УДК 517.98+530.1

М. М. Рахматуллаев (Ин-т математики при Нац. ун-те Узбекистана, Ташкент)

О СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

We study the Potts model with external field on the Cayley tree of order $k \geq 2$. For the antiferromagnetic Potts model with external field and $k \geq 6$ and $q \geq 3$, it is shown that the weakly periodic Gibbs measure, which is not periodic, is not unique. For the Potts model with external field equal to zero, we also study weakly periodic Gibbs measures. It is shown that, under certain conditions, the number of these measures cannot be smaller than $2^q - 2$.

Вивчається модель Поттса із зовнішнім полем на дереві Келі порядку $k \geq 2$. Для антиферомагнітної моделі Поттса із зовнішнім полем при $k \geq 6$ і $q \geq 3$ показано неєдиність слабко періодичної міри Гіббса, що не є періодичною. Також вивчено слабко періодичні міри Гіббса для моделі Поттса з нульовим зовнішнім полем. Доведено, що при деяких умовах кількість таких мір може бути не меншою за $2^q - 2$.

1. Введение. Понятие меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли вводится обычным образом (см. [1 – 4]). В работе [5] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантные и несчетное число не трансляционно-инвариантных мер Гиббса. В работе [6] обобщены результаты работы [5] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка.

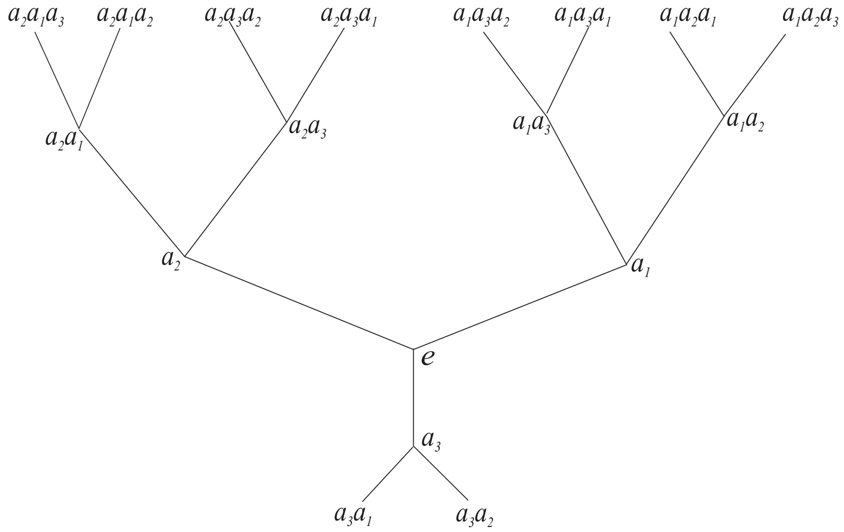
В работе [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В работе [9] найдены все трансляционно-инвариантные меры Гиббса и, в частности, показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$. Доказано, что существуют $[q/2]$ критических температур, и дано точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для каждой промежуточной температуры. Более того, существуют работы, обобщающие модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями (см. [14, 20, 21]).

В работах [10, 11] вводится понятие слабо периодической меры Гиббса и для модели Изинга найдены некоторые такие меры. В работе [19] также изучены слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга и найдены слабо периодические меры Гиббса, отличные от мер, полученных в работах [10, 11]. В работе [12] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. Полученные слабо периодические мери Гиббса в работе [12] также являются трансляционно-инвариантными.

В работе [13] доказано существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса, не являющихся трансляционно-инвариантными.

Данная работа посвящена слабо периодическим (непериодическим) мерам Гиббса для модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли. Во втором пункте введены основные определения и известные факты; в пункте 3 приведены результаты о слабо периодических мер Гиббса. Доказательства всех результатов приведены в пункте 4.



Дерево Кэли τ^2 и элементы группового представления вершин.

2. Определения и известные факты. Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1,$ — дерево Кэли порядка $k,$ т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Пусть G_k — свободное произведение $k+1$ циклической группы $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ соответственно, т. е. $a_i^2 = e$.

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k (см. [7, 15, 16]).

Это соответствие строится следующим образом. Произвольной фиксированной вершине $x_0 \in V$ поставим в соответствие единичный элемент e группы G_k. Поскольку рассматриваемый граф без ограничения общности можно считать плоским, то каждой соседней вершине точки x_0 (т. е. e) поставим в соответствие образующую $a_i, i = 1, 2, \ldots, k+1$ по положительному направлению (см. рисунок).

Теперь в каждой вершине a_i определим слово длины два a_ia_j соседних вершин a_i. Поскольку одна из соседних вершин вершины a_i есть e, положим $a_ia_i = e$, и тогда нумерация остальных соседних вершин a_i проводится однозначно по вышеприведенному правилу нумерации. Далее, для соседних вершин вершины a_ia_j определим слово длины три следующим образом. Так как одна из соседних для a_ia_j вершин есть a_i, положим $a_ia_ja_j = a_i$, и тогда нумерация остальных соседних вершин проводится однозначно и имеет вид $a_ia_ja_l, i, j, l = 1, 2, \ldots, k+1$. Это соответствие согласуется с предыдущим шагом, так как $a_ia_ja_j = a_ia_j^2 = a_i$. Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством вершин дерева Кэли τ^k и группой G_k.

Представление, построенное выше, называется правым, так как в этом случае, если x и y — соседние вершины, а g и $h \in G_k$ — соответствующие им элементы группы, то либо $g = ha_i$, либо $h = ga_j$ для некоторых i или j. Аналогично определяется левое представление.

Рассмотрим в группе G_k (соответственно на дереве Кэли) преобразование левого (правого) сдвига, определяемое следующим образом: для $g \in G_k$ положим

$$T_g(h) = gh, \qquad (T_g(h) = hg) \quad \forall h \in G_k.$$

Совокупность всех левых (правых) сдвигов на G_k изоморфна группе G_k.

Любое преобразование S группы G_k индуцирует преобразование $\widehat{S}$ на множестве вершин V дерева Кэли τ^k. Поэтому мы отождествляем V и G_k.

Теорема 1. *Группа левых* (*правых*) *сдвигов на правом* (*левом*) *представлении дерева Кэли является группой трансляций* (*см.* [7, 16]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \big\{\langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\big\}$, где $d(x,y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т. е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Обозначим через $S(x)$ множество „прямых потомков" точки $x \in G_k$, т. е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x,y) = 1\}$.

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Аналогично определяются конфигурации σ_n и ω_n на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (соответственно V_n, W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ $\big($соответственно $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}\big)$. Легко видеть, что $\Phi^{V_n} = \Phi^{V_{n-1}} \times \Phi^{W_n}$. Объединение конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ и $\omega_n \in \Phi^{W_n}$ определяется следующей формулой (см. [14]):

$$\sigma_{n-1} \vee \omega_n = \big\{\{\sigma_{n-1}(x), x \in V_{n-1}\}, \{\omega_n(y), y \in W_n\}\big\}.$$

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем α определяется так:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V} \delta_{1\sigma(x)}, \tag{1}$$

где J, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\right\}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ — температура, Z_n^{-1} — нормирующий множитель, $\big\{h_x = (h_{1,x}, \ldots, h_{q,x}) \in$ $\in R^q, x \in V\big\}$ — совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \alpha \sum_{x \in V_n} \delta_{1\sigma(x)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (2) согласованно, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in$ $\in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n\in\Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1}\vee\omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \tag{3}$$

Здесь $\sigma_{n-1}\vee\omega_n$ — объединение конфигураций, т. е. $\sigma_{n-1}\vee\omega_n \in \Phi^{V_n}$ такое, что $(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mid_{V_{n-1}}= = \sigma_{n-1}$ и $(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mid_{W_n}=\omega_n$. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n\in\Phi^{V_n}$

$$\mu\big(\{\sigma\mid_{V_n}=\sigma_n\}\big)=\mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (1) и векторнозначной функции $h_x,\ x\in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 2 [7]. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n),\ n=1,2,\ldots,$ в* (2) *является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x\in V$*

$$h_x=\sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta,\alpha), \tag{4}$$

где $F\colon h=(h_1,\ldots,h_{q-1})\in\mathbb{R}^{q-1}\to F(h,\theta,\alpha)=(F_1,\ldots,F_{q-1})\in\mathbb{R}^{q-1}$ определяется как

$$F_i=\alpha\beta\delta_{1i}+\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+1}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}\right)$$

и $\theta=\exp(J\beta)$, $S(x)$ — множество прямых потомков точки x.

Пусть $G_k/G_k^*=\{H_1,\ldots,H_r\}$ — фактор-группа, где G_k^* — нормальный делитель конечного индекса $r\geq 1$.

Определение 1. *Совокупность векторов $h=\{h_x,\ x\in G_k\}$ называется G_k^*-периодической, если $h_{yx}=h_x\ \forall x\in G_k, y\in G_k^*$; G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.*

Для $x\in G_k$ обозначим $x_\downarrow=\{y\in G_k\colon\langle x,y\rangle\}\setminus S(x)$.

Определение 2. *Совокупность векторов $h=\{h_x,\ x\in G_k\}$ называется G_k^*-слабо периодической, если $h_x=h_{ij}$ при $x\in H_i, x_\downarrow\in H_j\ \forall x\in G_k$.*

Определение 3. *Мера μ называется G_k^*-периодической (слабо периодической), если она соответствует G_k^*-периодической (слабо периодической) совокупности векторов h.*

3. Слабо периодические меры. Степень трудности задачи описания слабо периодических мер Гиббса зависит от структуры и индекса нормального делителя, относительно которого налагается условие периодичности. В работе [17] доказано, что в группе G_k не существует нормального делителя нечетного индекса, отличного от 1. Поэтому мы рассмотрим нормальные делители четного индекса. В настоящей работе ограничимся случаем индекса 2.

Пусть q — произвольное, т. е. $\sigma\colon V\to\Phi=\{1,2,3,\ldots,q\}$. В данной работе рассмотрим случай $q\geq 2$. Пусть $A\subset\{1,2,\ldots,k+1\}$. Известно, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид $H_A=\Big\{x\in G_k\colon \sum_{i\in A} w_x(a_i)$ — четно$\Big\}$, где $w_x(a_i)$ — число букв a_i в слове $x\in G_k$ [7]. Заметим, что в случае $|A|=k+1$ (где $|A|$ обозначает число элементов множества A), т. е. $A=N_k$, понятие слабой периодичности совпадает с обычной периодичностью.

Действительно, при $|A| = k+1$ имеем $H_A = \Big\{x \in G_k \colon \sum_{i\in A} w_x(a_i) - \text{четно}\Big\} = \big\{x \in G_k \colon |x| - \text{четно}\big\} = G_k^{(2)}$. Тогда $x_\downarrow \in G_k \setminus G_k^{(2)}$, если $x \in G_k^{(2)}$, и $x_\downarrow \in G_k^{(2)}$, если $x \in G_k \setminus G_k^{(2)}$. Отсюда с учетом определений $1-3$ следует, что в этом случае понятие слабой периодичности совпадает с обычной периодичностью. Поэтому рассмотрим $A \subset N_k$ такие, что $A \neq N_k$.

Пусть $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ — фактор-группа. Для простоты обозначим $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$. H_A-слабо периодические совокупности векторов $h = \{h_x \in R^{q-1} \colon x \in G_k\}$ имеют вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если} \quad x_\downarrow \in H_0, \quad x \in H_0, \\ h_2, & \text{если} \quad x_\downarrow \in H_0, \quad x \in H_1, \\ h_3, & \text{если} \quad x_\downarrow \in H_1, \quad x \in H_0, \\ h_4, & \text{если} \quad x_\downarrow \in H_1, \quad x \in H_1. \end{cases}$$

Здесь $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \ldots, h_{iq-1})$, $i = 1,2,3,4$. Тогда в силу (4) имеем

$$\begin{aligned} h_1 &= (k - |A|)F(h_1,\theta) + |A|F(h_2,\theta), \\ h_2 &= (|A| - 1)F(h_3,\theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4,\theta), \\ h_3 &= (|A| - 1)F(h_2,\theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1,\theta), \\ h_4 &= (k - |A|)F(h_4,\theta) + |A|F(h_3,\theta). \end{aligned} \tag{5}$$

Введем следующие обозначения: $e^{h_{ij}} = z_{ij}$, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,\ldots,q-1$. Тогда последнюю систему уравнений можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \exp(\alpha\beta\delta_{1j}) \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta}\right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta}\right)^{|A|}, \\ z_{2j} &= \exp(\alpha\beta\delta_{1j}) \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta}\right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta}\right)^{k+1-|A|}, \\ z_{3j} &= \exp(\alpha\beta\delta_{1j}) \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta}\right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta}\right)^{k+1-|A|}, \\ z_{4j} &= \exp(\alpha\beta\delta_{1j}) \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta}\right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta}\right)^{|A|}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots, q-1$.

Рассмотрим отображение $A\colon \mathbb{R}^{4(q-1)} \to \mathbb{R}^{4(q-1)}$, определенное в виде

$$z'_{1j} = \exp\left(\alpha\beta\delta_{1j}\right) \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta}\right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta}\right)^{|A|},$$

$$z'_{2j} = \exp\left(\alpha\beta\delta_{1j}\right) \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta}\right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta}\right)^{k+1-|A|},$$

$$z'_{3j} = \exp\left(\alpha\beta\delta_{1j}\right) \left(\frac{(\theta-1)z_{2j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta}\right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta-1)z_{1j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta}\right)^{k+1-|A|}, \tag{7}$$

$$z'_{4j} = \exp\left(\alpha\beta\delta_{1j}\right) \left(\frac{(\theta-1)z_{4j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta}\right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta-1)z_{3j} + \sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta}\right)^{|A|},$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots, q-1$.

Введем обозначения

$$I_m = \big\{(z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}\colon z_1 = z_2 = \ldots = z_m,\ z_{m+1} = \ldots = z_{q-1} = 1\big\}, \tag{8}$$

$$M_m = \big\{(z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}) \in \mathbb{R}^{4(q-1)}\colon z^{(i)} \in I_m,\ i = 1, 2, 3, 4\big\}. \tag{9}$$

Здесь $m = 1, 2, \ldots, q-1$.

Лемма 1. 1. *При $\alpha \neq 0$ множество M_1 является инвариантным относительно отображения A.*

2. *При $\alpha = 0$ множества $M_m, m = 1, 2, \ldots, q-1$, являются инвариантными относительно отображения A.*

Сначала рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Введем обозначения $z_i = z_{i1}$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $\lambda = \exp\left(\alpha\beta\right)$. Тогда на инвариантном множестве M_1 система уравнений (6) сводится к следующей системе уравнений:

$$z_1 = \lambda \left(\frac{\theta z_1 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_1}\right)^{k-|A|} \left(\frac{\theta z_2 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_2}\right)^{|A|},$$

$$z_2 = \lambda \left(\frac{\theta z_3 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_3}\right)^{|A|-1} \left(\frac{\theta z_4 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_4}\right)^{k+1-|A|}, \tag{10}$$

$$z_3 = \lambda \left(\frac{\theta z_2 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_2}\right)^{|A|-1} \left(\frac{\theta z_1 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_1}\right)^{k+1-|A|},$$

$$z_4 = \lambda \left(\frac{\theta z_4 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_4} \right)^{k-|A|} \left(\frac{\theta z_3 + q - 1}{\theta + q - 2 + z_3} \right)^{|A|}.$$

Обозначим

$$f(z) = \frac{\theta z + q - 1}{\theta + q - 2 + z}.$$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 2. *При* $0 < \theta < 1$ *функция* $f(z)$ *является строго убывающей, а при* $1 < \theta$ *— строго возрастающей.*

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ *— решение системы уравнений* (10). *Если* $z_i = z_j$ *при некоторых* $i \neq j$, *то* $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Рассмотрим антиферромагнитную модель Поттса с внешним полем, т. е. $0 < \theta < 1$. Предположим, что $|A| = k$, тогда система уравнений (10) примет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda\big(f(z_2)\big)^k, \\ z_2 &= \lambda\big(f(z_3)\big)^{k-1}\big(f(z_4)\big), \\ z_3 &= \lambda\big(f(z_2)\big)^{k-1}\big(f(z_1)\big), \\ z_4 &= \lambda\big(f(z_3)\big)^k. \end{aligned} \tag{11}$$

Изучение системы уравнений (11) сводится к изучению системы уравнений

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda\big(f(z_3)\big)^{k-1} f\left(\lambda(f(z_3))^k\right), \\ z_3 &= \lambda\big(f(z_2)\big)^{k-1} f\left(\lambda(f(z_2))^k\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначим

$$\psi(z) = \lambda\left(f(z)\right)^{k-1} f\left(\lambda(f(z))^k\right). \tag{13}$$

Тогда систему уравнений (12) можно записать в виде образом

$$\begin{aligned} z_2 &= \psi(z_3), \\ z_3 &= \psi(z_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Система уравнений (14) имеет столько решений, сколько решений имеет уравнение $\psi(\psi(z)) = z$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $\gamma\colon [0,1] \to [0,1]$ *— непрерывная функция с неподвижной точкой* $\xi \in (0,1)$. *Предположим, что функция* γ *дифференцируема в точке* $\xi \in (0,1)$ *и* $\gamma'(\xi) < -1$. *Тогда существуют такие* x_0, x_1, *что* $0 \leq x_0 < \xi < x_1 \leq 1$ *и* $\gamma(x_0) = x_1$, $\gamma(x_1) = x_0$ (*см.* [18, *с.* 70]).

Заметим, что уравнение $z = \lambda f^k(z)$ имеет единственное решение z_* (см. [4, с. 109]).

Утверждение 2. *При $k \geq 6$ и $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ система уравнений* (14) *имеет три решения вида (z_*, z_*), (z_2^*, z_3^*), (z_3^*, z_2^*), где $\lambda_i = b_i^k$, $i = 1, 2$, и*

$$b_1 = \frac{(k - 1 - \sqrt{k^2 - 6k + 1})(1 - \theta)(\theta + q - 1) z_*^{(k-1)/k}}{2(\theta + q - 2 + z_*)^2},$$
$$b_2 = \frac{(k - 1 + \sqrt{k^2 - 6k + 1})(1 - \theta)(\theta + q - 1) z_*^{(k-1)/k}}{2(\theta + q - 2 + z_*)^2}. \tag{15}$$

В результате в силу теоремы 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *При $|A| = k$, $k \geq 6$, и $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ для антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем существует не менее двух H_A-слабо периодических* (*непериодических*) *мер Гиббса, где $\alpha_i = kT \ln b_i$, T — температура.*

***Замечание* 1.** 1. Условие $k \geq 6$ необходимо для того, чтобы выполнялось $k^2 - 6k + 1 \geq 0$. Поэтому в случаях $2 \leq k \leq 5$ использованный в этой работе метод не подходит и задача остается открытой.

2. Задача изучения слабо периодических (непериодических) мер Гиббса для нормальных делителей других четных индексов для модели Поттса с ненулевым внешним полем является открытой.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Тогда система уравнений (6) на инвариантном множестве M_m сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(\frac{(\theta + m + 1) z_1 + q - m}{m z_1 + \theta + q - m - 1}\right)^{k - |A|} \left(\frac{(\theta + m + 1) z_2 + q - m}{m z_2 + \theta + q - m - 1}\right)^{|A|}, \\
z_2 &= \left(\frac{(\theta + m + 1) z_3 + q - m}{m z_3 + \theta + q - m - 1}\right)^{|A| - 1} \left(\frac{(\theta + m + 1) z_4 + q - m}{m z_4 + \theta + q - m - 1}\right)^{k + 1 - |A|}, \\
z_3 &= \left(\frac{(\theta + m + 1) z_2 + q - m}{m z_2 + \theta + q - m - 1}\right)^{|A| - 1} \left(\frac{(\theta + m + 1) z_1 + q - m}{m z_1 + \theta + q - m - 1}\right)^{k + 1 - |A|}, \\
z_4 &= \left(\frac{(\theta + m + 1) z_4 + q - m}{m z_4 + \theta + q - m - 1}\right)^{k - |A|} \left(\frac{(\theta + m + 1) z_3 + q - m}{m z_3 + \theta + q - m - 1}\right)^{|A|}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим

$$f_m(z) = \frac{(\theta + m + 1) z + q - m}{m z + \theta + q - m - 1}.$$

Легко доказать, что при $0 < \theta < 1$ функция $f_m(z)$ является строго убывающей, а при $1 < \theta$ — строго возрастающей.

Аналогично утверждению 1 можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — решение системы уравнений* (16). *Если $z_i = z_j$ при некоторых $i \neq j$, то $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.*

Рассмотрим случай $0 < \theta < 1$ и $|A| = k$, тогда система уравнений (16) принимает вид

$$\begin{aligned} z_1 &= (f_m(z_2))^k, \\ z_2 &= (f_m(z_3))^{k-1}(f_m(z_4)), \\ z_3 &= (f_m(z_2))^{k-1}(f_m(z_1)), \\ z_4 &= (f_m(z_3))^k. \end{aligned} \tag{17}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $|A| = k$ *и* $k \geq 6$. *Если выполняется одно из следующих условий*:

1) $\dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}} \leq q < \dfrac{4k}{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}}$ *и* $0 < \theta < \theta_2$;

2) $q \leq \dfrac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}$ *и* $\theta_1 < \theta < \theta_2$,

то существует не менее $2^q - 2$ *слабо периодических (непериодических) мер Гиббса, где*

$$\theta_1 = \frac{4\,k - kq - q - q\sqrt{k^2 - 6\,k + 1}}{4k}, \qquad \theta_2 = \frac{4\,k - kq - q + q\sqrt{k^2 - 6\,k + 1}}{4k}.$$

***Замечание* 2.** 1. Функционирующие в теоремах 3 и 4 H_A-слабо периодические меры являются новыми и дают возможность описать континуум множества непериодических гиббсовских мер, отличных от известных ранее.

2. Если вместо (9) рассматривать M_{q-1}, то теорема 4 совпадает с теоремой 3 из работы [13].

3. В случае $q = 2$ модель Поттса описывает модель Изинга. При $|A| = k$, $q = 2$ теорема 4 совпадает с теоремой 4 из работы [19], а случай $|A| = 1$, $q = 2$ изучен в работах [10, 11].

4. Задача изучения слабо периодических (непериодических) мер Гиббса для нормальных делителей других четных индексов для модели Поттса с нулевым внешним полем является открытой.

4. Доказательства. ***Доказательство леммы* 1.** 1. Пусть $\mathbf{z} = (z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}) \in M_1$. Тогда $z^{(i)} \in I_1$, $i = 1, 2, 3, 4$. По обозначению (8) имеем $z^{(i)} = (z_i, 1, 1, \ldots, 1)$, где $z_i \neq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Отсюда и из (7) получаем

$$z'_{1j} = \left(\frac{\theta + q - 2 + z_1}{\theta + q - 2 + z_1}\right)^{k-|A|} \left(\frac{\theta + q - 2 + z_2}{\theta + q - 2 + z_2}\right)^{|A|} = 1, \quad j = 2, 3, \ldots, q - 1,$$

$$z'_{2j} = \left(\frac{\theta + q - 2 + z_3}{\theta + q - 2 + z_3}\right)^{|A|-1} \left(\frac{\theta + q - 2 + z_4}{\theta + q - 2 + z_4}\right)^{k+1-|A|} = 1, \quad j = 2, 3, \ldots, q - 1,$$

$$z'_{3j} = \left(\frac{\theta + q - 2 + z_2}{\theta + q - 2 + z_2}\right)^{|A|-1} \left(\frac{\theta + q - 2 + z_4}{\theta + q - 2 + z_4}\right)^{k+1-|A|} = 1, \quad j = 2, 3, \ldots, q - 1,$$

$$z'_{4j} = \left(\frac{\theta + q - 2 + z_4}{\theta + q - 2 + z_4}\right)^{k-|A|} \left(\frac{\theta + q - 2 + z_3}{\theta + q - 2 + z_3}\right)^{|A|} = 1, \quad j = 2, 3, \ldots, q - 1.$$

Следовательно, $A(\mathbf{z}) \in L_1$.

Вторая часть леммы доказывается аналогично.

***Доказательство утверждения* 1.** Из системы уравнений (10) получаем следующие равенства:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)}\right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)}\right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_4)}\right), \tag{18}$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \left(\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right), \tag{19}$$

$$\frac{z_1}{z_4} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)}\right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)}\right)^{|A|}, \tag{20}$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \left(\frac{f(z_3)}{f(z_2)}\right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_4)}{f(z_1)}\right)^{k-|A|+1}, \tag{21}$$

$$\frac{z_2}{z_4} = \left(\frac{f(z_4)}{f(z_3)}\right), \tag{22}$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \left(\frac{f(z_1)}{f(z_4)}\right)^{k-|A|} \left(\frac{f(z_2)}{f(z_3)}\right)^{|A|-1} \left(\frac{f(z_1)}{f(z_3)}\right). \tag{23}$$

Пусть $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ — решение системы уравнений (10) и $z_1 = z_2$. Тогда из строгой монотонности функции $f(z)$ и из равенства (19) имеем $z_1 = z_2 = z_3$. В этом случае из (21) получаем $z_1 = z_4$, следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Пусть $z_1 = z_3$. Тогда из строгой монотонности функции $f(z)$ и из равенства (19) находим $z_1 = z_2 = z_3$. В этом случае из (21) получаем $z_1 = z_4$, следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Пусть $z_1 = z_4$. Тогда из строгой монотонности функции $f(z)$ и из равенства (20) имеем $z_2 = z_3$. В этом случае из (22) получаем равенства

$$z_2 f(z_2) = z_4 f(z_4). \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $\phi(z) = z f(z) = z\dfrac{\theta z + q - 1}{\theta + q - 2 + z}$ и вычислим ее производную:

$$\phi'(z) = \frac{\theta z^2 + 2\theta(\theta + q - 2)z + (q-1)(\theta + q - 2)}{(\theta + q - 2 + z)^2}.$$

Из $\theta > 0$, $z > 0$ и $q \geq 2$ следует, что функция $\phi(z)$ является строго возрастающей. Следовательно, (24) выполняется только при $z_2 = z_4$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Утверждение доказано.

***Доказательство утверждения* 2.** Легко видеть, что для функции (13) справедливы следующие утверждения:

1) $\psi(z_*) = z_*$,

2) функция $\psi(z)$ определена на $\mathbb{R}_+$,

3) $\psi(z)$ является ограниченной и дифференцируемой в точке z_*.

Тогда по лемме 1 при $\psi'(z_*) < -1$ система уравнений (14) имеет три решения вида (z_*, z_*), (z_2^*, z_3^*), (z_3^*, z_2^*). Неравенство $\psi'(z_*) < -1$ эквивалентно следующему неравенству:

$$k\frac{(1-\theta)^2(\theta+q-1)^2 {z_*^2}^{\frac{k-1}{k}}}{(\theta+z_*+q-2)^4} + b(k-1)\frac{(1-\theta)(\theta+q-1)z_*^{\frac{k-1}{k}}}{(\theta+z_*+q-2)^2} + b^2 < 0,$$

где $b = \sqrt[k]{\lambda}$. Следовательно,

$$(b-b_1)(b-b_2) < 0,$$

где b_1, b_2 определены в (15).

Утверждение 2 доказано.

***Доказательство теоремы* 4.** Изучение системы уравнений (17) сводится к изучению системы уравнений

$$\begin{aligned} z_2 &= \big(f_m(z_3)\big)^{k-1} f_m\big((f_m(z_3))^k\big), \\ z_3 &= \big(f_m(z_2)\big)^{k-1} f_m\big((f_m(z_2))^k\big). \end{aligned} \tag{25}$$

Если ввести обозначение

$$\varphi(z) = (f_m(z))^{k-1} f_m((f_m(z))^k), \tag{26}$$

то система уравнений (25) сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} z_2 &= \varphi(z_3), \\ z_3 &= \varphi(z_2). \end{aligned} \tag{27}$$

Легко видеть, что для функции (26) справедливы следующие утверждения:

1) $\varphi(1) = 1$,

2) функция $\varphi(z)$ определена на $\mathbb{R}_+$,

3) $\varphi(z)$ является ограниченной и дифференцируемой в точке $z = 1$.

Тогда по лемме 3 при $\varphi'(1) < -1$ система уравнений (27) имеет три решения вида (1, 1), (z_2^*, z_3^*), (z_3^*, z_2^*). Неравенство $\varphi'(1) < -1$ эквивалентно неравенству

$$k\frac{(\theta-1)^2}{(\theta+q-1)^2} + (k-1)\frac{\theta-1}{\theta+q-1} + 1 < 0. \tag{28}$$

Следовательно,

$$2k(\theta-\theta_1)(\theta-\theta_2) < 0,$$

где θ_1, θ_2 определены в (12).

Ясно, что если $k < 5$, то θ_1, θ_2 являются комплексными, а если $k = 5$, то $\theta_1 = \theta_2$ и неравенство (28) не имеет решения.

Теперь рассмотрим случай $k \geq 6$. Предположим, что θ_1, θ_2 одновременно отрицательные, тогда (28) не имеет решения. Если $\theta_1 \leq 0, 0 < \theta_2 < 1$, т. е.

$$\frac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}} \leq q < \frac{4k}{k+1-\sqrt{k^2-6k+1}},$$

то неравенство (28) имеет решение $\theta \in (0, \theta_2)$. Это доказывает первый пункт теоремы 3.

Теперь докажем второй пункт. Пусть $0 \leq \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$, тогда выполняется неравенство

$$q \leq \frac{4k}{k+1+\sqrt{k^2-6k+1}}.$$

В этом случае неравенство (28) имеет решение $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Легко проверить, что θ_1, θ_2 не могут быть больше, чем 1. В результате в силу теоремы 2 при каждом m и при выполнении условий теоремы 4 получим две слабо периодические (непериодические) меры Гиббса. Из (8) видно, что m — количество отличных от 1 координат вектора из $\mathbb{R}^{q-1}$. Очевидно, что количество таких векторов равно $\sum_{m=1}^{q-1} C_{q-1}^m = 2^{q-1} - 1$. Следовательно, при выполнении условий теоремы 4 получим $2(2^{q-1} - 1) = 2^q - 2$ слабо периодические (непериодические) меры Гиббса.

Теорема 4 доказана.

Автор выражает глубокую признательность профессору У. А. Розикову за постановку задачи и полезные советы.

Литература

1. *Георги Х. О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. – М.: Мир, 1992. – 624 с.
2. *Preston C. J.* Gibbs states on countable sets // Cambridge Tracts Math. – 1974. – **68**.
3. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. – М.: Мир, 1980. – 208 с.
4. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees. – World Sci., 2013. – 385 p.
5. *Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка // Теор. и мат. физика. – 1990. – **85**, № 2. – С. 163 – 175.
6. *Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса на решетке Бете // Докл. Республики Узбекистан. – 1992. – **6-7**. – С. 4 – 7.
7. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 1997. – **111**, № 1. – С. 109 – 117.
8. *Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A.* The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree // Lett. Math. Phys. – 2006. – **75**, № 2. – P. 99 – 109.
9. *Külske C., Rozikov U. A., Khakimov R. M.* Description of translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree // J. Statist. Phys. – 2014. – **156**, № 1. – P. 189 – 200.
10. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2008. – **156**, № 2. – С. 292 – 302.
11. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2009. – **160**, № 3. – С. 507 – 516.
12. *Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2013. – **176**, № 3. – С. 477 – 493.
13. *Рахматуллаев М. М.* Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. – 2014. – **180**, № 3. – С. 1018 – 1028.

14. *Ganikhodjaev N. N., Mukhamedov F. M., Mendes J. F. F.* On the three state Potts model with competing interactions on the Bethe lattice // J. Statist. Mech. – 2006. – 29 p.
15. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Групповое представление леса Кэли и его некоторые применения // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 1. – С. 21 – 32.
16. *Ганиходжаев Н. Н* Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. Республики Узбекистан. – 1994. – **4**. – С. 3 – 5.
17. *Норматов Э. П., Розиков У. А.* Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли // Мат. заметки. – 2006. – **79**, № 3. – С. 434 – 444.
18. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth.I // Adv. Appl. Probab. – 1970. – **2**. – P. 1 – 82.
19. *Рахматуллаев М. М.* О новых слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 11. – С. 54 – 63.
20. *Mukhamedov F., Rozikov U., Mendes J. F. F.* On contour arguments for the three state Potts model with competing interactions on a semi-infinite Cayley tree // J. Math. Phys. – 2007. – № 1. – 14 p.
21. *Ostilli M., Mukhamedov F.* Continuous- and discrete-time Glauber dynamics. First- and second-order phase transitions in mean-field Potts models // Eur. Phys. Lett. – 2013. – **101**.

Получено 07.04.15,
после доработки — 08.09.15