

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Гунько (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ СВЕРТКИ n ФУНКЦИЙ ПО ЛИНЕЙНОЙ ИНФОРМАЦИИ

We determine the optimal linear information and the optimal method of its application to the recovery of convolution of n functions on some convex and centrally symmetric classes of 2π -periodic functions.

Знайдено оптимальну лінійну інформацію та оптимальний метод її використання для відновлення згортки n функцій на деяких опуклих центрально-симетричних множинах 2π -періодичних функцій.

Пусть C и L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — пространства 2π -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p}$. Пусть также $M_1, M_2, \dots, M_n \subset L_1$ — некоторые классы функций; $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$;

$$(x_1 * x_2)(\tau) = \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t)x_2(t)dt$$

— свертка двух функций x_1 и x_2 , а

$$\begin{aligned} (x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\tau) &= (x_1 * (x_2 * \dots * x_n))(\tau) = \\ &= \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} x_1(\tau - t_1 - \dots - t_{n-1})x_2(t_1) \dots x_n(t_{n-1})dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} \end{aligned}$$

— свертка n функций x_1, x_2, \dots, x_n .

Будем предполагать, что для $j = 1, \dots, n$ на множествах $\text{span}(M_j)$ заданы наборы T_j , $T_j = (T_{j,1}, T_{j,2}, \dots, T_{j,m_j})$, линейных непрерывных функционалов

$$T_{j,l}: \text{span}(M_j) \rightarrow \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, m_j.$$

Векторы

$$T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), T_{j,2}(x_j), \dots, T_{j,m_j}(x_j)) \in \mathbb{R}^{m_j}, \quad x_j \in M_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

будем называть линейной информацией об x_1, x_2, \dots, x_n типа (m_1, m_2, \dots, m_n) (или (m_1, m_2, \dots, m_n) -информацией). Произвольное отображение

$$\Phi: \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_n} \rightarrow L_p$$

будем называть методом восстановления свертки $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ по (m_1, m_2, \dots, m_n) -информации в пространстве L_p .

Положим

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi)(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 * x_2 * \dots * x_n)(t) - \Phi(T_1(x_1), T_2(x_2), \dots, T_n(x_n))(t), \\
&R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p) = \\
&= \sup_{\substack{x_j \in M_j \\ j=1, \dots, n}} \|R(x_1, x_2, \dots, x_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi)(\cdot)\|_{L_p}, \quad (1)
\end{aligned}$$

$$R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; L_p) = \inf_{\Phi} R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p), \quad (2)$$

$$R_{m_1, m_2, \dots, m_n}(M_1, M_2, \dots, M_n; L_p) = \inf_{T_1, T_2, \dots, T_n} R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; L_p) \quad (3)$$

(\inf_{Φ} берется по всевозможным методам восстановления, а $\inf_{T_1, T_2, \dots, T_n}$ — по всевозможным наборам функционалов, дающим (m_1, m_2, \dots, m_n) -информацию об (x_1, x_2, \dots, x_n) ;

$$R_N(M_1, M_2, \dots, M_n; L_p) = \inf_{m_1 + m_2 + \dots + m_n = N} R_{m_1, m_2, \dots, m_n}(M_1, M_2, \dots, M_n; L_p). \quad (4)$$

Величину (1) назовем погрешностью метода Φ восстановления свертки n функций $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ на классах M_1, M_2, \dots, M_n по информации T_1, T_2, \dots, T_n в пространстве L_p , величину (2) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ на классах M_1, M_2, \dots, M_n по заданной информации типа (m_1, m_2, \dots, m_n) , величину (3) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ на M_1, M_2, \dots, M_n по (m_1, m_2, \dots, m_n) -информации и, наконец, величину (4) — оптимальной погрешностью восстановления $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ на M_1, M_2, \dots, M_n по информации суммарного объема N .

Если при заданных T_1, T_2, \dots, T_n существует метод Φ^* , реализующий \inf_{Φ} в правой части (2), то будем называть Φ^* оптимальным методом использования данной информации. Если существуют $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$, реализующие нижнюю грань в правой части (3), то будем их называть оптимальной (m_1, m_2, \dots, m_n) -информацией для восстановления $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ на M_1, M_2, \dots, M_n в пространстве L_p .

Числа $m_1^0, m_2^0, \dots, m_n^0$, реализующие инфимум в (4), будем называть оптимальными объемами информации об x_1, x_2, \dots, x_n , а оптимальную $(m_1^0, m_2^0, \dots, m_n^0)$ -информацию — оптимальной информацией суммарного объема N об x_1, x_2, \dots, x_n .

Будем изучать следующую задачу оптимального восстановления свертки n функций по линейной информации о сворачиваемых функциях.

Пусть заданы классы функций M_1, M_2, \dots, M_n и $p \in [1, \infty]$, $N \in \mathbb{N}$. Требуется найти величину (4), оптимальные объемы $m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$ информации ($m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^* = N$), оптимальную $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*)$ -информацию $T_1^*, T_2^*, \dots, T_n^*$, а также оптимальный метод Φ^* ее использования.

Задача об оптимальном восстановлении свертки двух функций из различных функциональных классов была рассмотрена в [1]. Там же приведены первые результаты по ее решению. По поводу дальнейших результатов в этом направлении см. [2].

Определим множества $M_j(T_j)$ так:

$$M_j(T_j) = \{x_j \in M_j : T_j(x_j) = 0\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и пусть

$$M(T_j) := M_1 \times M_2 \times \dots \times M_{j-1} \times M_j(T_j) \times M_{j+1} \times \dots \times M_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Оценку снизу для величины (1), а следовательно, и величины (2) дает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть множества M_1, M_2, \dots, M_n выпуклы и центрально-симметричны. Тогда для любых наборов функционалов T_1, T_2, \dots, T_n и любого метода восстановления Φ

$$R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p) \geq \max_{j=1, \dots, n} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_j)} \|(x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Доказательство. Покажем, что

$$R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_1)} \|(x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Имеем (ниже θ — нулевой элемент пространства \mathbb{R}^{m_1})

$$\begin{aligned} & R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p) \geq \\ & \geq \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_1)} \left\| (x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \dots, T_n(x_n))(\cdot) \right\|_{L_p} \geq \\ & \geq \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_1)} \max \left\{ \left\| (x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \dots, T_n(x_n))(\cdot) \right\|_{L_p}, \right. \\ & \left. \left\| -(x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot) - \Phi(\theta, T_2(x_2), \dots, T_n(x_n))(\cdot) \right\|_{L_p} \right\} \geq \\ & \geq \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_1)} \left\| (x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot) \right\|_{L_p}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что для произвольного $j = 2, \dots, n$

$$R(M_1, M_2, \dots, M_n; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_p) \geq \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M(T_j)} \|(x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot)\|_{L_p}.$$

Отсюда и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Пусть F_p — единичный шар в L_p , $K \in L_1$, $\int_0^{2\pi} K dt \neq 0$. Через $K * F_p$ обозначим класс функций вида $x = K * \psi$, $\psi \in F_p$. В дальнейшем будем предполагать, что $M_j = K_j * F_{p_j}$, $j = 1, \dots, n$, где $K_j \in L_1$.

Пусть $d_N(M, C)$ обозначает n -поперечник по Колмогорову множества M в пространстве C (см., например, [3, с. 109]).

Теорема 1. Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n \in L_1$. Тогда для любых наборов функционалов $T_j = (T_{j,1}, T_{j,2}, \dots, T_{j,m_j})$, $j = 1, \dots, n$, $T_{j,l}: \text{span}(K_j * F_1) \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, m_j$, и любого метода восстановления Φ

$$\begin{aligned} & R(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \dots, K_n * F_1; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi; L_1) \geq \\ & \geq d_{\min\{m_1, m_2, \dots, m_n\}}((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C). \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $\min\{m_1, m_2, \dots, m_n\} = m_1$. В силу леммы 1 достаточно установить неравенство

$$A_1 := \sup_{\substack{x_1 \in (K_1 * F_1)(T_1) \\ x_2 \in K_2 * F_1, \dots, x_n \in K_n * F_1}} \|(x_1 * x_2 * \dots * x_n)(\cdot)\|_{L_1} \geq d_{m_1}(K_1 * K_2 * \dots * K_n * F_\infty, C).$$

Имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \|(K_1 * \psi_1) * (K_2 * \psi_2) * \dots * (K_n * \psi_n)(\cdot)\|_{L_1} = \\ &= \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \|(K_1 * K_2 * \dots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(\cdot)\|_{L_1} = \\ &= \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \sup_{\phi \in F_\infty} \int_0^{2\pi} (K_1 * K_2 * \dots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(t) \phi(t) dt = \\ &= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) (\psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(u) du = \\ &= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n-1 \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \max_t \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) (\psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_{n-1})(u-t) du = \\ &= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, \dots, n-1 \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) (\psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_{n-1})(u) du = \dots \\ &\dots = \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1, j=1, 2 \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) (\psi_1 * \psi_2)(u) du = \\ &= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_j \in F_1 \\ T_1(K_1 * \psi_1) = \theta}} \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) \psi_1(u) du. \end{aligned}$$

Функционалы $T_{1,1}, T_{1,2}, \dots, T_{1,m_1}$ допускают непрерывные продолжения $T'_{1,1}, T'_{1,2}, \dots, T'_{1,m_1}$ на все пространство L_1 . Пусть функционалы $T'_{1,j}$ имеют вид

$$T'_{1,j}(x_1) = \int_0^{2\pi} x_1(t) g_{1,j}(t) dt, \quad j = 1, \dots, m_1,$$

где $g_{1,j}$ — фиксированные функции из L_∞ .

Условие $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означает, что для $j = 1, \dots, m_1$

$$\int_0^{2\pi} (K_1 * \psi_1)(t) g_{1,j}(t) dt = 0,$$

ИЛИ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K_1(t - \tau) \psi_1(\tau) d\tau g_{1,j}(t) dt = 0,$$

или

$$\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \int_0^{2\pi} K_1(t - \tau) g_{1,j}(t) dt d\tau = 0.$$

Таким образом, условие $T_1(K_1 * \psi_1) = \theta$ означает, что $\psi_1 \perp K_1(-\cdot) * g_{1,j}$ для любого $j = 1, \dots, m_1$. Поэтому, учитывая теорему двойственности С. М. Никольского (см. [3, с. 120], предложение 3.4.4), получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \sup_{\phi \in F_\infty} \sup_{\substack{\psi_1 \in F_1 \\ \psi_1 \perp K_1(-\cdot) * g_{1,j}, j=1, \dots, m_1}} \int_0^{2\pi} ((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi)(u) \psi_1(u) du = \\ &= \sup_{\phi \in F_\infty} E((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * \phi; H(T_1))_C, \end{aligned}$$

где $E(x; H(T_1))_C$ — наилучшее приближение функции x подпространством

$$H(T_1) = \text{span} \{K_1(-\cdot) * g_{1,1}, K_1(-\cdot) * g_{1,2}, \dots, K_1(-\cdot) * g_{1,m_1}\}$$

в пространстве C .

Поскольку $\dim H(T_1) \leq m_1$, учитывая определения поперечника по Колмогорову, имеем

$$A_1 \geq d_{m_1}((K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) * F_\infty, C).$$

Теорема 1 доказана.

Обозначим через H_{2s-1}^T , $s \in \mathbb{N}$, множество тригонометрических полиномов порядка не выше $s - 1$. Непрерывное на $(0, 2\pi)$ и не являющееся тригонометрическим полиномом ядро K будем называть *CVD*-ядром (и писать $K \in \text{CVD}$), если $\nu(K * \phi) \leq \nu(\phi)$ для любых $\phi \in C$, где $\nu(g)$ — число перемен знака функции g на периоде. Ряд вопросов теории *CVD*-ядер изложен в [4, 5].

Пусть $K \in \text{CVD}$. Тогда это ядро удовлетворяет условиям теоремы 4.1 из [6] и, следовательно, если $\varphi_s(t) = \text{sign} \sin st$, σ — точка абсолютного максимума или абсолютного минимума функции $K * \varphi_s$, то существует единственный полином $P_s = P_s(K) \in H_{2s-1}^T$, интерполирующий $K(t)$ в точках $\sigma + \frac{m\pi}{s}$, $m \in \mathbb{Z}$, если все точки $\sigma + \frac{m\pi}{s}$, $m \in \mathbb{Z}$, являются точками непрерывности K . Если же K разрывно в нуле и $0 \in \left\{ \sigma + \frac{m\pi}{s} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$, то существует единственный полином $P_s = P_s(K) \in H_{2s-1}^T$, интерполирующий $K(t)$ в точках $\sigma + \frac{m\pi}{s} \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Полином $P_s = P_s(K)$ (см. [6], теоремы 2.4, 4.2 и § 5, [7]) является полиномом наилучшего L_1 приближения для K и при этом

$$\begin{aligned} \|K - P_s\|_{L_1} &= \|K(-\cdot) - P_s(-\cdot)\|_{L_1} = \|K * \varphi_s\|_\infty = \\ &= d_{2s-1}(K * F_\infty; C) = d_{2s-1}(K(-\cdot) * F_\infty; C). \end{aligned} \tag{5}$$

Ниже, рассматривая задачу оптимального восстановления свертки $x_1 * x_2 * \dots * x_n$, где $x_1 \in K_1 * F_1, x_2 \in K_2 * F_1, \dots, x_n \in K_n * F_1$, будем предполагать, что ядра K_1, K_2, \dots, K_n таковы, что $K_1 * K_2 * \dots * K_n \in CVD$.

Пусть $a_j(x), b_j(x)$ — коэффициенты Фурье функции $x \in L_1$, т. е.

$$a_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos jtdt, \quad b_j(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin jtdt,$$

$$c_j(x) = \frac{a_j(x) - ib_j(x)}{2}, \quad c_{-j}(x) = \frac{a_j(x) + ib_j(x)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Положим

$$\alpha_j = \frac{c_j(P_n(K_1 * K_2 * \dots * K_n))}{c_j(K_1)c_j(K_2)\dots c_j(K_n)}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm(s-1).$$

Отметим, что из предположения $K_1 * K_2 * \dots * K_n \in CVD$ следует, что все коэффициенты $c_j(K_1), c_j(K_2), \dots, c_j(K_n)$ при любом $j \in \mathbb{Z}$ отличны от нуля.

Пусть

$$T_l^*(x_l) = (a_0(x_l), a_1(x_l), \dots, a_{N-1}(x_l), b_1(x_l), \dots, b_{N-1}(x_l)), \quad l = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), \dots, T_n^*(x_n))(t) = \sum_{j=-(s-1)}^{s-1} \alpha_j c_j(x_1)c_j(x_2)\dots c_j(x_n)e^{ijt}. \quad (7)$$

Тогда, если $x_1 = K_1 * \psi_1 \in K_1 * F_1, x_2 = K_2 * \psi_2 \in K_2 * F_1, \dots, x_n = K_n * \psi_n \in K_n * F_1$, учитывая тот факт, что для $g_1, g_2, \dots, g_n \in L_1$

$$c_j(g_1 * g_2 * \dots * g_n) = (2\pi)^{n-1} c_j(g_1)c_j(g_2)\dots c_j(g_n), \quad j \in \mathbb{Z},$$

и действуя, как при преобразовании величины A_1 в доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} & \|x_1 * x_2 * \dots * x_n - \Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), \dots, T_n^*(x_n))\|_{L_1} = \\ & = \|K_1 * K_2 * \dots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n - \\ & - P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n) * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n\|_{L_1} = \\ & = \sup_{\phi \in F_\infty} \int_0^{2\pi} \left[(K_1 * K_2 * \dots * K_n * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(t) - \right. \\ & \left. - (P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n) * \psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(t) \right] \phi(t) dt = \\ & = \sup_{\phi \in F_\infty} \int_0^{2\pi} \left(\left[(K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n))(-\cdot) \right] * \phi \right)(t) \cdot (\psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n)(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \|x_1 * x_2 * \dots * x_n - \Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), \dots, T_n^*(x_n))\|_{L_1} \leq \\ & \leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) - \\ & - (P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n))(-\cdot)] * \phi\|_C \|\psi_1 * \psi_2 * \dots * \psi_n\|_{L_1} \leq \\ & \leq \sup_{\phi \in F_\infty} \|[(K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n))(-\cdot)] * \phi\|_C \leq \\ & \leq \|(K_1 * K_2 * \dots * K_n)(-\cdot) - (P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n))(-\cdot)\|_{L_1} \leq \\ & \leq \|K_1 * K_2 * \dots * K_n - P_s(K_1 * K_2 * \dots * K_n)\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (5), имеем

$$\begin{aligned} & \|x_1 * x_2 * \dots * x_n - \Phi^*(T_1^*(x_1), T_2^*(x_2), \dots, T_n^*(x_n))\|_{L_1} \leq \\ & \leq d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \dots * K_n * F_\infty; C). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & R(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \dots, K_n * F_1; T_1, T_2, \dots, T_n; \Phi^*; L_1) \leq \\ & \leq d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \dots * K_n * F_\infty; C) = \|K_1 * K_2 * \dots * K_n * \varphi_s\|_C. \end{aligned}$$

Учитывая оценку снизу, даваемую теоремой 1, и монотонное невозрастание поперечников $d_m(M, C)$ с ростом m , убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть ядра K_1, K_2, \dots, K_n таковы, что $K_1 * K_2 * \dots * K_n \in CVD$, $s \in \mathbb{N}$ и $N = n(2s - 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} & R_{n(2s-1)}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \dots, K_n * F_1; L_1) = \\ & = R_{2s-1, \dots, 2s-1}(K_1 * F_1, K_2 * F_1, \dots, K_n * F_1; L_1) = \\ & = d_{2s-1}(K_1 * K_2 * \dots * K_n * F_\infty, C) = \|K_1 * K_2 * \dots * K_n * \varphi_s\|_C. \end{aligned}$$

При этом оптимальная информация определяется равенством (6), а оптимальный метод ее использования — равенством (7).

Литература

1. Бабенко В. Ф. Оптимальные вычисления сверток функций из различных классов // Тез. междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, май 1989 г.). – София: Изд-во БАН, 1989. – С. 5–6.
2. Бабенко В. Ф., Руденко А. А. Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1305–1310.
3. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson R. E. On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1959. – **8**, № 2. – P. 241–270.
5. Karlin S. Total positivity. – Stranford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1968. – Vol. I. – 540 p.
6. Бабенко В. Ф. Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6–21.
7. Pinkus A. On n -width of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209–235.

Получено 10.05.15