УДК 517.988.63

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

We establish necessary and sufficient conditions for the invertibility of nonlinear differentiable maps in the case of arbitrary Banach spaces. We establish conditions for the existence and uniqueness of bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential and difference equations.

Приведены необходимые и достаточные условия обратимости нелинейных дифференцируемых отображений в случае произвольных банаховых пространств. Получены условия существования и единственности ограниченных и почти периодических решений нелинейных дифференциальных и разностных уравнений.

1. Загальні теореми про оборотність диференційовних відображень. Спочатку наведемо допоміжні результати про умови оборотності нелінійного відображення $F\colon X \to Y$, де X і Y — довільні банахові простори над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно.

1.1. Диференційовні відображення та дифеоморфізми класу C^k. Зазначимо, що потрібні для подальшого позначення та означення запозичено в [1, 2].

Використаємо банаховий простір $L(X,Y)$ лінійних неперервних операторів $A\colon X \to Y$ з операторною нормою. Позначимо через $L^k(X,Y)$, $k \in \mathbb{N}$, банаховий простір неперервних k-лінійних відображень із X в Y. Очевидно, що $L^{k+1}(X,Y) = L(X, L^k(X,Y))$ і $L^1(X,Y) = L(X,Y)$.

Нехай $U \subset X$ і $V \subset Y$ — відкриті множини і $(Df)_x$ — похідна Фреше відображення $f\colon U \to V$ в точці $x \in U$. Відображення f називається C^1*-відображенням*, якщо f диференційовне в кожній точці $x \in U$ і природне відображення $Df\colon U \to L(X,Y)$ є неперервним. Аналогічно, відображення f називається C^{k+1}*-відображенням*, якщо $D^k f$ диференційовне в кожній точці $x \in U$ і відображення $D^{k+1} f\colon U \to L^{k+1}(X,Y)$ є неперервним. C^{k+1}-відображення f ще називають *диференційовним відображенням* класу C^{k+1}. Нарешті, f — C^∞-відображення, якщо це відображення є C^k-відображенням для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Відображення $f\colon U \to V$ називається C^k*-дифеоморфізмом* або *дифеоморфізмом* класу C^k, якщо f гомеоморфно відображає U на V і відображення f та f^{-1} є C^k-відображеннями.

Локальним C^k*-дифеоморфізмом у точці* $x \in X$ називається відображення $f\colon X \to Y$, для якого існує такий окіл $U \subset X$ точки x, що звуження $f|_U$ відображення f на U встановлює C^k-дифеоморфізм між U і відкритою підмножиною простору Y.

1.2. Теорема про обернену функцію. Важливою для з'ясування умов оборотності нелінійних диференційовних відображень є теорема про обернену функцію.

Теорема 1. *Нехай X і Y — банахові простори, $U \subset X$ — відкрита множина і $k \in \mathbb{N}$.*

C^k-відображення $F\colon U \to Y$ є локальним C^k-дифеоморфізмом у точці $x_0 \in U$ тоді і тільки тоді, коли похідна $(DF)_{x_0}\colon X \to Y$ є неперервно оборотним оператором.

Обґрунтування твердження цієї теореми наведено в [3].

Теорема 1 спрощує отримання умов оборотності диференційовних відображень.

1.3. Умови оборотності диференційовних відображень. Основними у цьому підпункті є такі два твердження.

© В. Ю. СЛЮСАРЧУК, 2016

Теорема 2. *Нехай X і Y — банахові простори, $k \in \mathbb{N}$ і $F\colon X \to Y$ — C^k-відображення. Відображення $F\colon X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення F сюр'єктивне*;

2) *відображення F ін'єктивне*;

3) *відображення F є локальним C^k-дифеоморфізмом у кожній точці $x \in X$.*

Теорема 3. *Нехай X і Y — банахові простори, $k \in \mathbb{N}$ і $F\colon X \to Y$ — C^k-відображення. Відображення $F\colon X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення F сюр'єктивне*;

2) *відображення F ін'єктивне*;

3) *похідна $(DF)_x\colon X \to Y$ є неперервно оборотним оператором для кожної точки $x \in X$.*

Завдяки теоремі 1 теореми 2 і 3 є рівносильними.

***Доведення теореми* 2.** Нехай відображення F є C^k-дифеоморфізмом. Тоді це відображення має неперервне обернене відображення, і тому виконуються умови 1 і 2. Умова 3 також виконується, оскільки відображення F є C^k-дифеоморфізмом. Отже, із C^k-дифеоморфізму відображення F випливає виконання умов теореми.

Навпаки, нехай виконуються умови теореми. З умов 1 і 2 теореми випливає, що відображення F має обернене відображення F^{-1}. Тому на підставі умови 3 теореми відображення F гомеоморфно відображає X на Y, а відображення F і F^{-1} є C^k-відображеннями.

Таким чином, із умов теореми випливає, що відображення $F\colon X \to Y$ є C^k-дифеоморфізмом.

Теорему 2 доведено.

1.4. Інтегральна умова ін'єктивності диференційовного відображення. Корисними є наступні умови ін'єктивності відображення F.

Зафіксуємо довільні точки $x_1, x_2 \in X$. Позначимо через $\Omega(x_1, x_2, X)$ множину всіх C^1-відображень $x\colon J \to X$ $\big(J$ — довільний інтервал, що містить у собі відрізок $[0,1]\big)$, для кожного з яких

$$x(0) = x_1$$

і

$$x(1) = x_2.$$

Очевидно, що для довільних відображення $x \in \Omega(x_1, x_2, X)$ і числа $t \in [0,1]$

$$(DF)_{x(t)} x'(t) = \frac{dF(x(t))}{dt},$$

і тому на підставі формули Ньютона – Лейбніца

$$\int\limits_0^1 (DF)_{x(t)} x'(t)\, dt = F(x_2) - F(x_1). \tag{1}$$

Отже, завдяки (1) справджується наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо відображення* $F\colon X \to Y$ *є ін'єктивним, то для будь-яких точок* $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, *і відображення* $z \in \Omega(x_1, x_2, X)$ *виконується співвідношення*

$$\int\limits_0^1 (DF)_{z(t)} z'(t)\, dt \neq 0. \tag{2}$$

Якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, *і відображення* $z \in \Omega(x_1, x_2, X)$ *виконується співвідношення* (2), *то відображення* $F\colon X \to Y$ *є ін'єктивним.*

***Зауваження* 1.** У теоремі 4 можна обмежитися використанням лише одного C^1-відображення, що визначається формулою

$$z = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad t \in [0, 1].$$

Тоді співвідношення (2) набирає вигляду

$$\int\limits_0^1 (DF)_{x_1 + t(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1)\, dt \neq 0. \tag{3}$$

***Зауваження* 2.** Виконання співвідношення (3) аналогічне виконанню для лінійного неперервного оператора $A\colon X \to Y$ співвідношення $\ker A = \{0\}$ (у теоремі Банаха про обернений оператор [4]). Якщо $F(x) = Ax$, то $(DF)_x = A$ для всіх $x \in X$, і тому

$$\int\limits_0^1 (DF)_{x_1 + t(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1)\, dt = A(x_2 - x_1).$$

Отже, якщо $\int_0^1 (DF)_{x_1 + t(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1)\, dt \neq 0$ для всіх $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то $\ker A = \{0\}$, і навпаки.

1.5. Достатні умови сур'єктивності та ін'єктивності неперервного відображення. Використаємо поняття відкритого відображення, тобто відображення, що кожну відкриту множину відображає у відкриту множину.

Справджується наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай для неперервного відображення* $H : X \to Y$, *де* X *і* Y — *банахові простори*, *виконуються такі умови*:

1) *справджується співвідношення*

$$\inf_{x_1, x_2 \in X;\ x_1 \neq x_2} \frac{\|Hx_1 - Hx_2\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} > 0;$$

2) *відображення* $H : X \to Y$ *є відкритим.*

Тоді відображення $H : X \to Y$ *є сур'єктивним та ін'єктивним.*

Доведення. Спочатку покажемо, що множина значень $R(H)$ відображення H є замкненою. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ елементів множини $R(H)$, тобто послідовність, для якої $\lim_{n,m\to\infty}\|y_n - y_m\|_Y = 0$. Використаємо послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ елементів простору X, для якої $Hx_n = y_n$, $n \geq 1$. Завдяки першій умові теореми $\lim_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m\|_X = 0$, тобто послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ є фундаментальною. Тому на підставі повноти простору X існує елемент $x_0 \in X$, для якого $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді внаслідок неперервності відображення H справджується рівність $\lim_{n\to\infty} Hx_n = Hx_0$, тобто $\lim_{n\to\infty} y_n = Hx_0$.

Отже, множина $R(H)$ є замкненою.

Далі покажемо, що

$$R(H) = Y. \tag{4}$$

Припустимо, що це співвідношення не виконується.

Зафіксуємо довільні точки $y^* \in R(H)$ і $y^{**} \in Y \setminus R(H)$. Розглянемо відрізок прямої, що з'єднує ці точки, тобто множину $P = \{y^* + t(y^{**} - y^*) : t \in [0,1]\}$. Ця множина, як і множина $R(H)$, є замкненою.

Тоді виконується співвідношення

$$\inf_{v\in R(H)\cap P}\|v - y^{**}\|_E > 0. \tag{5}$$

Справді, якщо деяка послідовність $v_n \in R(H)\cap P$, $n \geq 1$, збігається до y^{**}, то завдяки замкненості множини $R(H)\cap P$ виконується включення $y^{**} \in R(H)$, що неможливо.

Оскільки замкнена множина $R(H)\cap P$ — підмножина множини P і P — компактна множина, то множина $R(H)\cap P$ також є компактною. Тому існує точка $z \in R(H)\cap P$, для якої

$$\inf_{v\in R(H)\cap P}\|v - y^{**}\|_E = \|z - y^{**}\|_E.$$

Звідси та з (5) отримуємо

$$\big\{z + t(y^{**} - z) : t \in (0,1]\big\} \subset Y \setminus R(H). \tag{6}$$

Нехай u — така точка простору X, що $Hu = z$. Завдяки другій умові теореми для кожної відкритої множини G, що містить точку u, множина HG містить точку z і є відкритою, а це суперечить (6).

Отже, припущення про невиконання співвідношення (4) є хибним.

Таким чином, відображення $H : X \to Y$ є сур'єктивним.

Ін'єктивність відображення H, очевидно, випливає з першої умови теореми.

Теорему 5 доведено.

***Зауваження* 3.** З умов теореми, очевидно, випливає не тільки сур'єктивність та ін'єктивність неперервного відображення $H : X \to Y$, а і неперервність оберненого відображення H^{-1}. Отже, H гомеоморфно відображає X на Y.

Застосуємо наведені вище результати до дослідження нелінійних диференціальних і різницевих рівнянь та відповідних операторів.

2. Умови обмеженості та майже періодичності розв'язків нелінійних диференціальних і різницевих рівнянь. У цьому пункті ми розглянемо випадок, коли F є диференціальним або різницевим оператором.

2.1. C^1-залежність розв'язків рівняння $Fx = y$ від y. Для відображення $F\colon X \to Y$, що досліджувалось у підпунктах 1.2 – 1.4, розглянемо функціональне рівняння

$$Fx = y, \tag{7}$$

де y — довільний елемент простору Y.

Припустимо, що рівняння (7) для кожного $y \in Y$ має єдиний розв'язок $x \in X$. Очевидно, що в цьому випадку оператор $F\colon X \to Y$ має обернений F^{-1}, а розв'язок x рівняння (7) є функцією від $y \in Y$, тобто

$$x = x(y). \tag{8}$$

Якщо відображення $x\colon Y \to X$, що визначається за допомогою (8), є C^1-відображенням, то залежність розв'язку x рівняння (7) від y називатимемо *C^1-залежністю*. Очевидно, що існує оператор $B_y \in L(Y, X)$, неперервно залежний від $y \in Y$, такий, що виконується співвідношення

$$\big\|x(y+h) - x(y) - B_y h\big\|_X = o\big(\|h\|_Y\big)$$

при $h \to 0$ для всіх $y \in Y$. Оскільки $x(y) = F^{-1}y$, то справджується наступне твердження.

Теорема 6. *C^1-залежність розв'язку x рівняння* (7) *від y рівносильна C^1-дифференційовності відображення F^{-1}.*

Очевидно, що $B_y = \big(DF^{-1}\big)_y$.

Аналогічним чином можна визначити C^k-залежність x від y, якщо $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

У подальшому поняття C^1-залежності розв'язків рівняння (7) від y використаємо при дослідженні диференціальних і різницевих рівнянь.

2.2. Умови існування та єдиності обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Нехай E — довільний банаховий простір. Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, Z)$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в банаховому просторі Z з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},Z)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_Z,$$

а через $C^1(\mathbb{R}, Z)$ банаховий простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, Z)$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt} \in C^0(\mathbb{R}, Z)$, з нормою

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},Z)} = \max\left\{ \|x\|_{C^0(\mathbb{R},Z)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},Z)} \right\}.$$

У випадку $Z = E$ простори $C^0(\mathbb{R}, Z)$ і $C^1(\mathbb{R}, Z)$ будемо позначати через C^0 і C^1 відповідно.

У просторі C^0 визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Елемент $y \in C^k,\ k = \{0,1\}$, називається *майже періодичним* (див. [5]), якщо замикання множини $\{S_h y \colon h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору.

Множини B^0 і B^1 майже періодичних елементів просторів C^0 і C^1 є підпросторами цих просторів відповідно з нормами

$$\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$$

і

$$\|x\|_{B^1} = \|x\|_{C^1}.$$

Оператор $A \in L(C^i, C^j),\ i,j \in \{0,1\}$, називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_\tau A S_{-\tau} \colon \tau \in \mathbb{R}\}$ у просторі $L(C^i, C^j)$ є компактним у цьому просторі.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(t, x(t)) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де $y \in C^0$ і $g \colon \mathbb{R} \times E \to E$ — неперервне відображення, що задовольняє умови:

1) функція $z = g(t, x(t))$ є елементом простору C^0 для кожного $x \in C^1$;

2) для кожної точки $(t,z) \in \mathbb{R} \times E$ існує частинна похідна $(D_x g)_{(t,z)}$ відображення $g = g(t,x)$ у точці (t,z) по змінній x;

3) частинна похідна $(D_x g)_{(t,z)}$ неперервна на $\mathbb{R} \times E$ і задовольняє співвідношення

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| (D_x g)_{(t,u(t))} \right\|_{L(E,E)} < \infty$$

для кожної функції $u \in C^1$;

4) для кожної функції $u \in C^1$ виконується співвідношення

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| g(t, u(t) + h(t)) - g(t, u(t)) - (D_x g)_{(t,u(t))} h(t) \right\|_E = o\big(\|h\|_{C^1}\big)$$

при $h \to 0$;

5) відображення $T \colon C^1 \to C^0(\mathbb{R}, L(E,E))$, що визначається формулою

$$(Tu)(t) = (D_x g)_{(t,u(t))}, \quad t \in \mathbb{R},$$

неперервне в кожній точці $u \in C^1$.

Розглянемо задачу про умови існування та єдиності обмежених (або майже періодичних) розв'язків рівняння (9) для кожної функції $y \in C^0$ (або $y \in B^0$), а також C^1-залежності цих розв'язків від y.

Зазначимо, що розв'язання цієї задачі є нетривіальним навіть у лінійному випадку (див., наприклад, [6–15]).

Для розв'язання поставленої задачі розглянемо допоміжне відображення $H \colon C^1 \to C^0$, що визначається лівою частиною рівняння (9), тобто співвідношенням

$$(Hx)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + g(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

За допомогою цього відображення рівняння (9) можна записати у вигляді

$$(Hx)(t) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Зауважимо, що відображення $H : C^1 \to C^0$ є C^1-відображенням завдяки умовам $1-5$ і для похідної Фреше цього відображення виконується співвідношення

$$((DH)_u x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + (D_x g)_{(t,u(t))} x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

для всіх $u \in C^1$.

Отже, до рівнянь (9) і (11) застосовна теорема 3.

На підставі теорем 3 і 6 справджується наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай для відображення* $g : \mathbb{R} \times E \to E$ *виконуються умови* $1-5$.

Для того щоб диференціальне рівняння (9) *для кожної функції* $y \in C^0$ *мало єдиний розв'язок* $x \in C^1$ *і мала місце* C^1*-залежність цього розв'язку від* y, *необхідно і достатньо, щоб*:

1) *рівняння* (9) *для кожної функції* $y \in C^0$ *мало хоча б один розв'язок* $x \in C^1$;

2) *для всіх функцій* $x_1, x_2 \in C^1$, $x_1 \neq x_2$, *виконувалося співвідношення*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + g(t, x_1(t)) \not\equiv \frac{dx_2(t)}{dt} + g(t, x_2(t)); \tag{13}$$

3) *для кожної функції* $u \in C^1$ *діючий із простору* C^1 *у простір* C^0 *оператор*

$$(L_u z)(t) = \frac{dz(t)}{dt} + (D_x g)_{(t,u(t))} z(t) \tag{14}$$

мав неперервний обернений.

***Зауваження* 4.** У теоремі 7 замість співвідношення (13) можна використовувати співвідношення

$$\frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + \int_0^1 (D_x g)_{(t, x_1(t) + \tau(x_2(t) - x_1(t)))} (x_2(t) - x_1(t))\, d\tau \not\equiv 0, \tag{15}$$

аналогічне (3). Співвідношення (15) — наслідок співвідношень (3) і (12). У деяких випадках перевірка виконання співвідношення (15) може бути простішою, ніж перевірка виконання співвідношення (13), що підтверджується наступним прикладом.

***Приклад*.** За допомогою теореми 7 дослідимо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)) = y(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Тут $y \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - C^\infty$-відображення, що визначається рівністю

$$f(x) = x + \sum_{k=0}^{500} \frac{1001!}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \mathrm{ch}\, x - \sum_{k=0}^{500} \frac{1001!}{(2k)!}\, x^{2k} \mathrm{sh}\, x, \tag{17}$$

де

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

і

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Легко перевірити, що

$$(Df)_x = f'(x) = 1 + x^{1001} \operatorname{sh} x, \tag{18}$$

$$f'(x) \geqslant 1 \tag{19}$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$ і відображення $(Df)_y \colon C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається співвідношенням

$$((Df)_y z)(t) = f'(y(t))z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

неперервно залежить від $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Отже, оператор $L_y \colon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається співвідношенням

$$(L_y z)(t) = \frac{dz(t)}{dt} + f'(y(t))z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

має неперервний обернений L_y^{-1} для кожної функції $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Легко перевірити, що

$$\left(L_y^{-1} h\right)(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t f'(y(\tau))\, d\tau} h(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тому для диференціального рівняння (16) виконується третя умова теореми 7.

Перевіримо для рівняння (16) виконання другої умови теореми 7.

Очевидно, що перевірка виконання співвідношення (13) для всіх $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_1 \neq x_2$, — важка задача завдяки (17). На підставі (18) простіше перевірити виконання співвідношення (15).

У випадку рівняння (16) співвідношення (15) набирає вигляду

$$\frac{d(x_2(t) - x_1(t))}{dt} + \int\limits_0^1 f'(x_1(t) + \tau(x_2(t) - x_1(t)))(x_2(t) - x_1(t))\, d\tau \not\equiv 0 \tag{20}$$

для всіх $x_1, x_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_1 \neq x_2$.

Припустимо, що це співвідношення не виконується, тобто для деяких $x_1^*, x_2^* \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x_1^* \neq x_2^*$,

$$\frac{d(x_2^*(t) - x_1^*(t))}{dt} + \int\limits_0^1 f'\Big(x_1^*(t) + \tau\big(x_2^*(t) - x_1^*(t)\big)\Big)(x_2^*(t) - x_1^*(t))\, d\tau \equiv 0.$$

Помноживши обидві частини цієї тотожності на $x_2^*(t) - x_1^*(t)$ і врахувавши, що

$$\frac{d(x_2^*(t) - x_1^*(t))}{dt}\,(x_2^*(t) - x_1^*(t)) = \frac{1}{2}\,\frac{d(x_2^*(t) - x_1^*(t))^2}{dt},$$

отримаємо

$$\frac{d(x_2^*(t)-x_1^*(t))^2}{dt}+2\int\limits_0^1 f'(x_1^*(t)+\tau(x_2^*(t)-x_1^*(t)))(x_2^*(t)-x_1^*(t))^2\,d\tau\equiv 0.$$

Звідси, із нерівності $x_1^*\neq x_2^*$ і (19) випливає, що

$$\lim_{t\to-\infty}(x_2^*(t)-x_1^*(t))^2=+\infty.$$

Ця рівність суперечить обмеженості функцій x_1^* і x_2^*.

Отже, припущення про невиконання співвідношення (20) є хибним.

Таким чином, для рівняння (16) друга умова теореми 7 виконується.

Перша умова теореми 7 також виконується, оскільки на підставі (19) множина значень функції f збігається з $\mathbb{R}$, а ця властивість f є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння (16) мало хоча б один розв'язок $x\in C^1$ для кожної функції $y\in C^0$ (див. [16 – 18]).

Очевидно, що для відображення $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ умови 1 – 5 виконуються.

Таким чином, завдяки теоремі 7 диференціальне рівняння (16) для кожної функції $y\in C^0$ має єдиний розв'язок $x\in C^1$ і має місце C^1-залежність цього розв'язку від y.

Зазначимо, що на підставі теореми 6 теорема 7 рівносильна наступній теоремі про умови, коли диференціальний оператор $H: C^1\to C^0$ є C^1-дифеоморфізмом.

Теорема 8. *Нехай для відображення* $g:\mathbb{R}\times E\to E$ *виконуються умови* 1 – 5.

Відображення $H: C^1\to C^0$, *що визначається рівністю* (10), *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення* H *є сур'єктивним*;

2) *відображення* H *є ін'єктивним*;

3) *оператор* $L_u: C^1\to C^0$, *що визначається рівністю* (14), *є неперервно оборотним оператором для кожної точки* $u\in C^1$.

***Зауваження* 5.** Умови оборотності лінійного диференціального оператора L_u у теоремах 7 і 8 можна знайти, наприклад, у [8, 12 – 15].

Далі наведемо аналоги теорем 7 і 8 у випадку майже періодичного рівняння (9).

Оскільки в теоремі 3 банахові простори X і Y довільні, то на підставі цієї теореми і теореми 6 справджуються наступні твердження.

Теорема 9. *Нехай для відображення* $g:\mathbb{R}\times E\to E$ *виконуються умови* 1 – 5, $Hz\in B^0$ *для кожної функції* $z\in B^1$ *і оператор* $G_y: C^1\to C^0$, *що визначається співвідношенням*

$$(G_yu)(t)=(D_xg)_{(t,y(t))}u(t), \tag{21}$$

є майже періодичним елементом простору $L(C^1,C^0)$ *для всіх* $y\in B^1$.

Для того щоб диференціальне рівняння (9) *для кожної функції* $y\in B^0$ *мало єдиний розв'язок* $x\in B^1$ *і мала місце* C^1*-залежність цього розв'язку від* y, *необхідно і достатньо, щоб*:

1) *рівняння* (9) *для кожної функції* $y\in B^0$ *мало хоча б один розв'язок* $x\in B^1$;

2) *для всіх функцій* $x_1,x_2\in B^1$, $x_1\neq x_2$, *виконувалося співвідношення* (13) (*або рівносильне йому співвідношення* (15));

3) *для кожної функції* $u \in B^1$ *діючий із простору* B^1 *у простір* B^0 *оператор*

$$(L_u z)(t) = \frac{dz(t)}{dt} + (D_x g)_{(t,u(t))} z(t)$$

мав неперервний обернений.

Теорема 10. *Нехай для відображення* $g\colon \mathbb{R} \times E \to E$ *виконуються умови* 1 – 5, $Hz \in B^0$ *для кожної функції* $z \in B^1$ *і оператор* $G_y : C^1 \to C^0$, *що визначається співвідношенням* (21), *є майже періодичним елементом простору* $L(C^1, C^0)$.

Відображення $H : B^1 \to B^0$, *що визначається рівністю* (10), *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення* H *є сур'єктивним*;

2) *відображення* H *є ін'єктивним*;

3) *оператор* $L_u\colon B^1 \to B^0$, *що визначається рівністю* (14), *є неперервно оборотним оператором для кожної точки* $u \in B^1$.

***Зауваження* 6.** Умови оборотності лінійного майже періодичного оператора L_u в теоремах 9 і 10 можна знайти, наприклад, в [7 – 11, 15].

***Зауваження* 7.** Інші умови існування обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь можна знайти в [19 – 26].

2.3. Умови існування та єдиності обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь. Цей підпункт — дискретний аналог попереднього підпункту.

Нехай E_n, $n \in \mathbb{Z}$, — банахові простори, $\|\cdot\|_{E_n}$ — норма в E_n і $\mathfrak{M}$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)$, для кожної з яких $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}.$$

Позначимо через $\mathfrak{N}$ банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{A} = (A_n)$, для кожної з яких $A_n \in L(E_{n-1}, E_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathfrak{N}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_{n-1}, E_n)}.$$

Розглянемо рівняння

$$x_n + g_n(x_{n-1}) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

де $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{M}$ і $g_n : E_{n-1} \to E_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — C^1-відображення, що задовольняють умови:

а) двостороння послідовність $\mathbf{z} = (g_n(x_{n-1}))$ є елементом простору $\mathfrak{M}$ для кожного $\mathbf{x} = (x_n) \in \mathfrak{M}$;

б) похідна Фреше $(Dg_n)_x$ відображення g_n у точці $x \in E_{n-1}$ задовольняє співвідношення

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(Dg_n)_{u_n}\|_{L(E_{n-1}, E_n)} < \infty$$

для кожного елемента $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$;

в) для кожної послідовності $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|g_n(u_n + h_n) - g_n(u_n) - (Dg_n)_{u_n} h_n\|_{E_n} = o\left(\|\mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}\right)$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, де $\mathbf{0}$ — нульовий елемент простору $\mathfrak{M}$;

г) відображення $T\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, що визначається за допомогою формули

$$(T\mathbf{u})_n = (Dg_n)_{u_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

неперервне в кожній точці $\mathbf{u} = (u_n) \in \mathfrak{M}$.

Розглянемо задачу про умови існування та єдиність у просторі $\mathfrak{M}$ розв'язків рівняння (22) для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, а також C^1-залежність цих розв'язків від $\mathbf{y}$. Зауважимо, що цю задачу у випадку лінійного рівняння (22) розв'язано в [27].

Для розв'язання поставленої задачі розглянемо допоміжне відображення $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається співвідношенням

$$(\Phi\mathbf{x})_n = x_n + g_n(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

За допомогою цього відображення рівняння (22) можна записати у вигляді

$$(\Phi\mathbf{x})_n = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Зауважимо, що в силу умов а) – г) відображення $\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є C^1-відображенням і для похідної Фреше цього відображення у точці $\mathbf{u} \in \mathfrak{M}$ виконується співвідношення

$$((D\Phi)_{\mathbf{u}}\mathbf{x})_n = x_n + (Dg_n)_{u_{n-1}} x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

Отже, до рівнянь (22) і (23) застосовна теорема 3.

Враховуючи теорему 3 і те, що C^1-залежність розв'язку $\mathbf{x}$ рівняння (22) від $\mathbf{y}$ рівносильна C^1-диференційовності відображення $\Phi^{-1} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ (див. теорему 6), приходимо до наступного твердження.

Теорема 11. *Нехай для C^1-відображень $g_n : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{Z}$, виконуються умови* а) – г).

Різницеве рівняння (22) *для кожної послідовності* $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ *має єдиний розв'язок* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ *і має місце C^1-залежність цього розв'язку від* $\mathbf{y}$ *тоді і тільки тоді, коли*:

1) *рівняння* (22) *для кожної послідовності* $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ *має хоча б один розв'язок* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$;

2) *для всіх послідовностей* $\mathbf{x}^* = (x_n^*)$, $\mathbf{x}^{**} = (x_n^{**}) \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{**}$, *виконується співвідношення*

$$x_n^* + g_n(x_{n-1}^*) \not\equiv x_n^{**} + g_n(x_{n-1}^{**}); \tag{25}$$

3) *лінійний різницевий оператор* $(D\Phi)_{\mathbf{u}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *має неперервний обернений для кожної послідовності* $\mathbf{u} \in \mathfrak{M}$.

***Зауваження* 8.** У теоремі 11, як і в теоремі 7, замість співвідношення (25) можна використовувати співвідношення

$$x_n^{**} - x_n^* + \int\limits_0^1 (Dg_n)_{x_{n-1}^* + \tau(x_{n-1}^{**} - x_{n-1}^*)} (x_{n-1}^{**} - x_{n-1}^*)\, d\tau \not\equiv \mathbf{0}, \tag{26}$$

аналогічне співвідношенню (3) (співвідношення (26) випливає з (3) і (24)).

Зазначимо, що на підставі теореми 4 теорема 11 рівносильна наступній теоремі про умови, коли різницевий оператор $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є C^1-дифеоморфізмом.

Теорема 12. *Нехай для C^1-відображень $g_n\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{Z}$, виконуються умови* а) – г).

Різницевий оператор $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю (23), *є C^1-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді, коли*:

1) *відображення Φ є сур'єктивним*;

2) *відображення Φ є ін'єктивним*;

3) *відображення $(D\Phi)_{\mathbf{u}}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є неперервно оборотним відображенням для кожної точки $\mathbf{u} \in \mathfrak{M}$.*

Далі розглянемо випадок майже періодичного рівняння (22).

Припустимо, що всі банахові простори E_n, $n \in \mathbb{Z}$, збігаються з банаховим простором E.

Для довільного $m \in \mathbb{Z}$ визначимо оператор зсуву $S_m\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ за допомогою співвідношення

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Послідовність $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ називається *майже періодичною*, якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{x}\colon m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ компактне у цьому просторі.

Очевидно, що множина $\mathfrak{B}$ всіх майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є банаховим простором з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Оператор $A \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ називається *майже періодичним*, якщо замикання множини $\{S_mAS_{-m}\colon m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ компактне у цьому просторі.

Оскільки в теоремі 3 банахові простори X і Y довільні, то на підставі цієї теореми і теореми 4 справджуються наступні твердження.

Теорема 13. *Нехай $E_n = E$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, відображення $g_n\colon E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, задовольняють умови* а) – г), *послідовність $\mathbf{u} = (g_n(z_n))$ є майже періодичною для всіх $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{B}$ і оператор $G_{\mathbf{y}}\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, що визначається співвідношенням*

$$(G_{\mathbf{y}}\mathbf{u})_n = (Dg_n)_{y_{n-1}}u_n, \tag{27}$$

є майже періодичним елементом простору $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ для всіх $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{B}$.

Різницеве рівняння (22) *для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{B}$ має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$ і має місце C^1-залежність цього розв'язку від $\mathbf{y}$ тоді і тільки тоді, коли*:

1) *рівняння* (22) *для кожної послідовності $\mathbf{y} \in \mathfrak{B}$ має хоча б один розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}$*;

2) *для всіх послідовностей $\mathbf{x}^* = (x_n^*)$, $\mathbf{x}^{**} = (x_n^{**}) \in \mathfrak{B}$, $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{**}$, виконується співвідношення* (25) (*або рівносильне йому співвідношення* (26));

3) *лінійний різницевий оператор*

$$(R_{\mathbf{u}}\mathbf{z})_n = z_n + (Dg_n)_{u_{n-1}}z_{n-1},$$

що діє у просторі $\mathfrak{B}$, має неперервний обернений для кожної послідовності $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}$.

Теорема 14. *Нехай* $E_n = E$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, *відображення* $g_n : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, *задовольняють умови* а) – г), *послідовність* $\mathbf{u} = (g_n(z_n))$ *є майже періодичною для всіх* $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathfrak{B}$ *і оператор* $G_{\mathbf{y}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, *що визначається співвідношенням* (27), *є майже періодичним елементом простору* $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ *для всіх* $\mathbf{y} = (y_n) \in \mathfrak{B}$.

Різницевий оператор $\Phi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, *що визначається рівністю* (23), *є* C^1*-дифеоморфізмом тоді і тільки тоді*, *коли*:

1) *відображення* Φ *є сур'єктивним*;

2) *відображення* Φ *є ін'єктивним*;

3) *відображення* $(D\Phi)_{\mathbf{u}} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ *є неперервно оборотним відображенням для кожної точки* $\mathbf{u} \in \mathfrak{B}$.

***Зауваження* 9.** Умови оборотності лінійного майже періодичного різницевого оператора $R_{\mathbf{u}}$ в теоремах 13 і 14 можна знайти, наприклад, у [27].

***Зауваження* 10.** Інші умови існування обмежених і майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь можна знайти у [28 – 31].

Література

1. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
2. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. – М.: Мир, 1977. – 292 с.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність теореми про обернену функцію для диференційовних функцій // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**, № 4. – С. 112 – 113.
4. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища шк., 1974. – 456 с.
5. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119 – 147. – II Teil. – P. 383 – 409.
6. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
7. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
9. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
10. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
11. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических *c*-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116(158)**, № 4(12). – С. 483 – 501.
12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.
13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно *c*-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
15. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
16. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, № 4. – С. 181 – 182.
17. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523 – 539.

18. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **65**, № 1-3. – P. 333 – 341.
19. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 319 с.
20. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
21. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541 – 1556.
22. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
23. *Слюсарчук В. Е.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685 – 1698.
24. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135 – 160.
25. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**, № 2. – P. 97 – 119.
26. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139 – 160.
27. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 109 – 115.
28. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 368 – 378.
29. *Слюсарчук В. Ю.* Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 4. – С. 536 – 555.
30. *Слюсарчук В. Ю.* Нелінійні різницеві рівняння у просторах обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 528 – 538.
31. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 416 – 425.

Одержано 07.07.15