где постоянная a_0 выбирается согласно неравенству

$$0 < a_0 \leq \frac{2}{f_{nn}}. \quad (9)$$

При $x = 0$ положим $\Theta(0) = 0$.

Тогда управление вида

$$u(x) = -\frac{1}{2} b_0^* D(\Theta(x)) F D(\Theta(x)) x \quad (10)$$

решает для системы (6) задачу глобального позиционного синтеза непрерывного управления, удовлетворяющего ограничению $|u(x)| \leq 1$. Более того, выполняется равенство вида $\dot{\Theta}(x) = -1$, т. е. функция управляемости является временем движения из произвольной начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат.

Замечание 2. В отличие от функции Ляпунова, которая определяется явно, функция управляемости определяется неявно как решение уравнения (8). Напомним, что время быстрогодействия в задаче линейного быстрогодействия также определяется неявно [4].

4. Основные результаты. Рассмотрим систему (1). Обозначим $y(\Theta, x) = D(\Theta)x$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$2a_0\Theta = (Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)). \quad (11)$$

Обозначим

$$H = \text{diag} \left(-\frac{2n-2i+1}{2} \right)_{i=1}^n,$$

$$F^1 = F - FH - HF = ((2n-i-j+2)f_{ij})_{i,j=1}^n. \quad (12)$$

В случае, когда матрица F^1 положительно определена, уравнение (11) имеет единственное положительное решение $\Theta = \Theta(y)$ [10, с. 24]. Поскольку функция управляемости является временем движения, матрица F^1 положительно определена [10, с. 88]. Пусть постоянная a_0 удовлетворяет неравенству (9). Рассмотрим замкнутую систему (3), где $u(x)$ задается формулой (10). Обозначим через $x(t)$ траекторию системы (3) и найдем производную в силу системы $\dot{\Theta} = \frac{d}{dt}\Theta(x(t))$. Из уравнения (11) имеем

$$2a_0\dot{\Theta} = (F\dot{y}(\Theta, x), y(\Theta, x)) + (Fy(\Theta, x), \dot{y}(\Theta, x)). \quad (13)$$

Найдем $\dot{y}(\Theta, x)$. Имеем $\frac{d}{d\Theta}D(\Theta) = \frac{1}{\Theta}HD(\Theta)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{y}(\Theta, x) &= \dot{D}(\Theta)x + D(\Theta)\dot{x} = \frac{\dot{\Theta}}{\Theta}Hy(\Theta, x) + D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta)y(\Theta, x) + \\ &+ p(t, x)D(\Theta)RD^{-1}(\Theta)y(\Theta, x) - \frac{1}{2}D(\Theta)b_0b_0^*D(\Theta)Fy(\Theta, x). \end{aligned}$$

Обозначим

$$S(\Theta) = \Theta(FD(\Theta)RD^{-1}(\Theta) + D^{-1}(\Theta)R^*D(\Theta)F). \quad (14)$$

В [10, с. 28] доказаны тождества

$$D(\Theta)A_0D^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}A_0, \quad D(\Theta)b_0 = \Theta^{-1/2}b_0, \quad FA_0 + A_0^*F - Fb_0b_0^*F = -F^1,$$

используя которые, из равенства (13) получаем

$$\dot{\Theta} \left(2a_0 - \frac{1}{\Theta}((FH + HF)y(\Theta, x), y(\Theta, x)) \right) = \frac{1}{\Theta} \left((-F^1 + p(t, x)S(\Theta))y(\Theta, x), y(\Theta, x) \right).$$

Принимая во внимание уравнение (11), получаем, что производная функции управляемости в силу системы (3) имеет вид

$$\dot{\Theta} = \frac{\left((-F^1 + p(t, x)S(\Theta))y(\Theta, x), y(\Theta, x) \right)}{\left(F^1y(\Theta, x), y(\Theta, x) \right)}. \quad (15)$$

4.1. Наддиагональные возмущения. Не ограничивая общности, будем считать, что $r_{12} = 1$. Пусть у матрицы R только элементы главной наддиагонали ненулевые. В этом случае система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 + p(t, x))x_2, \\ \dot{x}_i &= (1 + r_{ii+1}p(t, x))x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= u. \end{aligned} \quad (16)$$

В работе [19] рассмотрена задача робастного позиционного синтеза при одном возмущении, т. е. в системе (16) все коэффициенты r_{ii+1} равны нулю. В работе [20] рассмотрен случай системы (16) при симметричном отрезке изменения возмущения, т. е. $d_1 = -d_2$.

Аналогично [10, с. 28] можно установить тождество $D(\Theta)RD^{-1}(\Theta) = \Theta^{-1}R$ (это связано с тем, что матрица R в этом случае имеет такую же структуру, как и A_0). Тогда

$$S(\Theta) = S_0 = FR + R^*F. \quad (17)$$

В дальнейшем мы существенно пользуемся тем, что матрица S не зависит от Θ . В этом случае матрица S_0 имеет вид

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & f_{11} & f_{12}r_{23} & \dots & f_{1n-1}r_{n-1n} \\ f_{11} & 2f_{12} & f_{13} + f_{22}r_{23} & \dots & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1n} \\ f_{12}r_{23} & f_{13} + f_{22}r_{23} & 2f_{23}r_{23} & \dots & f_{2n}r_{23} + f_{3n-1}r_{n-1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1n-1}r_{n-1n} & f_{1n} + f_{2n-1}r_{n-1n} & f_{2n}r_{23} + f_{3n-1}r_{n-1n} & \dots & 2f_{n-1n}r_{n-1n} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: $\sigma(M)$ – спектр матрицы M ; $\lambda_{\min}(M) = \min \{ \lambda : \lambda \in \sigma(M) \}$; $\lambda_{\max}(M) = \max \{ \lambda : \lambda \in \sigma(M) \}$; выражение $M > 0$ ($M < 0$) означает, что матрица M положительно определена (отрицательно определена).

Теорема 2. Пусть $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0)$, $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0)$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$,

$$d_1^0 = \max \{ (1 - \gamma_1)\tilde{d}_1^0; (1 - \gamma_2)\tilde{d}_2^0 \}, \quad d_2^0 = \min \{ (1 - \gamma_1)\tilde{d}_2^0; (1 - \gamma_2)\tilde{d}_1^0 \}. \quad (18)$$

Тогда для всех d_1 и d_2 таких, что $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$, управление, задаваемое формулой (10), решает задачу (d_1, d_2) -глобального робастного позиционного синтеза для системы (16). При этом траектория замкнутой системы (3), выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, заканчивается в точке $x_1(T) = 0$ в некоторый конечный момент времени $T = T(x_0, d_1, d_2)$, для которого выполнена оценка

$$\frac{\Theta(x_0)}{\gamma_2} \leq T(x_0, d_1, d_2) \leq \frac{\Theta(x_0)}{\gamma_1}. \quad (19)$$

Доказательство. Предположим, что $p(t, x) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$, где $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$. Обозначим $y = y(\Theta, x)$. Установим, что $\dot{\Theta}$, определяемое по формуле (15), удовлетворяет неравенству $-\gamma_2 < \dot{\Theta} < -\gamma_1$. Поскольку $F^1 > 0$ [10, с. 88], то умножим (15) на $(F^1 y, y)$ и запишем требуемое неравенство в виде

$$(-\gamma_2 F^1 y, y) < ((-F^1 + p(t, x)S_0)y, y) < (-\gamma_1 F^1 y, y),$$

или, что то же самое, $((\gamma_1 - 1)F^1 + p(t, x)S_0)y, y) < 0$, $((1 - \gamma_2)F^1 - p(t, x)S_0)y, y) < 0$. Разделим первое неравенство на $1 - \gamma_1 > 0$, а второе на $\gamma_2 - 1 > 0$. Тогда докажем, что

$$\left(-F^1 + \frac{p}{1 - \gamma_1} S_0 \right) < 0, \quad \left(-F^1 + \frac{p}{1 - \gamma_2} S_0 \right) < 0 \quad \text{для всех} \quad d_1^0 < p = p(t, x) < d_2^0. \quad (20)$$

Рассмотрим первое из неравенств (20). Пусть оно выполняется при $b_1 < \frac{p}{1 - \gamma_1} < b_2$, тогда

$$b_1(1 - \gamma_1) < p < b_2(1 - \gamma_1). \quad (21)$$

Аналогично из второго из неравенств (20) получаем

$$b_2(1 - \gamma_2) < p < b_1(1 - \gamma_2). \quad (22)$$

Таким образом, из (21) и (22) имеем

$$\max \{b_1(1 - \gamma_1); b_2(1 - \gamma_2)\} < p < \min \{b_2(1 - \gamma_1); b_1(1 - \gamma_2)\},$$

следовательно,

$$d_1^0 = \max \{b_1(1 - \gamma_1); b_2(1 - \gamma_2)\}, \quad d_2^0 = \min \{b_2(1 - \gamma_1); b_1(1 - \gamma_2)\}. \quad (23)$$

Найдем такие числа b_1 и b_2 , что $(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$ при $b_1 < \tilde{p} < b_2$. Сначала докажем, что $\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0) < 0$, $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$. Действительно, произведение положительно определенной $(F^1)^{-1}$ и эрмитовой матрицы S_0 является диагонализируемой матрицей, собственные значения которой вещественны. При этом $(F^1)^{-1}S_0$ имеет столько же положительных, отрицательных и нулевых собственных значений, как и матрица S_0 [21, с. 550]. Установим, что $\lambda_{\min}(S_0) < 0$ и $\lambda_{\max}(S_0) > 0$. Рассмотрим главный определитель второго порядка матрицы S_0 . Он равен $\begin{vmatrix} 0 & f_{11} \\ f_{11} & 2f_{12} \end{vmatrix} = -f_{11}^2 < 0$, так как вследствие положительной определенности матрицы F элемент $f_{11} > 0$. В силу критерия Сильвестра, если матрица неотрицательно определена, то ее главные миноры неотрицательны. Это значит, что спектр матрицы $\sigma(S_0) \not\subseteq \{x : x \geq 0\}$. В силу критерия Сильвестра, если матрица неположительно определена, то ее второй главный минор неотрицателен. Это значит, что спектр матрицы $\sigma(S_0) \not\subseteq \{x : x \leq 0\}$. Также $\sigma(S_0) \neq \{0\}$, так как матрица S_0 симметрична и не является тождественно нулевой.

Поскольку матрица $(F^1 - \tilde{p}S_0)$ симметрична, ее собственные значения вещественны. При $\tilde{p} = 0$ эта матрица равна матрице $F^1 > 0$. Рассмотрим случай $\tilde{p} > 0$. Найдем такое наименьшее значение параметра $\tilde{p} = b_2$, что матрица $(F^1 - b_2S_0)$ имеет нулевое собственное значение, т. е. $\det(F^1 - b_2S_0) = 0$, а при $0 \leq \tilde{p} < b_2$ выполнено $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$. Это значит, что $1/b_2$ — собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S_0$. Тогда $b_2 = 1/\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$, так как в силу доказанного выше $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) > 0$. Рассуждая аналогично при $\tilde{p} < 0$, получаем, что существует наибольшее $b_1 < 0$ такое, что $\det(F^1 - b_1S_0) = 0$, а при $b_1 < \tilde{p} \leq 0$ выполнено $\det(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$. При этом $b_1 = 1/\lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0) < 0$. Тогда $b_1 = \tilde{d}_1^0$, $b_2 = \tilde{d}_2^0$, т. е. $(F^1 - \tilde{p}S_0) > 0$ при $\tilde{d}_1^0 < \tilde{p} < \tilde{d}_2^0$, и формула (18) совпадает с (23).

Из $-\gamma_2 < \dot{\Theta} < -\gamma_1$ аналогично [10, с. 21] следует оценка времени попадания (19).

Ограниченность управления доказывается аналогично случаю для канонической системы [10, с. 90]. А именно, так как $b_0^*D(\Theta) = \Theta^{-1/2}b_0^*$, запишем управление (10) в виде $u(x) = (a, y(\Theta, x))\Theta^{-1/2}$, где $a = -\frac{1}{2}Fb_0$. Для доказательства ограниченности управления при фиксированном Θ решим задачу нахождения экстремума функции $(a, y(\Theta, x))\Theta^{-1/2}$ при ограничениях $(Fy(\Theta, x), y(\Theta, x)) - 2a_0\Theta = 0$. Решая задачу с помощью метода множителей Лагранжа, находим экстремальное значение $u = \pm\sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} = \pm\sqrt{a_0f_{nn}/2}$, откуда с учетом неравенства (9) получаем $|u(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. управление $u(x)$ ограничено во всем пространстве.

Теорема 2 доказана.

Замечание 3. $d_2^0 - d_1^0$ монотонно убывает по γ_1 и монотонно возрастает по γ_2 .

Замечание 4. Формула (18) дает точную оценку для d_1^0 и d_2^0 .

4.2. Общий случай, локальный синтез. Пусть матрица R имеет вид (2). Тогда элементы матрицы $S(\Theta)$, задаваемой формулой (14), — полиномы по Θ степени не выше n . Под левым собственным вектором матрицы M будем понимать собственный вектор сопряженной матрицы M^* . Предположим, что λ_{\min} — наименьшее собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$ — является алгебраически простым. Пусть x_{\min} и y_{\min} — правый и левый соб-

ственные векторы, соответствующие λ_{\min} , такие, что $y_{\min}^* x_{\min} = 1$. Предположим, что λ_{\max} — наибольшее собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(0) = (F^1)^{-1}S_0$ — является алгебраически простым. Пусть x_{\max} и y_{\max} — правый и левый собственные векторы, соответствующие λ_{\max} , такие, что $y_{\max}^* x_{\max} = 1$. Обозначим

$$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda_{\min}, & \text{если } y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} \geq 0, \\ \lambda_{\min} + y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min}, & \text{если } y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} < 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} + y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max}, & \text{если } y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} \geq 0, \\ \lambda_{\max}, & \text{если } y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Теорема 3. Пусть $\tilde{d}_1^0 = 1/\lambda_1$, $\tilde{d}_2^0 = 1/\lambda_2$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$ и числа d_1^0 и d_2^0 задаются формулой (18).

Тогда существует такое $c \leq 1$, что в области Q , задаваемой равенством $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$, для всех d_1 и d_2 таких, что $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$, управление, задаваемое формулой (10), решает задачу (d_1, d_2) -локального робастного позиционного синтеза для системы (1). При этом траектория замкнутой системы (3), выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in Q$, заканчивается в точке $x_1(T) = 0$ в некоторый конечный момент времени $T = T(x_0, d_1, d_2)$, для которого выполнена оценка (19).

Доказательство. Пусть область Q задается равенством $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$ и $\lambda(\Theta)$ — собственное значение матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. При достаточно малых Θ выполнено $\lambda(\Theta) = \lambda(0) + \lambda'(0)\Theta + \bar{o}(\Theta)$. Как известно [21, с. 444], если

- 1) матрица $A(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$,
- 2) λ — алгебраически простое собственное значение матрицы $A(0)$,
- 3) x и y — соответствующие λ правый и левый собственные векторы,
- 4) $\lambda(t)$ — то собственное значение матрицы $A(t)$, для которого $\lambda(0) = \lambda$,

то

$$\lambda'(0) = \frac{y^* A'(0)x}{y^* x}.$$

Поскольку при достаточно малых Θ справедливо $\lambda(\Theta) = \lambda_{\min} + y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min}\Theta$, то $\lambda(\Theta) \geq \lambda_1$. Также при достаточно малых Θ справедливо $\lambda(\Theta) = \lambda_{\max} + y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max}\Theta$, откуда $\lambda(\Theta) \leq \lambda_2$. В силу того, что $\lambda_{\min}(F^1)^{-1}S_0 > 0$ и $\lambda_{\max}(F^1)^{-1}S_0 < 0$, имеем $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству теоремы 2 в случае наддиагональных возмущений.

Теорема 3 доказана.

4.3. Общий случай, глобальный синтез. Выберем произвольную начальную точку $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, пусть $\Theta(x_0) = \theta_0$. Оценим элементы матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ при $0 \leq \Theta \leq \theta_0$: $\underline{m}_{ij} \leq ((F^1)^{-1}S(\Theta))_{ij} \leq \overline{m}_{ij}$. Пусть матрицы \underline{M} и \overline{M} составлены из элементов \underline{m}_{ij} и \overline{m}_{ij} соответственно. Кроме того, пусть

$$A_c = \frac{1}{2}(\underline{M} + \overline{M}), \quad \Delta = \frac{1}{2}(\overline{M} - \underline{M}),$$

матрицы M_c и M_Δ задаются формулами

$$M_c = \frac{1}{2}(A_c + A_c^*), \quad M_\Delta = \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^*). \quad (26)$$

Тогда в силу [22] спектр интервальной матрицы $[\underline{M}; \overline{M}]$ (т. е. каждой матрицы, ij элемент которой содержится на отрезке $[\underline{m}_{ij}; \overline{m}_{ij}]$) лежит на отрезке $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$, где

$$\underline{\lambda} = \lambda_{\min}(M_c) - \rho(M_\Delta), \quad \overline{\lambda} = \lambda_{\max}(M_c) + \rho(M_\Delta). \quad (27)$$

Заметим, что так как матрица $(F^1)^{-1}S_0$ входит в интервальную $[\underline{M}; \overline{M}]$, то $\underline{\lambda} \leq \lambda_{\min}((F^1)^{-1}S_0)$, $\overline{\lambda} \geq \lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0)$, откуда следует, что $\underline{\lambda} < 0$, $\overline{\lambda} > 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\tilde{d}_1^0 = 1/\underline{\lambda}$, $\tilde{d}_2^0 = 1/\overline{\lambda}$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$ и числа d_1^0 и d_2^0 задаются формулой (18).

Тогда для всех d_1 и d_2 таких, что $d_1^0 < d_1 < d_2 < d_2^0$, управление, задаваемое формулой (10), решает задачу (d_1, d_2) -глобального робастного позиционного синтеза для системы (1). При этом траектория замкнутой системы (3), выходящая из произвольной начальной точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, заканчивается в точке $x_1(T) = 0$ в некоторый конечный момент времени $T = T(x_0, d_1, d_2)$, для которого выполнена оценка (19).

Замечание 5. Пусть $p(t, x)$ — некоторая функция, принадлежащая классу \mathcal{P}_{d_1, d_2} . Для нахождения траектории, начинающейся в заданной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ($x_0 \in Q$ в случае локального синтеза), действуем следующим образом. Решаем уравнение (8) при $x = x_0$ и находим единственный положительный корень $\Theta(x_0) = \theta_0$. Положим $\theta(t) = \Theta(x(t))$. Траектория является решением задачи Коши

$$\dot{x} = (A_0 + p(t, x)R)x - \frac{1}{2} b_0 b_0^* D(\theta) F D(\theta) x,$$

$$\dot{\theta} = \frac{((-F^1 + p(t, x)S(\theta))D(\theta)x, D(\theta)x)}{(F^1 D(\theta)x, D(\theta)x)}$$

$$x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Заметим, что при этом уравнение (8) достаточно решить только один раз — для нахождения θ_0 .

5. Пример: робастный синтез для двумерной системы. На примере двумерной управляемой системы продемонстрируем основные результаты работы. Рассмотрим задачу робастного позиционного синтеза для системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} + p(t, x_1, x_2) \begin{pmatrix} r_{11}x_1 + x_2 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

при ограничениях на управление вида $|u| \leq 1$. В системе (28) числа r_{11}, r_{21}, r_{22} заданы, функция $p(t, x_1, x_2)$ — неизвестное возмущение, удовлетворяющее ограничению $d_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq d_2$.

При $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$ система (28) является канонической системой. Она полностью управляема. Пусть $u(x)$ — управление, задаваемое формулой (10). Наша цель — для заданных чисел r_{11}, r_{21}, r_{22} найти такие $d_1 < 0$ и $d_2 > 0$, чтобы значение $d_2 - d_1 \rightarrow \max$, и при этом для всех возмущений $p(t, x_1, x_2) \in \mathcal{P}_{d_1, d_2}$ траектория $x(t)$ замкнутой системы (3) с управлением $u = u(x)$, выходящая из произвольной начальной точки x_0 , заканчивалась в начале координат в некоторый конечный момент времени $T(x_0, p(t, x_1, x_2))$.

Запишем эту систему в матричном виде $\dot{x} = (A_0 + p(t, x_1, x_2)R)x + b_0u$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & 1 \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой системы при любом $p(t, x_1, x_2) \equiv p \neq -1$ выполнен критерий полной управляемости при всех значениях r_{11}, r_{21}, r_{22} , так как

$$rg(b_0, (A_0 + pR)b_0) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 + p \\ 1 & r_{22}p \end{pmatrix} = 2.$$

Матрицы F и $D(\Theta)$, задаваемые формулами (7), имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad D(\Theta) = \begin{pmatrix} \Theta^{-3/2} & 0 \\ 0 & \Theta^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Определим при $(x_1, x_2) \neq 0$ функцию управляемости $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ как решение уравнения (8), которое в данном случае принимает вид

$$2a_0\Theta^4 = 36x_1^2 + 24\Theta x_1x_2 + 6\Theta^2x_2^2, \tag{29}$$

где $0 < a_0 \leq 2/f_{22} = 1/3$, а при $(x_1, x_2) = 0$ пусть $\Theta(0) = 0$. Положим $a_0 = 1/3$. Управление (10), решающее задачу робастного позиционного синтеза, таково:

$$u(x_1, x_2) = -\frac{6x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)}, \tag{30}$$

где $\Theta(x_1, x_2)$ — единственное положительное решение (29). Это управление удовлетворяет ограничению $|u(x_1, x_2)| \leq 1$.

Рассмотрим случай $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$. Заметим, что для нахождения траектории достаточно решить уравнение (29) только в начальной точке. Пусть $\Theta(x_0) = \theta_0$ — единственный положительный корень уравнения (29) при $x = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Это θ_0 является временем движения из произвольной начальной точки x_0 в начало координат. Положим $\theta(t) = \Theta(x(t))$. Поскольку в силу теоремы 1 выполнено $\dot{\theta} = -1$, $\theta(0) = \theta_0$, то $\theta(t) = \theta_0 - t$. Траектория при $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{6x_1}{(\theta_0 - t)^2} - \frac{3x_2}{\theta_0 - t}, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Эта система сводится к дифференциальному уравнению вида

$$(\Theta_0 - t)^2 \ddot{x}_1 + 3(\Theta_0 - t) \dot{x}_1 + 6x_1 = 0$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_1^0, \dot{x}_1(0) = x_2^0$. Заменой $t = \Theta_0 - e^\tau$ это дифференциальное уравнение типа Эйлера сводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно функции $y(\tau) = x_1(\Theta_0 - e^\tau)$, которое имеет вид $y'' + 2y' + 6y = 0$.

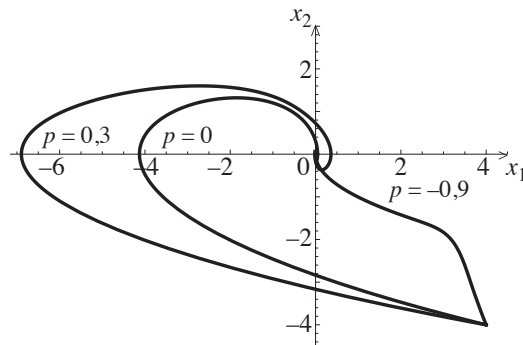


Рис. 1

Отсюда имеем

$$y(\tau) = e^{-\tau} \left(c_1 \cos \sqrt{5}\tau + c_2 \sin \sqrt{5}\tau \right),$$

где постоянные c_1 и c_2 находятся из начальных условий

$$y(\tau_0) = x_1^0, \quad y'(\tau_0) = -\Theta_0 x_2^0 \quad (\tau_0 = \ln \Theta_0).$$

Тогда $x_1(t) = y(\ln(\Theta_0 - t))$, а функция $x_2(t)$ находится дифференцированием функции $x_1(t)$.

Пусть начальная точка $x_0 = (4; -4)$. Тогда единственное положительное решение уравнения (29) равно $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 9,68$. Средняя из траекторий, представленных на рис. 1, соответствует $p(t, x_1, x_2) \equiv 0$.

5.1. Наддиагональные возмущения. Вначале рассмотрим случай $r_{11} = r_{21} = r_{22} = 0$, т.е. возмущаются только элементы главной наддиагонали. Установим, что $d_1^0 \approx -0,99$ и $d_2^0 \approx 0,33$. При $r_{ij} = 0$ система (28) принимает вид

$$\dot{x}_1 = (1 + p(t, x_1, x_2))x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (31)$$

Матрица F^1 , задаваемая формулой (12), и S_0 , задаваемая формулой (17), имеют вид

$$F^1 = \begin{pmatrix} 144 & 36 \\ 36 & 12 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 36 \\ 36 & 24 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$(F^1)^{-1}S_0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $(F^1)^{-1}S_0$ равны -1 и 3 . Тогда из (18) следует, что $d_1^0 = \max\{\gamma_1 - 1, (1 - \gamma_2)/3\}$, $d_2^0 = \min\{(1 - \gamma_1)/3, \gamma_2 - 1\}$.

Заметим, что если γ_1 и γ_2 близки к 1, то значения d_1^0 и d_2^0 близки к нулю. Например, при $\gamma_1 = 0,9$ и $\gamma_2 = 1,1$ имеем $d_1^0 \approx -0,03$ и $d_2^0 \approx 0,03$, и оценка (19) времени движения $T(x_0)$ имеет вид $10 \Theta(x_0)/11 \leq T(x_0) \leq 10 \Theta(x_0)/9$. Значение $d_2^0 - d_1^0$ увеличивается при уменьшении положительного параметра γ_1 и увеличении параметра $\gamma_2 > 1$ (см. замечание 3).

При $\gamma_1 = 0,01$ и $\gamma_2 = 4$ имеем $d_1^0 \approx -0,99$, $d_2^0 \approx 0,33$, при этом оценка (19) времени движения $T(x_0)$ имеет вид $\Theta(x_0)/4 \leq T(x_0) \leq 100\Theta(x_0)$. Хотя величина $d_2^0 - d_1^0$ больше, оценка времени движения хуже.

Положим $\gamma_1 = 0,01$, $\gamma_2 = 4$. Тогда $d_1^0 \approx -0,99$, $d_2^0 \approx 0,33$. Пусть начальная точка $x_0 = (4; -4)$. Тогда единственное положительное решение уравнения (29) равно $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 9,68$. Три траектории, соответствующие $p = -0,9$, $p = 0$ и $p = 0,3$, представлены на рис. 1. При возмущении, удовлетворяющем неравенству $-0,9 \leq p(t, x_1, x_2) \leq 0,3$, траектории заполняют область между траекториями, соответствующими $p = -0,9$ и $p = 0,3$.

5.2. Общий случай. Пусть хотя бы одно из чисел r_{11} , r_{21} , r_{22} отлично от нуля. Найдем границы изменения возмущения d_1 и d_2 такие, чтобы управление вида (30) решало задачу (d_1, d_2) -робастного позиционного синтеза для системы (28). Матрица $S(\Theta)$, задаваемая формулой (14), имеет вид

$$S(\Theta) = \begin{pmatrix} 72\Theta r_{11} + 24\Theta^2 r_{21} & 36 + 12\Theta(r_{11} + r_{22}) + 6\Theta^2 r_{21} \\ 36 + 12\Theta(r_{11} + r_{22}) + 6\Theta^2 r_{21} & 24 + 12\Theta r_{22} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} -3 + \Theta(r_{11} - r_{22}) + \Theta^2 \frac{r_{21}}{6} & -1 + \Theta \frac{r_{11} - 2r_{22}}{3} + \Theta^2 \frac{r_{21}}{6} \\ 12 + 2\Theta(2r_{22} - r_{11}) & 5 + \Theta(3r_{22} - r_{11}) - \Theta^2 \frac{r_{21}}{2} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Вначале будем считать, что Θ достаточно мало. Для нахождения границ изменения возмущения применим теорему 3. Для этого оценим собственное значение $\lambda(\Theta)$ матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. Как отмечено ранее, $\sigma\{(F^1)^{-1}S_0\} = \{-1, 3\}$. Рассмотрим случай минимального собственного значения λ_{\min} матрицы $(F^1)^{-1}S_0$. Тогда правый собственный вектор x_{\min} и левый собственный вектор y_{\min} , соответствующие λ_{\min} и такие, что $y_{\min}^* x_{\min} = 1$, имеют вид

$$x_{\min} = (x_1 \quad -2x_1)^*, \quad y_{\min} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2x_1 & 4x_1 \end{pmatrix}^*, \quad \text{где } x_1 \neq 0,$$

откуда

$$y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} = \frac{r_{11}}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай максимального собственного значения матрицы, т.е. $\lambda_{\max}((F^1)^{-1}S_0) = 3$. Тогда правый собственный вектор x_{\max} и левый собственный вектор y_{\max} , соответствующие λ_{\max} и такие, что $y_{\max}^* x_{\max} = 1$, имеют вид

$$x_{\max} = (x_1 \quad -6x_1)^*, \quad y_{\max} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2x_1 & -4x_1 \end{pmatrix}^*, \quad \text{где } x_1 \neq 0,$$

откуда

$$y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} = -\frac{r_{11}}{2} + 2r_{22}.$$

Рассмотрим случай с конкретными значениями чисел r_{ij} . Пусть $r_{11} = -1$, $r_{21} = 1$, $r_{22} = -1$. Покажем, что при $0 \leq \Theta \leq 0,85$ можно выбрать $d_1^0 \approx -0,66$ и $d_2^0 \approx 0,33$. Поскольку $y_{\min}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\min} = -1/2$, $y_{\max}^*(F^1)^{-1}S'(0)x_{\max} = -3/2$, при достаточно малом Θ таком, что $0 \leq \Theta \leq 1$, выполнены неравенства

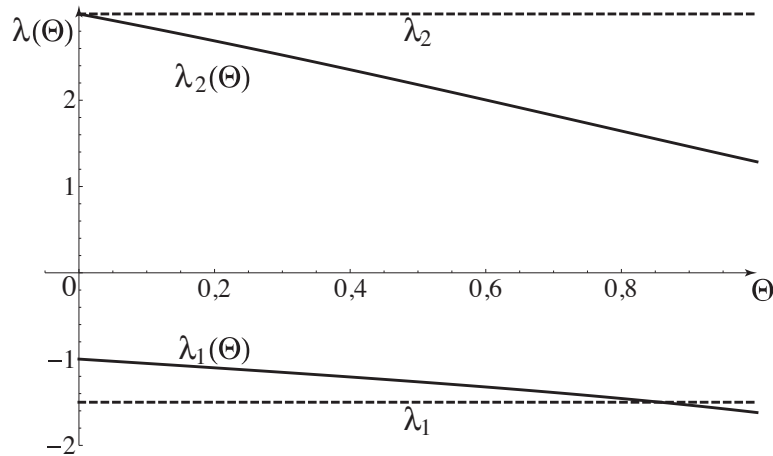


Рис. 2

$$\lambda(\Theta) \geq -1 - \frac{1}{2}\Theta \geq -\frac{3}{2} = \lambda_1, \quad \lambda(\Theta) \leq 3 - \frac{3}{2}\Theta \leq 3 = \lambda_2.$$

Собственные значения $\lambda(\Theta)$ матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\Theta) = \left\{ 1 - \Theta - \frac{\Theta^2}{6} \pm \frac{\sqrt{36 - 18\Theta - 3\Theta^2 + 3\Theta^3 + \Theta^4}}{3} \right\}. \quad (33)$$

На рис. 2 приведены собственные значения $\lambda_{1,2}(\Theta)$ матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$ при $r_{11} = -1, r_{21} = 1, r_{22} = -1$. Оценка $\lambda_1 \leq \lambda_{1,2}(\Theta) \leq \lambda_2$ выполняется при $0 \leq \Theta \leq 0,85$, тогда теорема 3 справедлива при $c = 0,85$. Из формулы (18) при $\bar{d}_1^0 = 1/\lambda_1, \bar{d}_2^0 = 1/\lambda_2$ получаем $d_1^0 \approx -0,66$ и $d_2^0 \approx 0,33$.

При $\Theta > 0,85$ теорема 3 неприменима. В этом случае возможно применение методов интервального анализа, хотя при $0 \leq \Theta \leq 0,85$ методы интервального анализа (теорема 4) дают более узкий интервал для изменения границ возмущения, чем теорема 3. Требуется оценить элементы матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$, задаваемой формулой (32), которая при $r_{11} = -1, r_{21} = 1, r_{22} = -1$ принимает вид

$$(F^1)^{-1}S(\Theta) = \begin{pmatrix} -3 + \frac{\Theta^2}{6} & -1 + \frac{\Theta}{3} + \frac{\Theta^2}{6} \\ 12 - 2\Theta & 5 - 2\Theta - \frac{\Theta^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку при $\Theta \geq 0$ функции $-3 + \frac{\Theta^2}{6}$ и $-1 + \frac{\Theta}{3} + \frac{\Theta^2}{6}$ монотонно возрастают, а $12 - 2\Theta$ и $5 - 2\Theta - \frac{\Theta^2}{2}$ монотонно убывают, при $0 \leq \Theta \leq 0,85$ матрицы \underline{M} и \bar{M} имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 10,29 & 2,92 \end{pmatrix}, \quad \bar{M} \approx \begin{pmatrix} -2,88 & -0,59 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

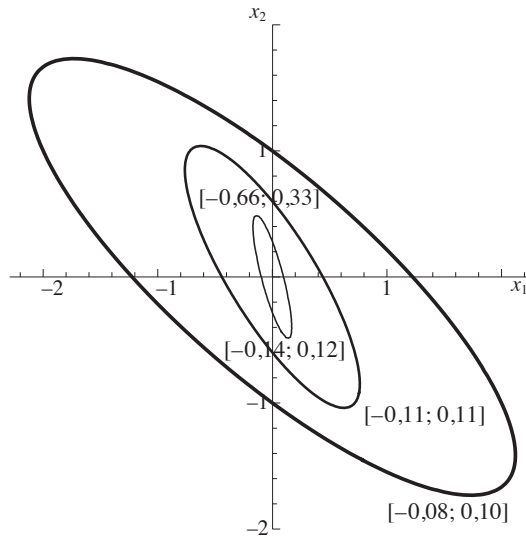


Рис. 3

и собственные значения (27) интервальной матрицы $[\underline{M}; \overline{M}]$ лежат на отрезке $[-6,98; 8]$. Полученная оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. Из формулы (33) следует более точная оценка: $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-1,5; 3]$. Из теоремы 4 получаем $d_1^0 \approx -0,14$ и $d_2^0 \approx 0,12$. В этом случае $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,26$. Теорема 3 дает более широкий интервал: $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,99$.

Пусть $0 \leq \Theta \leq 1,8$. Покажем, что выполнены соотношения $d_1^0 \approx -0,11$ и $d_2^0 \approx 0,11$. Матрицы \underline{M} и \overline{M} имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 8,4 & -0,22 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} \approx \begin{pmatrix} -2,46 & 0,14 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

и собственные значения (27) интервальной матрицы $[\underline{M}; \overline{M}]$ лежат на отрезке $[-8,79; 8,45]$. Эта оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. Из формулы (33) следует более точная оценка: $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-2,9; 3]$. Из теоремы 4 получаем $d_1^0 \approx -0,11$ и $d_2^0 \approx 0,11$.

Пусть $0 \leq \Theta \leq 3$. Покажем, что выполнены соотношения $d_1^0 \approx -0,08$ и $d_2^0 \approx 0,10$. Матрицы \underline{M} и \overline{M} имеют вид

$$\underline{M} \approx \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & -5,5 \end{pmatrix}, \quad \overline{M} \approx \begin{pmatrix} -1,5 & 1,5 \\ 12 & 5 \end{pmatrix},$$

и собственные значения (27) интервальной матрицы $[\underline{M}; \overline{M}]$ лежат на отрезке $[-12,08; 9,58]$. Эта оценка дает большую погрешность на истинные собственные значения матрицы $(F^1)^{-1}S(\Theta)$. Из формулы (33) следует более точная оценка: $\{\lambda_1(\Theta), \lambda_2(\Theta)\} \in [-7,1; 3]$. Из теоремы 4 получаем $d_1^0 \approx -0,08$ и $d_2^0 \approx 0,10$.

Границы областей управляемости — это линии уровня функции $\Theta(x_1, x_2)$, задаваемой уравнением (29). На рис. 3 представлены области управляемости, ограниченные линиями уровня функции $\Theta(x_1, x_2)$ при $\Theta = 0,85$, $\Theta = 1,8$, $\Theta = 3$. Увеличение размера эллипсов соответствует увеличению значения Θ . При $0 \leq \Theta \leq 0,85$ согласно теореме 3 имеем $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,99$, а согласно

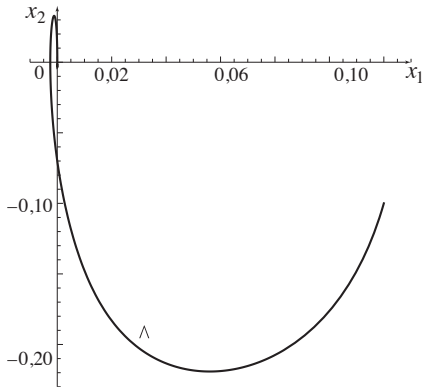


Рис. 4

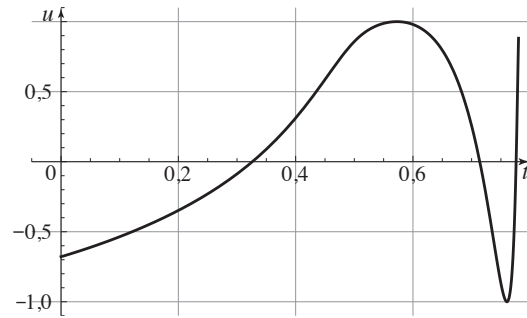


Рис. 5

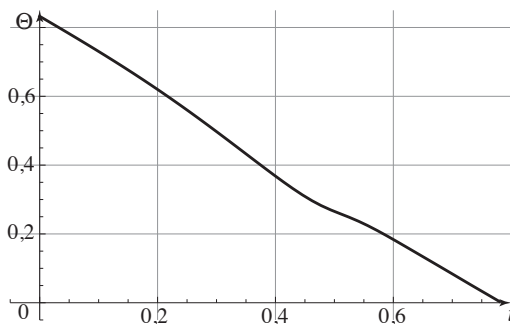


Рис. 6

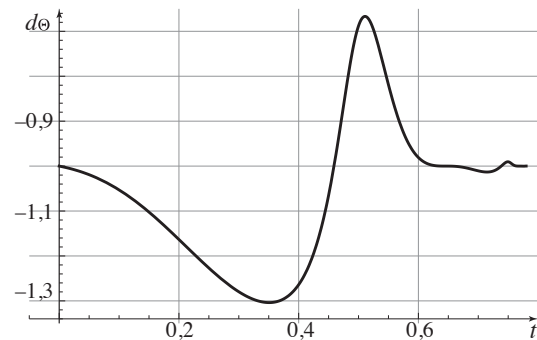


Рис. 7

теореме 4 — $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,26$. Для больших эллипсов получены оценки в силу теоремы 4. При $0 \leq \Theta \leq 1,8$ выполнено $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,22$, а при $0 \leq \Theta \leq 3$ — $d_2^0 - d_1^0 \approx 0,18$.

В качестве конкретной реализации возмущения рассмотрим функцию $p = p(t, x_1, x_2) = 0,33 \sin(50(x_1^2 + x_2^2)t)$. Выберем в качестве начальной точки $x_0 = (0,12; -0,1)$. Решая уравнение (29), получаем $\Theta(x_0) = \theta_0 \approx 0,83$. Тогда в силу теоремы 3 $d_1^0 \approx -0,66$ и $d_2^0 \approx 0,33$. Для нахождения траектории воспользуемся замечанием 5. Траектория является решением задачи Коши

$$\dot{x}_1 = -px_1 + (1+p)x_2,$$

$$\dot{x}_2 = px_1 - px_2 - \frac{6x_1}{\theta^2} - \frac{3x_2}{\theta},$$

(34)

$$\dot{\theta} = \frac{(-12 + 6p\theta + 2p\theta^2)x_1^2 + (-6 + 6p + 4p\theta + 2p\theta^2)x_1x_2\theta + (-1 + 2p + p\theta)x_2^2\theta^2}{12x_1^2 + 6x_1x_2\theta + x_2^2\theta^2},$$

$$x_1(0) = 0,12, \quad x_2(0) = -0,1, \quad \theta(0) = 0,83.$$

Пусть $(x_1^0(t), x_2^0(t), \theta(t))$ — решение системы (34). На рис. 4 представлена кривая $(x_1^0(t), x_2^0(t))$. На рис. 5 приведен график управления

$$u(x_1^0(t), x_2^0(t)) = -\frac{6x_1^0(t)}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2^0(t)}{\theta(t)},$$

причем $|u(x_1^0(t), x_2^0(t))| \leq 1$. Функция управляемости $\theta(t)$ близка к линейной ($y = 0,83 - t$) и представлена на рис. 6. Можно показать численно, что время попадания в начало координат равно $T \approx 0,78$. При этом оценка (19) дает более грубый результат, а именно: $0,21 \leq T \leq 83,25$. График производной по времени от функции управляемости приведен на рис. 7.

Литература

1. Ackermann J. Parameter space design of robust control systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1980. – **25**, № 6. – P. 1058–1072.
2. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе М. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961. – 393 с.
4. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстроедействие и степенная проблема моментов // Мат. сб. – 1987. – **134(176)**, № 2(10). – С. 186–206.
5. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. – 1979. – **109(151)**, № 4(8). – С. 582–606.
6. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущениями с помощью функции управляемости // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 236–243.
7. Коробов В. И., Гавриляко В. М. Робастные системы. Синтез ограниченного управления // Вісн. Харк. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2005. – **711**, вип. 55. – С. 23–27.
8. Ревина Т. В. Решение одной задачи синтеза управления для робастных систем на основе метода функции управляемости // Динам. системы. – 2008. – **25**. – С. 83–93.
9. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique // Proc. 9th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems. – Toulouse, France: IFAC Publ., 2013. – P. 140–145.
10. Коробов В. И. Метод функции управляемости. – М.; Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2007. – 576 с.
11. Ding S., Qian C., Li S. Global finite-time stabilization of a class of upper-triangular systems // Proc. Amer. Control Conf. (Baltimore, MD, USA, June 30–July 2, 2010). – P. 4223–4228.
12. Du H., Qian C., Frye M. T., Li S. Global finite-time stabilization of a class of nonlinear systems via bounded output feedback controllers // Proc. 18th IFAC World Congr. (Milano, Italy, August 28–September 2, 2011). – P. 233–238.
13. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // J. Optim. Theory and Appl. – 2015. – **165**. – P. 532–544.
14. Коробов В. И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 4. – С. 614–619.
15. Коробов В. И., Скляр Г. М. Методы построения позиционных управлений и допустимый принцип максимума // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 11. – С. 1914–1924.
16. Rodoumta K., Bowong S. Construction of bounded feedback by the controllability function method // Appl. Math. Sci. – 2007. – **1**, № 6. – P. 267–279.
17. Bowong S., Moukam Kakmeni F. M. Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems // Phys. Lett. A. – 2003. – **316**. – P. 206–217.
18. Скорик В. А. Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости // Вісн. Харк. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 1999. – **444**. – С. 15–23.
19. Korobov V. I., Revina T. V. Robust feedback synthesis problem for systems with a single perturbation // Commun. Math. Anal. – 2014. – **17**, № 2. – P. 217–230.
20. Ревина Т. В. Несколько подходов к определению границ изменения возмущения в задаче глобального робастного синтеза // Вісн. Харк. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. – 2014. – **1133**, вип. 70. – С. 140–150.
21. Хорн Р. А., Джонсон Ч. Р. Матричный анализ / Пер. с англ. под ред. Х. Д. Икрамова. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
22. Rohn J. Bounds on eigenvalues of interval matrices // Z. angew. Math. und Mech. – 1998. – **78**, № 3. – S. 1049–1050.

Получено 20.05.15,
после доработки — 13.10.15