УДК 517.98+517.954

Ю. В. Богданский (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЛАПЛАСИАНА ПО МЕРЕ В ОБЛАСТИ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

We obtain the maximum principle for two versions of the Laplacian with respect to the measure, namely, for the “classical” and “L^2” versions in a domain of the Hilbert space.

В області гільбертового простору одержано принцип максимуму для двох версій оператора Лапласа за мірою: „класичної” та „L^2-версії”.

В настоящей работе рассматриваются две версии оператора Лапласа в области гильбертова пространства и для них доказываются соответствующие принципы максимума. Обе версии оператора Лапласа основаны на понятии дифференцируемости меры вдоль векторного поля. Вторая (L^2-версия) оперирует такими понятиями, как поверхностная мера (ассоциированная с мерой в исходном пространстве) и след на границе области функции соболевского класса.

Конструкция поверхностной меры в бесконечномерном пространстве впервые была предложена в работах А. В. Скорохода (см., например, [1]). Несколько иной подход был развит в серии работ А. В. Угланова (см., например, [2]). Конструкция А. В. Угланова позволяет применять поверхностные меры к исследованию ряда задач для дифференциальных уравнений с частными производными в банаховых пространствах (и в пространствах Фреше). Однако его подход требует наложения весьма жестких ограничений на рассматриваемые поверхности. Оба подхода были основаны на понятии дифференцируемости меры вдоль постоянных направлений.

Для гауссовских мер некоторые результаты, связанные с поверхностными мерами, были получены рядом авторов (см., например, [3]), а в работе [4] для гауссовских мер предложена конструкция мер на поверхностях уровня соболевских функций. В работе В. И. Богачева [5] на основе метода П. Маллявэна приведена конструкция построения поверхностных мер для более общих (не обязательно гауссовских) гладких мер, а в работах О. В. Пугачева этот подход получил дальнейшее развитие (см., например, [6]).

Результаты, полученные в данной работе, основаны на альтернативной конструкции поверхностной меры, которая предполагает возможность дифференцировать меру в исходном пространстве вдоль некоторого гладкого векторного поля, трансверсального к заданной поверхности. Этот подход предполагает гладкость исходной поверхности и допускает обобщение — построение мер на незамкнутых поверхностях конечной коразмерности.

Дифференцируемость мер вдоль векторных полей была (неявно) введена в работах [7, 8] (см. [8] и приведенную в ней библиографию). Явная конструкция логарифмической производной меры вдоль векторного поля и исследование достаточных условий ее существования приведены в работе Ю. Л. Далецкого [9].

Следует также отметить серию работ, посвященную исследованию поверхностных мер, ассоциированных с гауссовскими мерами в сепарабельном банаховом пространстве. В этих работах на основе метода П. Маллявэна разработана схема построения следов соболевских функций на поверхностях уровня и приведены соответствующие формулы интегрирования по частям. Полученные результаты применяются при построении слабых решений эллиптических краевых задач. Одни из последних работ в этом направлении — работы [10, 11] (см. также приведенную в них библиографию).

Подход, на основе которого в работах автора введен оператор следа, отличен от подхода из работы [11] и аналогичен конструкции построения оператора следа в классической конечномерной теории.

1. Предварительные сведения. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство ($\dim H \le \infty$), μ — неотрицательная конечная борелевская мера на H, G — ограниченная область с границей $S = \partial G$.

Пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на H обозначим через $C_b = C_b(H)$. Символом $C_b^p = C_b^p(H)$ обозначим пространство всех p раз дифференцируемых по Фреше вещественных функций f на H с непрерывными и равномерно ограниченными на H производными $f^{(k)}(\cdot)$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Аналогично введем пространство $C_b(H; H)$ непрерывных и ограниченных векторных полей на H, $C_b^1(H; H)$ — пространство непрерывно дифференцируемых векторных полей на H, ограниченных с равномерно ограниченной на H сильной производной.

Через $C^p(\bar{G})$ обозначим семейство всех функций на $\bar{G}$, допускающих продолжение на H до функций класса C_b^p, через $C_0^1(G)$ — подмножество в $C^1(\bar{G})$, состоящее из функций, каждая из которых равна нулю в некоторой ε-окрестности границы S. Аналогично определяем $C(\bar{G})$ и $C(\bar{G}; H)$.

Пусть $\mathbf{X} \in C^1(H; H)$ и $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{X}}$ — поток векторного поля $\mathbf{X}$. Дифференцируемость меры μ вдоль поля $\mathbf{X}$ понимаем в сильном смысле: для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ существует предел $\vartheta(A) = \lim_{t \to 0} \dfrac{1}{t}(\mu(\Phi_t A) - \mu(A))$, откуда следует, что $\vartheta = d_{\mathbf{X}}\mu$ является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Функцию $\dfrac{d\vartheta}{d\mu}$ (логарифмическую производную меры μ вдоль поля $\mathbf{X}$, или дивергенцию поля $\mathbf{X}$ относительно меры μ) обозначим через $\operatorname{div}_\mu \mathbf{X}$.

„Классическую” версию оператора Лапласа по мере μ для функции $u \in C_b^2$ определим как дивергенцию поля $\mathbf{grad}\, u \in C_b^1(H; H)$ относительно меры μ: $\Delta_\mu u = \operatorname{div}_\mu(\mathbf{grad}\, u)$.

Через $L^2(G) = L^2(G; \mu)$ обозначим пространство $\mu|_G$-интегрируемых с квадратом измеримых функций на G. Аналогично через $L^2(G; H) = L^2(G; H; \mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых (по Бохнеру) векторных полей на G. $L^2(G; H)$ наделяется структурой гильбертова пространства со скалярным произведением $(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) = \displaystyle\int_G (\mathbf{Z}(\cdot), \mathbf{W}(\cdot))d\mu$ и соответствующей нормой $|||\mathbf{Z}|||$.

Условимся говорить, что граница S области G „согласована с мерой μ”, если она является гладкой вложенной в H поверхностью коразмерности 1. Поле единичной внешней нормали границы S продолжимо до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H; H)$, и при этом мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Согласование S с мерой μ приводит к равенству $\mu(S) = 0$ (см. [12]).

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную борелевскую меру [12, 13], которую обозначим через σ. Один из эквивалентных способов задания этой меры состоит в следующем: для борелевского множества $A \subset S$ множество $\hat{A} = \Phi^{\mathbf{n}}_{(-\infty;0]} A := \bigcup_{s \le 0} \Phi_s^{\mathbf{n}} A$ является борелевским в H, $\sigma(A) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi_t^{\mathbf{n}} \hat{A}$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{grad} : L^2(G) \to L^2(G; H)$ с естественной областью определения $C^1(\bar{G})$ ($C^1(\bar{G}) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in C(G; H)$). Для корректного задания этого оператора необходимо выполнение следующего условия: равенство $u = v \pmod{\mu|_G}$ $(u, v \in C^1(\bar{G}))$ влечет за собой равенство $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \pmod{\mu|_G}$. Данное требование выполнено для тех мер μ, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества U. Последнее условие следует из условия квазиинвариантности меры μ на $(H, \mathfrak{B}(H))$ (существование плотного в H линейного многообразия квазиинвариантных сдвигов h для меры μ $(\mu_h(B) := \mu(B + h);\ \mu_h \sim \mu)$). Примером такой меры является гауссова мера μ в H, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Дальнейшие построения предполагают выполнение следующих двух дополнительных условий на меру μ:

а) оператор **grad** корректно определен и допускает замыкание;

б) $\mathrm{div}_\mu \mathbf{n}|_G \in L^\infty(G)$.

Примером такой меры, согласованной с поверхностью S и удовлетворяющей условиям а) и б), является мера μ_φ — „сглаженная" вдоль поля $\mathbf{n}$ гауссова мера μ, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H (см. [14]). Сглаженная мера μ_φ строится по следующему принципу: пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt < \infty$ и существует константа $C > 0$, для которой неравенство $|\varphi'(s)| \leq C\varphi(s)$ выполнено при всех $s \in \mathbb{R}$ $\left(\text{например, } \varphi(s) = \dfrac{1}{1+s^2}\right)$. На борелевских множествах $A \in \mathfrak{B}(H)$ значение меры μ_φ определяется равенством

$$\mu_\varphi(A) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mu(\Phi_t^{\mathbf{n}} A)dt. \tag{1}$$

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа $\gamma\colon L^2(G;\mu) \to L^2(S;\sigma) = L^2(S)$ с областью определения $D(\overline{\mathbf{grad}})$ (см. [13]). При этом для $u \in C^1(\bar{G})$ справедливо равенство $\gamma(u) = u|_S$; оператор γ представляет собой ограниченный оператор из банахова (в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$) пространства $D(\overline{\mathbf{grad}})$ в $L^2(S)$.

В работе [15] доказано, что множество $C_0^1(G)$ плотно в $\mathrm{Ker}\,\gamma$ (в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$).

Оператор $\mathrm{div} : L^2(G;H) \to L^2(G)$ определим формулой

$$\mathrm{div} = -(\mathbf{grad}\,|_{C_0^1(G)})^* = -(\overline{\mathbf{grad}}|_{\mathrm{Ker}\,\gamma})^*, \tag{2}$$

L^2-версию оператора Лапласа введем равенством $\Delta_G u = \Delta u = \mathrm{div} \circ \overline{\mathbf{grad}} u$.

Аргументацией данного определения может служить формула

$$\int_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z})d\mu + \int_G u \cdot \mathrm{div}_\mu \mathbf{Z} d\mu = 0,$$

справедливая для $\mathbf{Z} \in C^1(H;H)$; $u \in C_0^1(G)$ (см., например, [15]).

2. Классическая версия.

Теорема 1. *Пусть* $u \in C^2(\bar{G})$, μ *дифференцируема вдоль поля* $\mathbf{grad}\, u$ *и* $\Delta_\mu u \geq 0$ $\pmod{\mu|_G}$. *Предположим также, что* $\mu(U) > 0$ *для каждого непустого открытого множества* $U \subset G$. *Тогда* $\sup_G u = \sup_S u$.

Доказательство. Неравенство $\sup_G u \geq \sup_S u$ очевидно. Пусть существует точка $x_0 \in G$, для которой $u(x_0) > \sup_S u$.

Допустим, что для векторного поля $\mathbf{Z} = \mathbf{grad}\, u$ имеет место неравенство $\mathbf{Z}(x_0) \neq 0$. Тогда открытое множество $D = \{x \in G \mid u(x) > u(x_0)\}$ непусто. Пусть Φ_t — поток поля $\mathbf{Z}$. При каждом $t > 0$ имеют место вложение $\Phi_t D \subset D$ и неравенство $u(\Phi_t x_0) > u(x_0)$, поэтому существует окрестность $V = V(t)$ точки x_0, для которой $V \cap \overline{\Phi_t D} = \varnothing$. При этом $V \cap D$ открыто и непусто, $V \cap D \subset D \setminus \Phi_t D$, поэтому при каждом $t > 0$ выполнено неравенство $u(\Phi_t D) < u(D)$.

С другой стороны, при каждом $t \geq 0$ имеет место неравенство $\dfrac{d}{dt}\mu(\Phi_t D) = \displaystyle\int_{\Phi_t D} \mathrm{div}_\mu \mathbf{Z} d\mu =$ $= \displaystyle\int_{\Phi_t D} \Delta_\mu u d\mu \geq 0$. Полученное противоречие приводит к выводу, что $\mathbf{Z}(x_0) = 0$. Тем самым доказано, что $(u(x) > \sup_S u) \Rightarrow ((\mathbf{grad}\, u)(x) = 0)$.

Теперь выберем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $F_\varepsilon = \{x \in G \mid u(x) > \sup_S u + \varepsilon\}$, $\overline{F_\varepsilon} \subsetneqq G$, F_ε открыто. Если x_0 — предельная точка F_ε, то в некоторой окрестности точки x_0 имеет место неравенство $u(x) > \sup_S u$. В силу доказанного выше u постоянна в этой окрестности, поэтому $x_0 \in F_\varepsilon$. Итак, F_ε открыто и замкнуто, $F_\varepsilon = \varnothing$ в силу связности G. Утверждение теоремы теперь следует из произвольности $\varepsilon > 0$.

***Следствие* 1.** *Задача Дирихле в области G для уравнения Лапласа $\Delta_\mu u = 0 \pmod{\mu|_G}$ имеет в классе функций $C^2(\bar{G})$ не более одного решения.*

3. L^2-версия. Пусть G — ограниченная область в H, граница которой S согласована с мерой μ, выполнены условия а), б) из п. 1 и $\gamma\colon D(\overline{\mathbf{grad}}) \to L^2(S)$ — оператор следа.

Теорема 2. *Пусть $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$. Тогда имеет место неравенство*

$$\operatorname*{ess\,sup}_S \gamma(u) \leq \operatorname*{ess\,sup}_G u.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$(u \in D(\overline{\mathbf{grad}}),\ \ u \geq 0 \pmod{\mu|_G}) \ \ \Rightarrow\ \ (\gamma(u) \geq 0 \pmod{\sigma}).$$

Шаг 1. Докажем, что $C^1(S) := \{f|_S \mid f \in C_b^1(H)\}$ плотно в $L^2(S, \sigma)$.

Поскольку S — полное сепарабельное метрическое пространство, мера σ является радоновской. Потому достаточно показать, что индикатор любого компактного множества $A \subset S$ аппроксимируется в $L^2(S)$ функциями из $C^1(S)$.

Поскольку A замкнуто в H, то $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_{1/n} = \bigcap_{n=1}^\infty (A_{1/n} \cap S)$ (здесь A_ε — ε-окрестность множества A в H).

Зафиксируем $\delta > 0$. Существует такое $\beta > 0$, для которого $\sigma((A_{3\beta} \setminus A) \cap S) < \delta$. Также существует множество $B = \bigcup_{k=1}^m B(x_k; \beta)$ ($B(x; \varepsilon)$ — шар в H с центром в точке x радиуса ε), для которого имеют место вложения $A \subset B \subset B_{2\beta} \subset A_{3\beta}$. Для завершения доказательства достаточно для каждого $\varepsilon > 0$ доказать существование функции $u \in C_b^1$, для которой $0 \leq$ $\leq u(x) \leq 1 + \varepsilon$ для $x \in H$, $|u(x) - 1| < \varepsilon$ для $x \in B$ и $u(x) = 0$ для $x \notin B_{2\beta}$.

Для одного шара $B(x_k; \beta)$ возьмем функцию $v_k(x) = h(\|x - x_k\|)$, $h \in C^1(\mathbb{R})$, $h(t) = 1$ при $t \leq \beta$, $h(t) = 0$ при $t > 2\beta$ и $0 \leq h(t) \leq 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^m$ функцию $f(\vec{y}) = \max\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, $f \in C(\mathbb{R}^m)$, $f(\vec{0}) = 0$. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$ такова, что $g(\vec{0}) = f(\vec{0}) = 0$, $|g(\vec{y}) - f(\vec{y})| < \varepsilon$ для каждого $\vec{y} \in [0; 1]^m$. Тогда функция $u(x) = g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_m(x))$ удовлетворяет требуемым условиям.

Шаг 2. Пусть $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$, $u \geq 0 \pmod{\mu|_G}$. Для проверки неравенства $\gamma(u) \geq 0 \pmod{\sigma}$ теперь достаточно доказать утверждение

$$(v \in C^1(\bar{G}); v \geq 0) \Rightarrow \left(\int\limits_S v|_S \cdot \gamma(u) d\sigma \geq 0 \right). \tag{3}$$

Действительно, положим $Y = \{x \in S \mid \gamma(u)(x) < 0\}$. Тогда в силу доказанного выше индикатор j_Y множества Y приближается в $L^2(S)$ функциями $v \in C^1(S)$, и предельным переходом из (3) получим $\int_Y \gamma(u) d\sigma \geq 0$, откуда и будет следовать искомое равенство $\sigma(Y) = 0$.

Сначала докажем, что $(v \in C^1(\bar{G}), u \in D(\overline{\mathbf{grad}})) \Rightarrow (uv \in D(\overline{\mathbf{grad}}), \gamma(uv) = v|_S \cdot \gamma(u))$.

Пусть $u_m \in C^1(\bar{G})$, $u_m \underset{\Gamma}{\to} u$ (сходимость в норме графика в пространстве $D(\overline{\mathbf{grad}})$). Тогда $v \cdot u_m \in C^1(\bar{G})$, $v \cdot u_m \to v \cdot u$ в $L^2(G)$. При $m \to \infty$ в $L^2(G; H)$ существует предел $\mathbf{grad}(v \cdot u_m) = v \cdot \mathbf{grad}\, u_m + u_m \cdot \mathbf{grad}\, v$, равный $v \cdot \overline{\mathbf{grad}} u + u \cdot \mathbf{grad}\, v$. Поэтому $uv \in D(\overline{\mathbf{grad}})$, а в $L^2(S)$ имеет место равенство

$$\gamma(uv) = \lim_{m\to\infty} \gamma(u_m v) = \lim_{m\to\infty} (u_m|_S \cdot v|_S) = v|_S \cdot \lim_{m\to\infty} u_m|_S = v|_S \cdot \gamma(u).$$

Теперь (3) следует из леммы 1 работы [15], примененной к функции $u \cdot v$. Согласно упомянутой лемме, для функции $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$ при $t \in (-\infty; 0]$ существует $\dfrac{d}{dt} \int_{\Phi_t G} u d\mu$ и имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t G} u d\mu = \int\limits_S \gamma(u) d\sigma.$$

Теорема 2 доказана.

Перейдем непосредственно к принципу максимума для лапласиана по мере в L^2-версии. При этом введем для меры μ дополнительное условие.

Рассмотрим версию оператора **grad** для функций, определенных на всем пространстве: $\mathbf{grad} = \mathbf{grad}_H : L^2(H; \mu) \to L^2(H; H; \mu)$ с областью определения $D(\mathbf{grad}) = C_b^1(H)$.

Допустим, что оператор **grad** корректно определен и допускает замыкание $\overline{\mathbf{grad}}$. Нам потребуется дополнительное условие в) $(\overline{\mathbf{grad}} u = 0 \pmod{\mu}) \Rightarrow (u = \mathrm{const} \pmod{\mu})$.

Замечание **1.** Условие в) не является следствием квазиинвариантности меры μ. Например,

$$H = \mathbb{R}, \quad d\mu = \frac{t^2}{1+t^4} dt, \quad u = \eta = j_{[0;+\infty)} \quad \text{(функция Хевисайда)}.$$

Мера μ квазиинвариантна, оператор $\mathbf{grad} = \dfrac{d}{dt}$ замыкаем в $L^2(\mathbb{R}; \mu)$, $\eta \in D(\overline{\mathbf{grad}})$ и при этом $\overline{\mathbf{grad}} \eta = 0$. С другой стороны, в конечномерном случае ($H = \mathbb{R}^m$) для инвариантной лебеговской меры условия а) – в) выполнены.

В работе [16] доказано, что гауссова мера, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ, удовлетворяет условию в). Докажем, что переход от меры μ к мере μ_φ, определенный формулой (1), сохраняет свойство в). Напомним, что функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет введенным для нее в п. 1 условиям.

Лемма 1. *Пусть борелевская мера* μ *на* H *удовлетворяет условиям* а) *и* в). *Тогда мера* μ_φ, *определенная формулой* (1), *удовлетворяет условиям* а) – в).

Доказательство. Условия а) и б) для меры μ_φ были получены в работе [14] (теорема 2). Докажем условие в).

Обозначим для удобства через $\overline{\mathbf{grad}}_\varphi$ замыкание оператора **grad** в пространстве $L^2(H;\mu_\varphi)$. Это означает, что $u \in D(\overline{\mathbf{grad}}_\varphi)$, если существует последовательность функций $u_m \in C_b^1(H)$, для которой $u_m \to u$ в $L^2(H;\mu_\varphi)$, $\mathbf{grad}\, u_m \to \overline{\mathbf{grad}}_\varphi u$ в $L^2(H;H;\mu_\varphi)$.

Пусть $\overline{\mathbf{grad}}_\varphi u = 0$.

***Замечание* 2.** Согласно работе [14] для неотрицательных функций $f \in L^1(H;\mu_\varphi)$ имеет место следующее утверждение: для почти всех $t \in \mathbb{R}$ функция $f \circ \Phi_{-t}$ принадлежит $L^1(H;\mu)$, функция $h(t) = \int_H (f \circ \Phi_{-t})d\mu$ интегрируема на $\mathbb{R}$ по мере φdt и (формула (10) из [14])

$$\int\limits_H f d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt \int\limits_H (f \circ \Phi_{-t})d\mu. \tag{4}$$

Поэтому $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt \int_H (u_m \circ \Phi_{-t} - u \circ \Phi_{-t})^2 d\mu = \int_H (u_m - u)^2 d\mu_\varphi \to 0$, $m \to \infty$ (для упрощения записи пишем $\Phi_t := \Phi_t^{\mathbf{n}}$).

Не теряя общности (переходя к подпоследовательности u_{m_k}), можно считать, что для почти всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость $\lim_{m\to\infty} \int_H (u_m \circ \Phi_{-t} - u \circ \Phi_{-t})^2 d\mu = 0$. Аналогично $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt \int_H \|\,\mathbf{grad}\, u_m\|^2 \circ \Phi_{-t} d\mu = \int_H \|\,\mathbf{grad}\, u_m\|^2 d\mu_\varphi \to 0$ и (переходя еще раз к подпоследовательности) для почти всех $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_H \|\,\mathbf{grad}\, u_m\|^2 \circ \Phi_{-t} d\mu = 0. \tag{5}$$

Воспользуемся формулой $\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t})(x) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}x)\right]^* (\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}x)$ и оценкой $\left\|\dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}x)\right\| \le e^{C_1|t|}$, где $C_1 = \sup_H \|\mathbf{n}'(\cdot)\|$ (см. [14]).

Отсюда с учетом (5) получим (для почти всех $t \in \mathbb{R}$, $m \to \infty$)

$$\int\limits_H \|\,\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t})\|^2 d\mu \le \int\limits_H e^{2C_1|t|} \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}x)\|^2 d\mu \to 0.$$

Итак, для почти всех $t \in \mathbb{R}$ имеют место сходимости $u_m \circ \Phi_{-t} \to u \circ \Phi_{-t}$ в $L^2(H;\mu)$, $\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t}) \to 0$ в $L^2(H;H;\mu)$.

Поэтому из условия леммы следует, что существует множество F полной меры в $\mathbb{R}$ такое, что для каждого $t \in F$ существует число $C(t)$, для которого $u \circ \Phi_{-t} = C(t) \pmod{\mu}$.

Далее будет доказано, что $C(t)$ можно считать не зависящей от t. Точнее, существуют множество F_3 полной меры в $\mathbb{R}$ и константа C такие, что для всех $t \in F_3$ выполнено равенство $u \circ \Phi_{-t} = C \pmod{\mu}$. Но тогда в силу равенства (4) получим

$$\int\limits_H (u - C)^2 d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt \int\limits_H (u \circ \Phi_{-t} - C)^2 d\mu = 0,$$

откуда и будет следовать утверждение леммы: $u = C \pmod{\mu_\varphi}$.

В силу леммы 2 из работы [15] для меры $\vartheta = \mu_\varphi$ при всех $t \in \mathbb{R}$ мера $\vartheta_t := \vartheta \circ \Phi_t$ абсолютно непрерывна относительно меры ϑ и при этом $\dfrac{d\vartheta_t}{d\vartheta} \in L^\infty(H;\vartheta)$ $\left(\dfrac{d\vartheta_t}{d\vartheta} \le e^{C_2|t|} \pmod{\vartheta}\right.$, где $\left. C_2 = \|\operatorname{div}_\mu \mathbf{n}\|_{L^\infty(\vartheta)}\right)$.

Для любого $A \in \mathfrak{B}(H)$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\int\limits_A (u_m \circ \Phi_t)d\vartheta - \int\limits_A u_m d\vartheta = \int\limits_0^t ds \int\limits_A (\mathbf{grad}\, u_m \circ \Phi_s, \mathbf{n} \circ \Phi_s)d\vartheta. \tag{6}$$

При этом

$$\int\limits_A (u_m \circ \Phi_t)d\vartheta = \int\limits_{\Phi_t A} u_m d\vartheta_{-t} = \int\limits_{\Phi_t A} \left(u_m \cdot \frac{d\vartheta_{-t}}{d\vartheta}\right) d\vartheta \to$$

$$\to \int\limits_{\Phi_t A} \left(u \cdot \frac{d\vartheta_{-t}}{d\vartheta}\right) d\vartheta = \int\limits_A (u \circ \Phi_t)d\vartheta \quad (m \to \infty).$$

Аналогично $\int_A (\mathbf{grad}\, u_m, \mathbf{n}) \circ \Phi_s d\vartheta \to \int_A (\overline{\mathbf{grad}}_\varphi u, \mathbf{n}) \circ \Phi_s d\vartheta$ $(m \to \infty)$, поэтому, учитывая равенство $\overline{\mathbf{grad}}_\varphi u = 0 \pmod{\vartheta}$, из (6) предельным переходом получаем равенство

$$\int\limits_A (u \circ \Phi_t)d\vartheta = \int\limits_A u d\vartheta, \tag{7}$$

справедливое для всех $A \in \mathfrak{B}(H)$ и $t \in \mathbb{R}$.

Из (7) следует равенство $u \circ \Phi_t = u \pmod{\mu_\varphi}$, справедливое при всех $t \in \mathbb{R}$. Теперь в силу (4) имеем

$$0 = \int\limits_H (u \circ \Phi_t - u)^2 d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(s)ds \int\limits_H (u \circ \Phi_t - u)^2 \circ \Phi_{-s} d\mu.$$

Поэтому для каждого $t \in \mathbb{R}$ для почти всех $s \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$u \circ \Phi_{t-s} = u \circ \Phi_{-s} \pmod{\mu}. \tag{8}$$

Рассмотрим на $\mathbb{R}$ функцию $g(t) = \int_H (u \circ \Phi_t)^2 d\mu$. Согласно замечанию 2, функция g определена для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и локально интегрируема.

В силу (8) для каждого $t \in \mathbb{R}$ и для почти всех s имеет место равенство $g(t+s) = g(s)$. Поэтому для любых α, β, $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\int\limits_\alpha^{\alpha+t} g(s)ds = \int\limits_\beta^{\beta+t} g(s+\alpha-\beta)ds = \int\limits_\beta^{\beta+t} g(s)ds. \tag{9}$$

Существует такое множество F_1 полной меры в $\mathbb{R}$, что $g(\alpha) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+t} g(s)ds$ для каждого $\alpha \in F_1$ (см., например, [17], теорема 5.4.2).

Поэтому в силу (9) g постоянна на F_1. Поскольку на $F_2 = F \cap F_1$ имеет место равенство $g(t) = C^2(t)\cdot\mu(H)$, $C^2(t)$ принимает постоянное значение на множестве F_2.

Предыдущие рассуждения применимы к функции $v = u + 1$, поэтому из равенства $u = \dfrac{1}{2}((u+1)^2 - u^2 - 1)$ следует существование такого множества F_3 полной меры в $\mathbb{R}$ и константы C, что для всех $t \in F_3$ выполнено равенство $u \circ \Phi_{-t} = C \pmod{\mu}$.

Лемма 1 доказана.

Теорема 3. *Пусть G — ограниченная область в H, граница которой S согласована с мерой μ, и выполнены условия* а) – в). *Пусть $u \in D(\Delta)$, $\Delta u \geq 0 \pmod{\mu|_G}$. Тогда*

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u = \operatorname*{ess\,sup}_S \gamma(u).$$

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно доказать, что

$$(\gamma(u) \leq 0 \pmod{\sigma}) \;\Rightarrow\; (u \leq 0 \pmod{\mu|_G}).$$

Пусть $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ (φ непрерывно дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной). Тогда функция $\varphi\circ u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$. Действительно, из сходимости последовательности $u_m \in C^1(\bar G)$ в норме графика $\overline{\mathbf{grad}}$ к функции u следует сходимость $\varphi \circ u_m \in C^1(\bar G)$ к функции $\varphi\circ u$ в норме графика $\overline{\mathbf{grad}}$. При этом $\overline{\mathbf{grad}}(\varphi\circ u) = (\varphi'\circ u)\cdot\overline{\mathbf{grad}}u$, $\varphi\circ u_m|_S \to \varphi\circ\gamma(u)$ в $L^2(S;\sigma)$. Но $\varphi\circ u_m|_S = \gamma(\varphi\circ u_m) \to \gamma(\varphi\circ u)$. Поэтому $\gamma(\varphi\circ u) = \varphi\circ\gamma(u)$.

Пусть теперь $u \in D(\Delta)$, $\gamma(u) \leq 0 \pmod{\sigma}$, $\Delta u \geq 0 \pmod{\mu|_G}$ и функция $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(s) = 0$ при $s \leq 0$; $\varphi(s) > 0$, $\varphi'(s) > 0$ при $s > 0$. Тогда $\gamma(\varphi\circ u) = 0 \pmod{\sigma}$, т. е. $\varphi\circ u \in \operatorname{Ker}\gamma$. В силу формулы (2) для векторного поля $\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{grad}}u$ и для любой функции $v \in \operatorname{Ker}\gamma$ имеет место равенство $\displaystyle\int_G v\cdot \operatorname{div}\mathbf{Z}d\mu = -\int_G (\mathbf{Z}, \overline{\mathbf{grad}}v)d\mu$, или, что эквивалентно, $\displaystyle\int_G \Delta u\cdot v d\mu = -\int_G (\overline{\mathbf{grad}}u, \overline{\mathbf{grad}}v)d\mu$. В частности, для $v = \varphi\circ u$ получаем

$$\int\limits_G (\varphi\circ u)\cdot\Delta u d\mu = -\int\limits_G (\varphi'\circ u)\|\overline{\mathbf{grad}}u\|^2 d\mu. \tag{10}$$

Поскольку $\Delta u \geq 0 \pmod{\mu|_G}$, в силу выбора функции φ левая часть (10) неотрицательна, а правая неположительна. Следовательно, $(\varphi'\circ u)\cdot\|\overline{\mathbf{grad}}u\| = 0 \pmod{\mu|_G}$, $\overline{\mathbf{grad}}(\varphi\circ u) = 0 \pmod{\mu|_G}$.

Пусть $v_m \in C_0^1(G)$ — последовательность функций, которая в норме графика $\overline{\mathbf{grad}}$ сходится к функции $\varphi\circ u$ (существование такой последовательности доказано в [15]). Тогда v_m, продолженная на все H нулем вне G, сходится в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}_H$ к некоторой функции $h \in D(\overline{\mathbf{grad}}_H)$. При этом $h|_G = \varphi\circ u$, $\overline{\mathbf{grad}}_H h|_G = \overline{\mathbf{grad}}(\varphi\circ u)$. Следовательно, $\overline{\mathbf{grad}}_H h = 0 \pmod{\mu}$ и в силу условия в) $h = \mathrm{const} \pmod{\mu}$.

Таким образом, существует такое $C \geq 0$, что $\varphi\circ u = C \pmod{\mu|_G}$. Если $C > 0$, то $u(x) = C_1 > 0 \pmod{\mu|_G}$ и в этом случае $\gamma(u) = C_1 \pmod{\sigma}$, что противоречит неравенству $\gamma(u) \leq 0 \pmod{\sigma}$. Итак, $C = 0$, а значит, $u(x) \leq 0 \pmod{\mu|_G}$.

Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *При выполнении условий* а) – в) *задача Дирихле в области G для уравнения Лапласа в L^2-версии $\Delta u = 0, \ \gamma(u) = w$ имеет не более одного решения.*

Литература

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
2. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
3. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
4. *Airault H., Malliavin P.* Integration geometrique sur l'espaces de Wiener // Bull. Sci. Math. (2). – 1988. – **112**, № 1. – P. 3 – 52.
5. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. carol. Math. et phys. – 1990. – **31**, № 2. – P. 9 – 23.
6. *Пугачев О. В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – **53**, № 1. – С. 178 – 188.
7. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – **20**. – С. 223 – 238.
8. *Malliavin P.* Stochastic analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 343 p.
9. *Далецкий Ю. Л.* Стохастическая дифференциальная геометрия // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 3. – С. 87 – 111.
10. *Da Prato G., Lunardi A., Tubaro L.* Surface measures in infinite dimension // Rend. Lincei. Mat. e appl. – 2014. – **25**, № 3. – P. 309 – 330.
11. *Celada P., Lunardi A.* Traces of Sobolev functions on regular surfaces in infinite dimensions // J. Funct. Anal. – 2014. – **266**. – P. 1948 – 1987.
12. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
13. *Богданский Ю. В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169 – 1178.
14. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
15. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
16. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Лапласиан по мере и эргодическая теорема // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 9. – С. 1172 – 1180.
17. *Богачев В. И.* Основы теории меры. – Москва; Ижевск: РХД, 2006. – Т. 1. – 584 с.

Получено 17.04.15,
после доработки — 08.09.15