УДК 517.9

О. В. Капустян, М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГЛОБАЛЬНІ АТРАКТОРИ ІМПУЛЬСНИХ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ СИСТЕМ*

We study the existence of global attractors in discontinuous infinite-dimensional dynamical systems, which may have trajectories with infinitely many impulsive perturbations. We also select a class of impulsive systems for which the existence of a global attractor is proved for weakly nonlinear parabolic equations.

Исследуются глобальные аттракторы бесконечномерных разрывных динамических систем, которые могут иметь траектории с бесконечным числом импульсных возмущений. Выделен класс импульсных систем, в котором для слабонелинейного параболического уравнения доказано существование глобального аттрактора.

Вступ. Розривні динамічні системи, тобто автономні системи, що зазнають імпульсних збурень при досягненні траєкторією деякої підмножини фазового простору, є важливим підкласом систем з імпульсним збуренням [1, 2]. Різним аспектам якісної теорії для таких систем у скінченновимірному випадку присвячено багато робіт (див. [1 – 11] і наведену там бібліографію). Зокрема, одержано важливі результати щодо періодичних рухів, стійкості та топологічних властивостей ω-граничних множин траєкторій. Проте в цих роботах основну увагу приділено або системам звичайних диференціальних рівнянь, або системам зі скінченною кількістю імпульсних збурень вздовж траєкторій. Зокрема, в [10], виходячи з такого припущення, запропоновано означення глобального атрактора [12, 13] для імпульсної динамічної системи як компактної інваріантної рівномірно притягуючої множини фазового простору, що не перетинається з множиною імпульсного збурення. В даній роботі, виходячи з відповідного означення для неавтономних систем [14 –18], глобальний атрактор вводиться як компактна мінімальна рівномірно притягуюча множина. Таке означення видається більш природним для систем із нескінченною кількістю імпульсних збурень, оскільки в найпростіших випадках глобальний атрактор таких систем не є інваріантною множиною і перетинає множину імпульсного збурення. Основним результатом роботи є доведення існування глобального атрактора для достатньо широкого класу нескінченновимірних імпульсних систем, що допускають нескінченну кількість імпульсних збурень.

Основні результати. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $\beta(X)$ — обмежені підмножини X. Під динамічною системою (ДС) будемо розуміти пару (X, G), де відображення $G\colon R_+ \times X \mapsto X$ задовольняє напівгрупову властивість

$$\forall x \in X\colon \quad G(0,x) = x, \qquad G(t+s,x) = G(t, G(s,x)) \qquad \forall t,s \geq 0.$$

Зауважимо, що на відміну від класичного означення ДС [12, 13] на G не накладаються умови неперервності.

Означення. *$A \subset X$ називається глобальним атрактором ДС (X, G), якщо*

1) *A — компакт;*

2) *A — рівномірно притягуюча множина, тобто* $\operatorname{dist}(G(t,B), A) \to 0 \ \forall B \in \beta(X),\ t \to \infty$;

3) *A — мінімальна множина у класі замкнених множин, що задовольняють п.* 2.

* Виконано при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № Ф62/94-2015).

Зауважимо, що якщо для ДС (X, G) існує глобальний атрактор у класичному сенсі, тобто існує множина $\widetilde{A} \subset X$, що задовольняє пп. 1, 2 і $G(t, \widetilde{A}) = \widetilde{A}\ \ \forall t \geq 0$, то $A = \widetilde{A}$.

Наступний результат дає критерій існування глобального атрактора для дисипативних ДС.

Теорема 1 [14 – 17]**.** *Нехай для ДС (X, G) виконано умову дисипативності*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X) \quad \exists T = T(B) \quad \forall t \geq T: \quad G(t, B) \subset B_0. \tag{1}$$

ДС (X, G) має глобальний атрактор тоді і тільки тоді, коли G є асимптотично компактною, тобто виконано умову

$$\forall \{x_n\} \in \beta(X) \quad \forall \{t_n \nearrow \infty\} \quad \textit{послідовність} \quad \{G(t_n, x_n)\} \quad \textit{є передкомпактною}. \tag{2}$$

При цьому для глобального атрактора A справджується рівність

$$A = \omega(B_0) := \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} G(t, B_0)}. \tag{3}$$

Важливим класом таких ДС є імпульсні (або розривні) ДС [1 – 7, 9, 10]. Нехай у фазовому просторі X задано напівгрупу $V: R_+ \times X \mapsto X$, непорожню замкнену множину $M \subset X$ і відображення $I: M \mapsto X$. Фазова точка $x(t)$, рухаючись по траєкторіях V, у момент τ досягнення множини M зазнає імпульсного впливу і опиняється в положенні $Ix(\tau)$. Для коректного задання траєкторії такої системи будемо вважати виконаними наступні умови:

$$\forall x \ \in X \quad \text{функція} \quad t \mapsto V(t, x) \quad \text{є неперервною на} \quad [0, +\infty), \tag{4}$$

$$M \cap I(M) = \varnothing, \tag{5}$$

$$\forall x \ \in M \quad \exists\, \tau = \tau(x) > 0 \quad \forall\, t \in (0, \tau): \quad V(t, x) \notin M. \tag{6}$$

Введемо позначення [5]

$$Ix = x^+ \quad \forall x \in M,$$

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} V(t, x) \right) \cap M \quad \forall x \in X.$$

Тоді [9], якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, існує момент часу $s := \phi(x) > 0$ такий, що

$$V(t, x) \notin M \quad \forall t \in (0, s), \quad V(s, x) \in M.$$

За допомогою введених позначень імпульсна ДС $(X, \tilde{V})$ описується таким чином. Нехай $x \in X$ — фіксоване.

Якщо $M^+(x) = \varnothing$, то $\tilde{V}(t, x) = V(t, x)\ \ \forall t \geq 0$.

Якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(x),\ x_1 = V(s_0, x)$

$$\tilde{V}(t, x) = \begin{cases} V(t, x), & 0 \leq t < s_0, \\ x_1^+, & t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(x_1^+) = \varnothing$, то $\tilde{V}(t, x) = V(t - s_0, x_1^+) \quad \forall t \geq s_0$.

Якщо $M^+(x_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(x_1^+),\ x_2 = V(s_1, x_1^+)$

$$\tilde{V}(t,x)=\begin{cases}V(t-s_0,x_1^+), & s_0\le t<s_0+s_1,\\ x_2^+, & t=s_0+s_1,\end{cases}$$

і т. д.

В результаті маємо скінченну або нескінченну кількість імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n\ge1}$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n\ge0}$,

$$V(s_0,x)=x_1,\quad V(s_n,x_n^+)=x_{n+1},\quad n\ge1.$$

Будемо вважати виконаною таку умову:

$$\forall\, x\in X\quad \forall\, t\in[0,+\infty)\quad \tilde{V}(t,x)\ \text{є визначеною,} \tag{7}$$

тобто або кількість імпульсних точок не більш ніж скінченна, або $\sum_{n=0}^{\infty}s_n=\infty$. Тоді [4, 5, 9] відображення $\tilde{V}\colon R_+\times X\mapsto X$ задовольняє напівгрупову властивість і нас буде цікавити глобальний атрактор ДС $(X,\tilde{V})$. Виходячи з класичних прикладів розривних ДС [1–3], будемо розглядати імпульсні збурення двох типів із параметрами $a>0,\ \mu>0$:

а) X — нормований простір, $M=\{x\in X|\|x\|=a\}\,,Ix=(1+\mu)x$;

б) X — гільбертів простір, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис , $M=\{x\in X|(\psi_1,x)=a\}$ для $x=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k,\ Ix=(1+\mu)c_1\psi_1+\sum_{k=2}^{\infty}c_k\psi_k$.

Спочатку покажемо, що як завгодно мале імпульсне збурення типу а) в найпростішому нескінченновимірному випадку руйнує глобальний атрактор.

В обмеженій області $\Omega\subset R^p$, $p\ge1$, розглядається задача

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\Delta y,\ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega,\qquad y|_{\partial\Omega}=0. \tag{8}$$

Далі через $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ будемо позначати ортонормований базис у $L^2(\Omega)$ такий, що $-\Delta\psi_i = \lambda_i\psi_i,\ \psi_i\in H_0^1(\Omega),\ 0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots,\ \lambda_i\to\infty,\ i\to\infty$.

Задача (8) у фазовому просторі $X=L^2(\Omega)$ з нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ породжує ДС (X,V), де для $y_0=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\psi_i$

$$V(t,y_0)=y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie^{-\lambda_it}\psi_i. \tag{9}$$

Оскільки

$$\|y(t)\|\le e^{-\lambda_1t}\|y_0\|\qquad \forall t\ge0, \tag{10}$$

то глобальним атрактором ДС (X,V) є $A=\{0\}$.

Тепер розглянемо імпульсну ДС $(X,\tilde{V})$, де

$$M=\{y\in X|\ \ \|y\|=\varepsilon\}\,,\qquad Iy=(1+\mu)y,\qquad \varepsilon>0,\quad \mu>0. \tag{11}$$

Лема 1. *Для будь-яких* $\varepsilon>0,\ \ \mu>0$ *задача* (8), (11) *породжує імпульсну ДС* $(X,\tilde{V})$, *що задовольняє умови* (1), (4)–(7), *але не має глобального атрактора.*

Доведення. Виконання умов (4) – (6) випливає з (9) – (11). Встановимо властивість (7). Якщо $\|y_0\| \le \varepsilon$, то внаслідок (10) відповідна траєкторія задачі (8) не зазнає імпульсних збурень і $\|y(t)\| \to 0,\ t \to \infty$. Нехай $\|y_0\| > \varepsilon$. Якщо $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i$, то позначимо через $i = i_0$ номер першої ненульової координати, тобто $y_0 = \sum_{i=i_0}^{\infty} c_i\psi_i$. Згідно з (10) існує $s_0 = \phi(y_0)$ таке, що $\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i^2 e^{-2\lambda_i s_0} = \varepsilon^2$, звідки $s_0 \ge \dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \ln \dfrac{|c_{i_0}|}{\varepsilon}$. Далі для моменту s_1 маємо рівність $\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i^2(\mu+1)^2 e^{-2\lambda_i s_0} e^{-2\lambda_i s_1} = \varepsilon^2$, звідки $s_0 + s_1 \ge \dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \ln \dfrac{|c_{i_0}|}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \ln(\mu+1)$ і т. д. На k-му кроці будемо мати

$$\sum_{i=0}^{k} s_i \ge \frac{1}{\lambda_{i_0}} \ln \frac{|c_{i_0}|}{\varepsilon} + \frac{k}{\lambda_{i_0}} \ln(\mu+1) \to \infty, \qquad k \to \infty,$$

отже, імпульсна ДС $(X, \tilde{V})$ задовольняє умову (7). Крім того, ДС $(X, \tilde{V})$ задовольняє умову дисипативності (1) з $B_0 = \{y |\ \|y\| \le \varepsilon(\mu+1)\}$. Дійсно, для $\|y_0\| \le \varepsilon$ це випливає з (10). Для $\|y_0\| \ge \varepsilon,\ \|y_0\| \le R$ маємо $s_0 \le \dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{R}{\varepsilon}$. Таким чином,

$$\forall B_R = \{y |\ \|y\| \le R\} \quad \exists T(R) = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R}{\varepsilon} \quad \forall\, t \ge T(R): \qquad \tilde{V}(t, B_R) \subset B_0.$$

Згідно з теоремою 1 лему буде доведено, якщо покажемо, що $\tilde{V}$ не є асимптотично компактною. Візьмемо $\Omega = (0, \pi)$. Тоді

$$\lambda_i = i^2, \qquad \psi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin ix, \quad i \ge 1.$$

Розглянемо у множині $\{y |\ \|y\| = \varepsilon(\mu+1)\} \in \beta(X)$ початкові точки $\left\{y_0^{(n)} = \varepsilon(\mu+1)\psi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді для $\{t_n = n\ln(\mu+1)\}_{n=1}^{\infty}$ маємо $\tilde{V}(t_n, y_0^{(n)}) = y_0^{(n)}\ \forall n \ge 1$, але $\left\{y_0^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ не є передкомпактною в $L^2(0, \pi)$, що і доводить лему.

Тепер розглянемо задачу (8) з імпульсним збуренням типу б), тобто

$$M = \{y \in X |\ (y, \psi_1) = a\}, \qquad I: M \mapsto L^2(\Omega), \tag{12}$$

$$Iy = (\mu+1)c_1\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i\psi_i \quad \text{для} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i, \quad a > 0, \quad \mu > 0.$$

Лема 2. *Для будь-яких* $a > 0,\ \mu > 0$ *задача* (8), (12) *породжує імпульсну ДС* $(X, \tilde{V})$, *що задовольняє умови* (1), (4) – (7) *і має у просторі* $X = L^2(\Omega)$ *глобальний атрактор*

$$A = \bigcup_{t \in [0, \ln(1+\mu)]} \left\{(1+\mu)ae^{-t}\psi_1\right\} \cup \{0\}. \tag{13}$$

Доведення. Для будь-якого розв'язку задачі (8) справджується рівність

$$(y(t), \psi_1) = e^{-\lambda_1 t}(y_0, \psi_1) \quad \forall t \ge 0. \tag{14}$$

Отже, згідно з (12), (14) виконуються (4) – (6). Для $y_0,\ (y_0, \psi_1) \leq a$ відповідна траєкторія (8) не зазнає імпульсних збурень і згідно з (10) $\|y(t)\| \to 0,\ t \to \infty$. Для $y_0,\ (y_0, \psi_1) > a$

$$s_0 = \phi(y_0) = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{(y_0, \psi_1)}{a}, \qquad s = s_i = \frac{1}{\lambda_1} \ln(1+\mu), \qquad i \geq 1,$$

отже, умову (7) виконано. Доведемо, що імпульсна ДС $(X, \tilde{V})$ дисипативна з $B_0 = \{y|\ \|y\| \leq \leq a(\mu+1)+1\}$. Для $y_0,\ \|y_0\| \leq a$ маємо $(y_0, \psi_1) \leq a$ і згідно з (10)

$$\|y(t)\| \leq ae^{-\lambda_1 t} \leq a \quad \forall t \geq 0. \tag{15}$$

Нехай $\|y_0\| \leq R,\ \ (y_0, \psi_1) > a$. Тоді за час $s_0 \leq T_1(R) = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{R}{a}$ фазова точка досягає поверхні M і опиняється в точці $y_1^+ = Iy(s_0) \in \{y|\ (y, \psi_1) = a(\mu+1)\}$:

$$\|y_1^+\| \leq (1+\mu)\|y(s_0)\| \leq (1+\mu)\|y_0\|.$$

Нехай $y_1^+ = a(1+\mu)\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \psi_i$. Тоді

$$y_2^+ = a(1+\mu)\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i (1+\mu)^{\frac{-\lambda_i}{\lambda_1}} \psi_i,$$

$$y_{k+1}^+ = a(1+\mu)\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i (1+\mu)^{\frac{-k\lambda_i}{\lambda_1}} \psi_i,\ k \geq 2.$$

Таким чином, для $s_0 + ks \leq t < s_0 + (k+1)s$ маємо оцінку

$$\|\tilde{V}(t, y_0)\|^2 \leq \|y_{k+1}^+\|^2 = a^2(\mu+1)^2 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i^2 (1+\mu)^{\frac{-2k\lambda_i}{\lambda_1}} \leq$$

$$\leq a^2(\mu+1)^2 + (1+\mu)^{\frac{-2k\lambda_2}{\lambda_1}} \sum_{i=2}^{\infty} c_i^2 \leq a^2(\mu+1)^2 + (1+\mu)^{\frac{-2k\lambda_2}{\lambda_1}} (1+\mu)^2 \|y_0\|^2, \tag{16}$$

з якої і випливає шукана дисипативність.

Тепер нехай $\{y_0^{(n)}\}$ — довільна обмежена послідовність початкових даних. Якщо для деякої підпослідовності $(y_0^{(n)}, \psi_1) \leq a$, то внаслідок (10) для довільної $t_n \nearrow \infty$

$$\tilde{V}(t, y_0^{(n)}) = V(t, y_0^{(n)}) \to 0,\ n \to \infty, \tag{17}$$

і маємо (2). Отже, будемо вважати, що $\|y_0^{(n)}\| \leq R,\ \ (y_0^{(n)}, \psi_1) > a$. Тоді

$$s_0^{(n)} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{(y_0^{(n)}, \psi_1)}{a} \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R}{a},$$

$$y_1^{(n)^+} = a(1+\mu)\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i^{(n)} \psi_i.$$

Для $t_n \nearrow \infty$ існують $k(n) \geq 1,\ k(n) \to \infty, n \to \infty$, такі, що

$$s_0^{(n)} + k(n)s \leq t_n < s_0^{(n)} + (k(n)+1)s.$$

Тоді згідно з (16) маємо сильну збіжність

$$y^{(n)+}_{k(n)+1} = a(\mu+1)\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i^{(n)}(1+\mu)^{\frac{-k(n)\lambda_i}{\lambda_1}}\psi_i \to a(\mu+1)\psi_1,\ n\to\infty.$$

Крім того, оскільки $\tau_n = t_n - s_0^{(n)} - k(n)s \in [0,s]$, то по підпослідовності $\tau_n \to \tau \in [0,s]$, $n\to\infty$, отже, для $\xi_n = \tilde{V}(t_n, y_0^{(n)})$ по підпослідовності маємо сильну збіжність

$$\xi_n \to a(\mu+1)\psi_1 e^{-\lambda_1\tau}, \tag{18}$$

що і доводить асимптотичну компактність, а отже, існування глобального атрактора. З формули (3) випливає, що глобальний атрактор складається з граничних точок послідовностей $\tilde{V}(t_n, y_0^{(n)})$, де $\{y_0^{(n)}\} \subset B_0$. Тоді з (17), (18) виводимо (13).

Лему 2 доведено.

Зауваження. З формули (13) випливає, що $A\cap M \neq \varnothing$ і $\tilde{V}(t,\xi) = a\psi_1 e^{-\lambda_1 t} \notin A$ для $\xi = a\psi_1 \in A\cap M$, тобто $\tilde{V}(t,A) \not\subset A\ \ \forall t>0$.

Основним результатом роботи є доведення того факту, що атрактор зберігається при малих збуреннях задачі (8).

В обмеженій області $\Omega\subset R^p$, $p\geq 1$, розглядається задача

$$\begin{gathered}\frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y - \varepsilon f(y), \quad (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega,\\ y|_{\partial\Omega} = 0,\end{gathered} \tag{19}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $f\in C^1(R),\ f(0)=0$,

$$\exists\, C>0\ \forall\, y\in R: \qquad f'(y)\geq -C, \qquad |f(y)|\leq C. \tag{20}$$

Умови (20) гарантують [14], що для довільних $y_0 \in X = L^2(\Omega)$ задача (19) має єдиний розв'язок $y_\varepsilon \in C([0,+\infty);X)$, $y_\varepsilon(0) = y_0$, для якого справджується оцінка

$$\|y_\varepsilon(t)\| \leq e^{-(\lambda_1 - C\varepsilon)t}\|y_0\| \qquad \forall t\geq 0. \tag{21}$$

Нехай X_w — простір X зі слабкою топологією, $\varepsilon_n\to\varepsilon_0\geq 0$, $y_0^{(n)}$, y_0 — початкові дані, $y^{(n)}$, y — розв'язки задачі (19) з ε_n і ε_0 відповідно, $y^{(n)}(0) = y_0^{(n)}$, $y(0)=y_0$. Тоді на довільному скінченному проміжку $[0,T]$ має місце така властивість регулярності [16 – 18]:

$$\text{якщо}\ \ y_0^{(n)}\to y_0\ \ \text{в}\ \ X_w, \quad \text{то}\quad y^{(n)}\to y\ \ \text{в}\ \ C([0,T];X_w)\cap C([\tau,T];X)\quad \forall\tau>0, \tag{22}$$

$$\text{якщо}\ \ y_0^{(n)}\to y_0\ \ \text{в}\ \ X, \quad \text{то}\quad y^{(n)}\to y\ \ \text{в}\ \ C([0,T];X). \tag{23}$$

Для розв'язків задачі (19) розглядається імпульсне збурення типу (12) для $a>0,\ \mu>0$:

$$M = \{y\in X \,|\, (y,\psi_1) = a\}, \qquad I: M\mapsto X, \tag{24}$$

$$Iy = (\mu+1)c_1\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i\psi_i \quad \text{для} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i.$$

Теорема 2. *Для будь-яких* $a > 0,\ \ \mu > 0$ *та для достатньо малих* $\varepsilon > 0$ *задача* (19), (24) *породжує імпульсну ДС* $(X, \tilde{V}_\varepsilon)$, *що має глобальний атрактор* $A(\varepsilon)$, *причому*

$$\operatorname{dist}(A(\varepsilon), A) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{25}$$

де A *задається формулою* (13).

Доведення. Для будь-якого розв'язку задачі (19) $y_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(0) = y_0$ справджується рівність

$$(y_\varepsilon(t), \psi_1) = e^{-\lambda_1 t}(y_0, \psi_1) - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)dp \qquad \forall t \geq 0. \tag{26}$$

Виконання умов (4), (5) випливає з постановки задачі. Нехай $y_0 \in M$. Тоді для

$$f_\varepsilon(t) = ae^{-\lambda_1 t} - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)dp$$

маємо $f_\varepsilon(0) = a,\ f_\varepsilon'(0) = -a\lambda_1 - \varepsilon(f(y_0), \psi_1) \leq -a\lambda_1 + \varepsilon C|\Omega|^{\frac{1}{2}}$. Таким чином, якщо

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{a\lambda_1}{C|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{27}$$

то існує $\tau = \tau(y_0, \varepsilon) > 0$ таке, що $(y_\varepsilon(t), \psi_1) < a \ \ \forall t \in (0, \tau)$, тобто виконується умова (6).

Встановимо умову (7). Нехай $\|y_0\| \leq R,\ R > a$ і

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{\lambda_1}{C}\right). \tag{28}$$

Тоді, якщо $y_\varepsilon(t)$ не зазнає імпульсного збурення при $t \geq 0$, внаслідок (21), (28) $\|y_\varepsilon(t)\| \to 0,\ t \to \infty$. Тепер нехай $(y_\varepsilon(t), \psi_1) \neq a\ \forall t \in (0, T),\ \ (y_\varepsilon(T), \psi_1) = a$. Тоді внаслідок (26)

$$\begin{gathered} a \leq \mathrm{R}e^{-\lambda_1 T} + \frac{\varepsilon C|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}, \\ T \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R}{a - \frac{\varepsilon C|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1}}. \end{gathered} \tag{29}$$

Лема 3. *Існує* $\varepsilon_1 \leq \min\left\{\frac{\lambda_1}{C}, \frac{a\lambda_1}{C|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\right\}$ *таке, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *і всіх початкових даних* $y_0,\ (y_0, \psi_1) = a(1 + \mu)$, *існує* $t_\varepsilon > 0$ — *розв'язок рівняння*

$$a = a(1 + \mu)e^{-\lambda_1 t_\varepsilon} - \varepsilon \int\limits_0^{t_\varepsilon} e^{-\lambda_1(t_\varepsilon - p)} \left(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1\right) dp, \tag{30}$$

де y_ε — *розв'язок задачі* (19) *на* $(0, t_\varepsilon),\ y_\varepsilon(0) = y_0$. *При цьому існує стала* $K > 0$, *що залежить лише від сталих задачі* (19), (24), *така, що*

$$\left| t_\varepsilon - \frac{1}{\lambda_1} \ln(1 + \mu) \right| \leq K\varepsilon \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1). \tag{31}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(\varepsilon,t)=a-a(1+\mu)e^{-\lambda_1 t}+\varepsilon\int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}\left(f(y_\varepsilon(p)),\psi_1\right)dp$$

і застосуємо до неї в околі $\varepsilon_0=0,\ t_0=\dfrac{1}{\lambda_1}\ln(1+\mu),\ 0=F(\varepsilon_0,t_0)$ теорему про неявну функцію. З оцінок

$$|F(\varepsilon,t_0)-F(\varepsilon_0,t_0)|\le\varepsilon\frac{C|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1},$$

$$\left|F(\varepsilon,t^{'})-F(\varepsilon,t^{''})-\frac{\partial F}{\partial t}(\varepsilon_0,t_0)(t^{'}-t^{''})\right|\le\left|\frac{\partial F}{\partial t}(\varepsilon,\theta t^{'}+(1-\theta)t^{''})-\frac{\partial F}{\partial t}(\varepsilon_0,t_0)\right|\left|t^{'}-t^{''}\right|\le$$

$$\le\left(\lambda_1^2a(1+\mu)\left(|t_0-t^{'}|+|t_0-t^{''}|\right)+2C|\Omega|^{\frac{1}{2}}\varepsilon\right)\left|t^{'}-t^{''}\right|$$

випливає, що існують сталі $K>0,\ \varepsilon_1>0$, які залежать лише від сталих у правих частинах вищенаведених нерівностей, та функція $t(\cdot)\colon(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\mapsto R$ такі, що

$$t(0)=t_0,\quad F(\varepsilon,t(\varepsilon))=0\quad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_1),\qquad|t(\varepsilon)-t(0)|\le K\varepsilon.$$

Покладаючи $t_\varepsilon=t(\varepsilon)$, отримуємо (30), (31).

Лему 3 доведено.

З (31) випливає, що $\tilde{V}_\varepsilon$ задовольняє умову (7). Крім того, оскільки

$$\left|e^{-\lambda_1 t_\varepsilon}-e^{-\lambda_1 t_0}\right|\le\lambda_1|t_\varepsilon-t_0|\le\lambda_1K\varepsilon,$$

то

$$e^{-\lambda_1 t_\varepsilon}\le e^{-\lambda_1 t_0}+\lambda_1K\varepsilon=\frac{1}{1+\mu}\left(1+\lambda_1K(\mu+1)\varepsilon\right).\tag{32}$$

Встановимо для імпульсної ДС $(X,\tilde{V}_\varepsilon)$ властивість дисипативності. Згідно з (21), (29) достатньо дослідити імпульсну траєкторію $y_\varepsilon(\cdot)$, $y_\varepsilon(0)=y_0$, з $(y_0,\psi_1)=a(1+\mu)$. Тоді з леми 3 маємо, що існують $\{s_i=s_i(\varepsilon)\}_{i=1}^\infty$ — розв'язки рівняння (30) такі, що траєкторія в моменти $\{s_1,s_1+s_2,\ldots\}$ зазнає імпульсного збурення, а між ними задовольняє умову (21). Нехай $y_\varepsilon(s_1)=a\psi_1+\sum_{i=2}^\infty c_i\psi_i$. Тоді

$$\|y_\varepsilon(s_1)\|^2=a^2+\sum_{i=2}^\infty c_i^2\le e^{-2\delta s_1}\|y_0\|^2,\qquad\delta:=\lambda_1-C\varepsilon>0,$$

$$Iy_\varepsilon(s_1)=a(1+\mu)\psi_1+\sum_{i=2}^\infty c_i\psi_i,$$

$$\|Iy_\varepsilon(s_1)\|^2=a^2(1+\mu)^2+\sum_{i=2}^\infty c_i^2=\|y_\varepsilon(s_1)\|^2+a^2\mu(2+\mu)\le e^{-2\delta s_1}\|y_0\|^2+a^2\mu(2+\mu),$$

$$\|y_\varepsilon(s_1+s_2)\|^2\le e^{-2\delta s_2}\|Iy_\varepsilon(s_1)\|^2\le e^{-2\delta(s_1+s_2)}\|y_0\|^2+a^2\mu(2+\mu)e^{-2\delta s_2},$$

$$\|Iy_\varepsilon(s_1+s_2)\|^2 \le \|y_\varepsilon(s_1+s_2)\|^2 + a^2\mu(2+\mu) \le e^{-2\delta(s_1+s_2)}\|y_0\|^2 + a^2\mu(2+\mu)\left(1+e^{-2\delta s_2}\right)$$

і т. д.

На k-тому кроці маємо

$$\|Iy_\varepsilon(s_1+\ldots+s_k)\|^2 \le e^{-2\delta(s_1+\ldots+s_k)}\|y_0\|^2+$$

$$+a^2\mu(2+\mu)\left(1+e^{-2\delta s_k}+e^{-2\delta(s_k+s_{k-1})}+\ldots+e^{-2\delta(s_k+s_{k-1}+\ldots+s_2)}\right). \tag{33}$$

Згідно з (32)

$$e^{-2\delta s_k} \le \left(\frac{1+\lambda_1 K(\mu+1)\varepsilon}{1+\mu}\right)^{\frac{2\delta}{\lambda_1}}, \qquad \delta = \lambda_1 - C\varepsilon. \tag{34}$$

Отже, існує $\varepsilon_2 \le \min\left\{\varepsilon_1, \dfrac{\mu}{\lambda_1 K(\mu+1)}\right\}$ таке, що для будь-яких $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ і $R > a$ існує $T = T(R,\varepsilon)$ таке, що для будь-якого y_0, $\|y_0\| \le R$, для розв'язку $y_\varepsilon(\cdot)$, $y_\varepsilon(0) = y_0$, імпульсної задачі (19), (24) має місце оцінка

$$\|y_\varepsilon(t)\|^2 \le 1 + 2a^2\mu(2+\mu) \qquad \forall\, t \ge T, \tag{35}$$

з якої випливає шукана дисипативність.

Доведемо асимптотичну компактність. Нехай $\{y_0^{(n)}\}$ — довільна обмежена послідовність початкових даних. Якщо по деякій підпослідовності відповідні розв'язки задачі (19) не зазнають імпульсних збурень при $t \ge 0$, то для $t_n \nearrow \infty$ з (21) маємо

$$\tilde{V}_\varepsilon\big(t_n, y_0^{(n)}\big) = V_\varepsilon\big(t_n, y_0^{(n)}\big) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{36}$$

де V_ε — напівгрупа, що породжується розв'язками задачі (19). Отже, будемо вважати, що $\big\|y_0^{(n)}\big\| \le R$ і для будь-якого $n \ge 1$ траєкторія розв'язку $y_n(\cdot)$, $y_n(0) = y_0^{(n)}$, задачі (19) в момент часу $T^{(n)}$ уперше зустрічається з множиною M, причому з (29) випливає, що послідовність $\{T^{(n)}\}$ є обмеженою, а з (21) — що послідовність $\big\{y_n(T^{(n)})\big\}$ є обмеженою в X. Таким чином, потрібно довести передкомпактність послідовності $\xi_n = \tilde{V}(t_n, z_n)$, де $(z_n, \psi_1) = a(1+\mu)$, $\|z_n\| \le R$.

Нехай $\big\{T_i^{(n)} = T_i^{(n)}(\varepsilon)\big\}_{i=1}^\infty$ — моменти імпульсного збурення траєкторії, що виходить з точки z_n, $\big\{\eta_i^{(n)+}\big\}_{i=1}^\infty \subset IM$ — відповідні імпульсні точки. Згідно з (31)

$$\left|T_i^{(n)} - i\frac{1}{\lambda_1}\ln(1+\mu)\right| \le K\varepsilon \qquad \forall\, i \ge 1.$$

Доведемо, що множина точок $\big\{\eta_i^{(n)+} \;\big|\; i \ge 1,\ n \ge 1\big\}$ — передкомпакт в X.

Для довільного розв'язку задачі (19) існують сталі $C_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, що залежать лише від параметрів задачі (19) і не залежать від ε, такі, що для $t > 0$

$$\frac{d}{dt}\|\nabla y(t)\|^2 \le C_1, \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2+\delta_1\|\nabla y(t)\|^2\le 0. \tag{38}$$

Тоді з (21), (37), (38) і рівномірної леми Гронуолла [12] випливає, що

$$\|\nabla y(t+r)\|^2\le \frac{2}{r\delta_1}\|y(0)\|^2+C_1 \qquad \forall\, t>0 \quad \forall\, r>0. \tag{39}$$

На підставі (33) існує стала $C(R)$, що не залежить від ε, така, що

$$\|\eta_i^{(n)+}\|\le C(R) \qquad \forall\, i\ge 1 \quad \forall\, n\ge 1.$$

Тоді з (31) і (39) для всіх $i\ge 1,\ n\ge 1$ випливає оцінка

$$\left\|\nabla\eta_i^{(n)+}\right\|^2\le(1+\mu)^2\left\|\nabla\eta_i^{(n)}\right\|^2\le(1+\mu)^2\left(\frac{4\lambda_1}{\delta_1\ln(1+\mu)}C^2(R)+C_1\right), \tag{40}$$

з якої внаслідок компактності вкладення $H_0^1(\Omega)\subset L^2\Omega)$ випливає шукана передкомпактність множини $\left\{\eta_i^{(n)+}\;\middle|\; i\ge 1,\ n\ge 1\right\}$ в X. Далі для послідовності $\xi_n=\tilde V(t_n,z_n)$ для кожного $n\ge 1$ існує номер $i=i(n)$, $i(n)\to\infty$, $n\to\infty$, такий, що

$$t_n\in\left[T_{i(n)}^{(n)},\ T_{i(n)+1}^{(n)}\right).$$

Отже,

$$\xi_n=V_\varepsilon\left(t_n-T_{i(n)}^{(n)},\ \eta_{i(n)}^{(n)+}\right). \tag{41}$$

Тоді по підпослідовності

$$\tau_n:=t_n-T_{i(n)}^{(n)}\to\tau, \qquad \eta_{i(n)}^{(n)+}\to\eta \quad \text{в} \quad X, \qquad n\to\infty,$$

і передкомпактність $\{\xi_n\}$ випливає з (23). Тепер з теореми 1 виводимо існування глобального атрактора

$$A(\varepsilon)=\bigcap_{T>0}\overline{\bigcup_{t\ge T}\tilde V_\varepsilon(t,B_0)}, \tag{42}$$

в якому множина дисипативності B_0 визначається з (35) і не залежить від ε. Отже, з (37), (40), (41) маємо обмеженість множин $A(\varepsilon)$ у просторі $H_0^1(\Omega)$ рівномірно по ε.

Доведемо збіжність (25). Для цього достатньо показати, що $\xi^{(k)}\in A(\varepsilon_k)$ для $\varepsilon_k\to 0$ по підпослідовності

$$\xi^{(k)}\to\xi\in A \quad \text{в} \quad X, \qquad k\to\infty. \tag{43}$$

З (42) випливає існування послідовностей $\{t_k\nearrow\infty\}$, $\{z_k\}\subset B_0$ таких, що

$$\|\xi^{(k)}-\tilde V_{\varepsilon_k}(t_k,z_k)\|\le\frac{1}{k} \qquad \forall\, k\ge 1.$$

Для $\xi_k=\tilde V_{\varepsilon_k}(t_k,z_k)$ з урахуванням (41) маємо зображення

$$\xi_k=V(\tau_k,\eta_k^+),$$

де

$$\tau_k = t_k - T_{i(k)}^{(k)+} \in \left[0, \frac{1}{\lambda_1}\ln(1+\mu) + K\varepsilon_k\right],$$

$$\eta_k^+ = \eta_{i(k)}^{(k)+}, \qquad i(k) \to \infty, \qquad k \to \infty.$$

При цьому внаслідок (40) і умов регулярності (23) можемо вважати, що

$$\tau_k \to \tau \in \left[0, \frac{1}{\lambda_1}\ln(1+\mu)\right],$$

$$\eta_k^+ \to \eta, \qquad \xi_k \to \xi = V(\tau, \eta) \quad \text{в} \quad X,$$

де V — напівгрупа, що породжується задачею (8). Тоді (43) буде доведено, якщо покажемо, що $\eta = a(1+\mu)\psi_1$, тобто для $\eta_k^+ = a(1+\mu)\psi_1 + \sum_{j=2}^{\infty} c_j^{(k)}\psi_j$ виконується

$$c_j^{(k)} = (\eta_k^+, \psi_j) \to 0 \quad \forall\, j \geq 2, \qquad k \to \infty.$$

Для кожного розв'язку задачі (19) справджується рівність

$$\frac{d}{dt}(y_\varepsilon(t), \psi_j) + \lambda_j(y_\varepsilon(t), \psi_j) + \varepsilon(f(y_\varepsilon(t)), \psi_j) = 0. \tag{44}$$

Враховуючи (32), можемо вважати, що існує стала $\gamma \in (0,1)$ така, що для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ для моментів імпульсного збурення $s_i = s_i(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$e^{-\lambda_j s_i} \leq \gamma \qquad \forall\, i \geq 1.$$

Тоді, враховуючи дисипативність, з (44) отримуємо

$$|(y_\varepsilon(s_i), \psi_j)| \leq R\gamma^i + \frac{C|\Omega|^{\frac{1}{2}}\varepsilon}{1-\gamma}.$$

Отже,

$$\left|(\eta_k^+, \psi_j)\right| \leq R\gamma^{i(k)} + \frac{C|\Omega|^{\frac{1}{2}}\varepsilon_k}{1-\gamma} \to 0, \qquad k \to \infty,$$

і теорему 2 доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Перестюк М. О.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
3. *Pavlidis T.* Stability of a class of discontinuous dynamical systems // Inform. and Contr. – 1996. – **9**. – P. 298 – 322.
4. *Рожко В. Ф.* Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 6. – С. 1005 – 1012.
5. *Kaul S. K.* On impulsive semidynamical system // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **150**, № 1. – P. 120 – 128.
6. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Stochast. Anal. – 1994. – **7**, № 4. – P. 509 – 523.
7. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – **52**. – P. 81 – 91.

8. *Akhmet M. U.* Perturbation and Hopf bifurcation of the planar discontinuous dynamical system // Nonlinear Anal. – 2005. – **60**. – P. 163 – 178.
9. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **332**. – P. 81 – 96.
10. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. – 2013. – **137**. – P. 617 – 642.
11. *Перестюк Ю. М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 494 – 503.
12. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
13. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. – Харьков: АСТА, 1999. – 418 с.
14. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. – Amer. Math. Soc., 2002. – 363 p.
15. *Kapustyan O. V., Perestyuk M. O.* Global attractor for an evolution inclusion with pulse influence at fixed moments of time // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1283 – 1294.
16. *Iovane G., Kapustyan O. V., Valero J.* Asymptotic behavior of reaction-diffusion equations with non-dumped impulsive effects // Nonlinear Anal. – 2008. – **68**. – P. 2516 – 2530.
17. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Long-time behaviour of evolution inclusion with non-dumped impulsive effects // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. – 2012. – **56**. – P. 89 – 113.
18. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J., Zgurovsky M. Z.* Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Contin. and Distrib. Syst. – 2014. – **211**. – P. 163 – 180.

Одержано 30.05.15