УДК 514.76

Я. С. Наседкина (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ОБ УСЛОВИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ F^n ИЗ E^{n+p} ПОДПРОСТРАНСТВУ E^{2n-1} *

We consider a submanifold F^n with n principal directions in the space E^{n+p}, where $p \geq n-1$.

Розглядається підмноговид F^n з n головними напрямками у просторі E^{n+p}, де $p \geq n-1$.

Вопросы принадлежности поверхности F^2 с вырожденным эллипсом нормальной кривизны рассматривались в [1, с. 146; 5]. Принадлежность поверхности F^2 из E^n с невырожденным эллипсом нормальной кривизны пространству E^4 в полной мере рассмотрена в [3]. Условия принадлежности поверхности F^2 сфере S^4 с невырожденным эллипсом нормальной кривизны изучены в [4].

В данной работе рассматриваются подмногообразия F^n с n главными направлениями в пространстве E^{n+p}, $p \geq n-1$, и их принадлежность пространству E^{2n-1}. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в каждой точке P подмногообразия $F^n \subset E^{n+p}$, $p \geq n-1$, с n главными направлениями $(n-1)$-мерное подпространство N^{n-1}, содержащее индикатрису нормальной кривизны в виде невырожденного $(n-1)$-мерного симплекса, проходит через точку $P \in F^n$ и существует такая координатная сеть, что координатные линии касаются главных направлений. Пусть никакие $n-1$ из n главных векторов нормальной кривизны, отложенные от точки P, не находятся в $(n-2)$-мерном подпространстве N^{n-2}. Тогда подмногообразие F^n лежит в некотором подпространстве E^{2n-1}.*

Доказательство теоремы будет приведено ниже.

Лемма 1. *Если многообразие $F^n \subset E^{n+p}$ имеет n главных направлений, то его индикатриса нормальной кривизны является $(n-1)$-симплексом либо вырождается в подсимплекс.*

Рассмотрим индикатрису нормальной кривизны поверхности F^n с радиусом-вектором $r = r(u^1, \ldots, u^n)$ в точке x подмногообразия. По определению это подмножество в нормальном пространстве N^p, состоящее из концов векторов нормальной кривизны, отложенных от точки x и взятых для всех касательных направлений. Запишем вектор нормальной кривизны для направления τ , которое определяется дифференциалами $(du^1, du^2, \ldots, du^n)$. Первая квадратичная форма поверхности $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$. Пусть $II^k = L^k_{ij} du^i du^j$, $k = 1, \ldots, p$, — вторая квадратичная форма поверхности. Поскольку единичная сфера в касательном пространстве $(n-1)$-мерна, ее образ в нормальном пространстве в общем случае будет $(n-1)$-мерным подмногообразием в нормальном подпространстве размерности $\dfrac{n(n-1)}{2}$ [2].

Пусть $X^1, \ldots, X^p$ — координаты в нормальном пространстве N^p относительно базиса $n_1, \ldots, n_p$. Для любого единичного касательного направления $\tau = \left\{\dfrac{du^i}{ds}\right\}$ координаты вектора нормальной кривизны для этого направления имеют вид

* Поддержана грантом НАН Украины и Российским фондом фундаментальных исследований (2012 г.)

$$X^k = L^k_{ii}\left(\frac{du^i}{ds}\right)^2.$$

В выбранной точке можно получить $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Положим $\lambda^i = \left(\dfrac{du^i}{ds}\right)^2$, $i = 1,\ldots,n$. В пространстве с координатами $\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^n$ уравнения $\lambda^1+\lambda^2+\ldots+\lambda^n = 1$ и неравенства $\lambda^i \geq 0$ задают симплекс. Индикатриса нормальной кривизны является образом этого симплекса при линейном отображении, которое задается равенствами $X^k = L^k_{ii}\lambda^i$. Если отображение невырождено, то индикатриса нормальной кривизны является $(n-1)$-симплексом. Он лежит в некотором $(n-1)$-мерном пространстве N^{n-1}. Если же отображение вырождается, то образ является подсимплексом меньшей размерности. В дальнейшем будем предполагать, что этот симплекс не вырождается. Он имеет n вершин по числу главных направлений на F^n.

***Замечание* 1.** Индикатриса нормальной кривизны для подмногообразия с главными направлениями всегда является симплексом, но этот симплекс при отображении сферы S^n из касательного пространства с помощью вектора нормальной кривизны покрывается несколько раз. Действительно, для касательных векторов τ и $-\tau$ вектор нормальной кривизны один и тот же. Поэтому симплекс покрывается образом сферы S^n по крайней мере два раза.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

***Замечание* 2.** Размерность $2n-1$ в теореме 1 не может быть уменьшена.

Доказательство теоремы. Подмногообразие с n главными направлениями по лемме 1 имеет индикатрису нормальной кривизны — $(n-1)$-мерный симплекс, находящийся в нормальном пространстве N^{n-1}. Поскольку по условию теоремы подпространство N^{n-1}, содержащее симплекс нормальной кривизны, проходит через точку поверхности, выберем поле нормалей $n_1,n_2,\ldots,n_p$ в нормальном пространстве N^p следующим образом. Выберем $n_1,n_2,\ldots,n_{n-1}$ так, чтобы они лежали в N^{n-1} и были ортогональны между собой. Направим векторы $n_n,n_{n+1},\ldots,n_p$ ортогонально N^{n-1}. Тогда вторые квадратичные формы поверхности, соответствующие последней группе нормалей, являются нулевыми, т. е.

$$L^\beta_{ij} = 0, \qquad \beta = n, n+1,\ldots,p. \tag{1}$$

Можем считать, что $p \geq n$, так как при $p = n-1$ доказывать нечего.

Запишем уравнения Кодацци

$$L^\sigma_{ij,k} - L^\sigma_{ik,j} = L^\alpha_{ij}\mu_{\alpha\sigma/k} - L^\alpha_{ik}\mu_{\alpha\sigma/j}, \quad n \leq \sigma \leq p, \tag{2}$$

где суммирование проводится по α от 1 до $n-1$. Из (1) следует, что левая часть уравнений (2) равна нулю. Тогда уравнение (2) примет вид

$$0 = L^\alpha_{ij}\mu_{\alpha\sigma/k} - L^\alpha_{ik}\mu_{\alpha\sigma/j}, \quad n \leq \sigma \leq p.$$

Поскольку F^n имеет n главных направлений, выберем на F^n координаты так, чтобы в точке P координатные линии касались главных направлений. Тогда в точке P $L^\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и всех α. Получаем линейную систему уравнений на коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\sigma/k}$:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{ii}^{\alpha}\mu_{\alpha\sigma/k}=0,$$

где $i\neq k$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n$, $\sigma=n,n+1,\ldots,p$.

Например, общий вид системы для $\mu_{\alpha\sigma/2}$ запишем следующим образом:

$$L_{11}^{1}\mu_{1\sigma/2}+L_{11}^{2}\mu_{2\sigma/2}+\ldots+L_{11}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2}=0,$$

$$L_{33}^{1}\mu_{1\sigma/2}+L_{33}^{2}\mu_{2\sigma/2}+\ldots+L_{33}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_{nn}^{1}\mu_{1\sigma/2}+L_{nn}^{2}\mu_{2\sigma/2}+\ldots+L_{nn}^{n-1}\mu_{n-1\sigma/2}=0.$$

Определитель этой системы состоит из коэффициентов вторых квадратичных форм и имеет вид

$$\begin{vmatrix} L_{11}^{1} & L_{11}^{2} & \ldots & L_{11}^{n-1}\\ L_{33}^{1} & L_{33}^{2} & \ldots & L_{33}^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ L_{nn}^{1} & L_{nn}^{2} & \ldots & L_{nn}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Заметим, что строки этого определителя являются координатами главных векторов нормальной кривизны $k_i=\left(L_{ii}^{1},L_{ii}^{2},\ldots,L_{ii}^{n-1}\right)$.

Этот определитель не будет равен нулю, так как по условию теоремы никакие $n-1$ из n главных векторов нормальной кривизны не находятся в $(n-2)$-мерном подпространстве. Таким образом, коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\sigma/2}\equiv 0$. Аналогично делаем заключение, что и другие коэффициенты $\mu_{\alpha\sigma/k}\equiv 0$. Заметим, что $\sigma\geq n$.

Возьмем кривую $\gamma\colon u^i=u^i(t)$ на F^n и вдоль нее возьмем пространство E^{2n-1}, натянутое на векторы $r_1,\ldots,r_n,n_1,\ldots,n_{n-1}$, где $r_1,r_2,\ldots,r_n$ — векторы касательного пространства. Полученные условия $\mu_{\alpha\sigma/k}=0$, $L_{ij}^{\sigma}=0,\sigma\geq n$, запишем в виде

$$(n_{\sigma u_i},n_\alpha)=0,\qquad i=1,\ldots,n,\quad \alpha=1,\ldots,n-1,$$

$$(n_{\sigma u_i},r_{u_j})=0.$$

Рассмотрим векторное поле $n_\sigma=n_\sigma(u^1,\ldots,u^n)$. Производная этого векторного поля ортогональна n_σ, поэтому она раскладывается по векторам $r_1,\ldots,r_n$, $n_1,\ldots,n_p$.

Пусть ρ и $\sigma>n$. Покажем, что можно выбрать $n_n,\ldots,n_p$ так, что $\mu_{\rho\sigma/k}=0$. Поскольку $L_{ij}^{\rho}=0$, уравнения Риччи для выбранных индексов ρ,σ примут вид

$$\mu_{\rho\sigma/i,k}-\mu_{\rho\sigma/k,i}+\sum_{\gamma=n}^{p}(\mu_{\sigma\gamma/i}\mu_{\gamma\rho/k}-\mu_{\sigma\gamma/k}\mu_{\gamma\rho/i})=0. \tag{3}$$

Далее рассмотрение проведем аналогично изложенному в § 6 гл. 4 [1]. В фиксированной точке P возмем единичные векторы $n_n,\ldots,n_p$, ортогональные между собой, и будем их параллельно переносить в нормальном расслоении в произвольную точку Q вдоль некоторого соединяющего эти точки пути. Условие (3) является условием независимости этого перенесения от пути. Для так построенных нормальных векторов коэффициенты кручения $\mu_{\rho\sigma/i} \equiv 0$. Заметим, что эти векторы продолжают оставаться ортогональными к N^{n-1}.

В силу общего разложения Вейнгартена имеем

$$n_{\sigma u^i} = -L^{\sigma}_{ij} g^{jk} r_{u^k} + \sum_{\rho=n}^{p} \mu_{\rho\sigma/i} n_\rho + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \mu_{\alpha\sigma/i} n_\alpha.$$

Но $L^{\sigma}_{ij} = 0$, $\mu_{\alpha\sigma/i} = \mu_{\sigma\rho/i} = 0$, поэтому $n_{\sigma u^i} = 0$, т. е. векторное поле n_σ постоянно на F^n. Запишем условие ортогональности n_σ касательному пространству подмногообразия $(n_\sigma, r_{u^i}) = 0$. Поскольку n_σ — постоянное векторное поле, интегрируя, получаем $(n_\sigma, r) = c$. Таких уравнений имеем $p - n + 1$. Объемлющее пространство имеет размерность $n + p$. Следовательно, координаты радиуса-вектора подмногообразия F^n удовлетворяют уравнению постоянного подпространства E^{2n-1}, т. е. поверхность F^n принадлежит E^{2n-1}.

Построим пример поверхности, показывающий, что условие существования главных направлений существенно. Так, у линейчатого подмногообразия $F^3 \subset E^6$ с радиусом-вектором

$$r(u_1, u_2, u_3) = \rho(u_1) + u_2\xi_2(u_1) + u_3\xi_4(u_1),$$

где $\rho(u^1)$ — некоторая кривая Γ в E^6 с постоянными ненулевыми кривизнами $k_1, \ldots, k_5$. Координата u^1 предполагается длиной дуги кривой Γ, ξ_i — вектор-функции естественного репера Френе кривой. В этом случае $n = 3$, $p = 3$, $2n - 1 = 5$. Покажем, что у этого подмногообразия индикатриса нормальной кривизны в точках Γ вырождается в плоскую область, ограниченную эллипсом, т. е. не является симплексом, и, следовательно, согласно лемме 1 не имеет главных направлений. Подмногообразие F^3 не лежит в E^5, так как кривая Γ не лежит в E^5 (k_5 отлично от нуля по построению).

Действительно, найдем первую и вторую квадратичные формы этой поверхности:

$$r_{u_1} = \xi_1(1 - k_1u_2) + \xi_3(k_2u_2 - k_3u_3) + k_4u_3\xi_5,$$

$$r_{u_2} = \xi_2,$$

$$r_{u_3} = \xi_4,$$

где k_i, $i = 1, \ldots, 5$, — кривизны кривой Γ. Отсюда видно, что $g_{11} = (1 - k_1u_2)^2 + (k_2u_2 - - k_3u_3)^2 + (k_4u_3)^2$, $g_{12} = 0$, $g_{13} = 0$, $g_{22} = 1$, $g_{23} = 0$, $g_{33} = 1$.

Далее, так как $k_i = \mathrm{const} \neq 0$, то

$$r_{u_1u_1} = \xi_2(k_1(1 - k_1u_2) - k_2^2u_2 + k_2k_3u_3) + \xi_4(k_3(k_2u_2 - k_3u_3) - k_4^2u_3) + \xi_6k_5k_4u_3,$$

$$r_{u_1u_2} = -\xi_1k_1 + \xi_3k_2,$$

$$r_{u_1u_3} = -\xi_3k_3 + \xi_5k_4,$$

$$r_{u_2u_2} = 0, \qquad r_{u_2u_3} = 0, \qquad r_{u_3u_3} = 0.$$

Запишем касательные и нормали к подмногообразию на кривой Γ, т. е. при $u_2 = 0, u_3 = 0$:

$$r_{u_1} = \xi_1, \qquad n_1 = \xi_5,$$
$$r_{u_2} = \xi_2, \qquad n_2 = \xi_3,$$
$$r_{u_3} = \xi_4, \qquad n_3 = \xi_6.$$

Найдем индикатрисы нормальной кривизны линейчатого многообразия на кривой Г. Первые и вторые квадратичные формы на Г примут вид

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2,$$
$$L_{11}^1 = 0, \qquad L_{12}^1 = 0, \qquad L_{13}^1 = k_4,$$
$$L_{22}^\alpha = L_{23}^\alpha = L_{33}^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$
$$L_{11}^2 = 0, \qquad L_{12}^2 = k_2, \qquad L_{13}^2 = -k_3,$$
$$L_{11}^3 = 0, \qquad L_{12}^3 = 0, \qquad L_{13}^3 = 0.$$

Индикатриса нормальной кривизны $k_n = X^1 n_1 + X^2 n_2 + X^3 n_3$. Обозначим $\dfrac{du_k}{ds} = y_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда $X^i = L_{11}^i y_1^2 + 2L_{12}^i y_1 y_2 + L_{22}^i y_2^2 + 2L_{13}^i y_1 y_3 + L_{33}^i y_3^2 + 2L_{23}^i y_2 y_3$. Учитывая получившиеся значения для L_{ij}^k, имеем

$$X^1 = 2k_4 y_1 y_3,$$
$$X^2 = 2k_2 y_1 y_2 - 2k_3 y_1 y_3,$$
$$X^3 = 0,$$

где

$$(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1. \tag{4}$$

Из (4), так как $X^3 = 0$, следует, что индикатриса — плоское ограниченное множество. Можно говорить о границе этого множества. Индикатриса строится с помощью отображения единичной сферы S^2 из касательного пространства к F^3 на плоскость с координатами X^1, X^2, при этом это отображение многолистное. Следовательно, на границе множества точек индикатрисы якобиан отображения $J\left(\dfrac{X^1, X^2}{y^1, y^3}\right) = 0$. Это обстоятельство дает возможность определить вид границы множества точек индикатрисы. Имеем

$$J = \left(\frac{X^1, X^2}{y_1, y_3}\right),$$

$$J = 4\begin{vmatrix} \dfrac{\partial k_4 y_1 y_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial(k_2 y_1 y_2 - k_3 y_1 y_3)}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial k_4 y_1 y_3}{\partial y_3} & \dfrac{\partial(k_2 y_1 y_2 - k_3 y_1 y_3)}{\partial y_3} \end{vmatrix},$$

$$J = \frac{-4k_4 k_2 y_1}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_3^2}}(1 - 2y_1^2).$$

При $y_1 = 0$ и $y_1^2 = \dfrac{1}{2}$ якобиан равен нулю. Если $y_1 = 0$, то получим вырождение — точку на плоскости. Тогда

$$y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi, \qquad y_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi.$$

Подставим полученные значения для y_1, y_2, y_3 в X^1, X^2. Найдем

$$\cos\varphi = \frac{1}{k_2}\left(X^2 - \frac{k_3}{k_4}X^1\right), \qquad \sin\varphi = \frac{X_1}{k_4}.$$

После преобразования $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ получим уравнение второго порядка на X^1, X^2 :

$$\frac{(X^1)^2}{k_4^2} + \frac{1}{k_2^2}\left(X^2 - \frac{k_3}{k_4}X^1\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса.

Таким образом, индикатриса является частью плоскости, ограниченной эллипсом. Поскольку все $L_{ij}^3 = 0$ на кривой Γ, плоскость, в которой лежит индикатриса, проходит через точку поверхности и, следовательно, F^3 не имеет главных направлений.

***Замечание* 3.** В общем случае для подмногообразия F^3 в E^6 индикатриса является некоторой поверхностью трехмерного пространства N^3. Пример такой поверхности — поверхность Штейнера — приведен в книге [2]. Если же подмногообразие F^3 лежит в некотором E^5, то индикатриса — плоское множество, причем плоскость, в которой лежит это множество, проходит через соответствующую точку подмногообразия F^3. Естественно поставить вопрос: *если F^3 лежит в E^6 и его индикатриса имеет указанное свойство, то будет ли на самом деле F^3 лежать в некотором E^5 ?*

***Замечание* 4.** В построенном выше примере указанное свойство индикатрисы выполняется только в точках кривой Γ.

Автор выражает благодарность профессору Аминову Ю. А. за его поддержку и советы, которые способствовали улучшению статьи.

Литература

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия подмногообразий. – Киев: Наук. думка, 2002. – 468 с.
2. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – Т. 2. – 348 с.
3. *Aminov Yu. A., Nasiedkina Ia. S.* Conditions on a surface $F^2 \in E^n$ to lie in E^4 // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2013. – **9**, № 2. – P. 127 – 149.
4. *Аминов Ю. А., Наседкина Я. С.* Условия принадлежности двумерной поверхности из E^5 гиперсфере или гиперплоскости // Мат. заметки. – 2013. – **94**, № 2. – С. 163 – 174.
5. *Наседкина Я. С. (Тандура Я. С.)* Об условиях принадлежности поверхности трехмерной сфере // Вестн. Харьков. нац. ун-та. Сер. математика, прикл. математика и механика. – 2007. – **790**, № 57. – С. 140 – 145.

Получено 12.07.13,
после доработки — 16.03.15