

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ АНІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ БЕСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We establish exact-order estimates for the Kolmogorov widths of the anisotropic Besov classes of periodic functions of many variables in the spaces L_q , $1 \leq q \leq \infty$.

Установлены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников анизотропных классов Бесова периодических функций многих переменных в пространствах L_q , $1 \leq q \leq \infty$.

Дану роботу присвячено дослідженню наближення анізотропних класів Бесова $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q . Роль апроксимативної характеристики відіграє колмогоровський поперечник.

Робота складається із трьох пунктів. У першому та другому пунктах означено основні задіяні об'єкти (функціональні простори, відповідні їм функціональні класи та апроксимативні характеристики), а також наведено необхідні допоміжні твердження. Основний результат роботи сформульовано та доведено у третьому пункті.

1. Функціональні простори та класи. Нехай \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, — d -вимірний евклідов простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ з дійсними координатами і $L_p = L_p(\pi_d)$ — простір 2π -періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p , $1 \leq p < \infty$, на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \pi_d} |f(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_p$ в точці \mathbf{x} означимо кратну різницю $\Delta_{h,j}^l f(\mathbf{x})$ порядку $l \in \mathbb{N}$ за змінною x_j з кроком $h \in \mathbb{R}$ згідно з формулою

$$\Delta_{h,j}^l f(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k+l} C_l^k f(\mathbf{x} + kh\mathbf{e}_j),$$

де C_l^k — біноміальні коефіцієнти, $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^d$ — стандартний векторний базис у просторі \mathbb{R}^d .

Базуючись на понятті кратної різниці $\Delta_{h,j}^l f$, означимо відповідний модуль неперервності l -го порядку функції $f \in L_p$ за змінною x_j згідно з формулою

$$\omega_l(f, \mathbf{e}_j, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \Delta_{h,j}^l f \right\|_p.$$

Означення 1. Нехай $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{R} = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < r_j < l_j$, $j = \overline{1, d}$. Тоді нормований простір $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$, $1 \leq p$, $\theta \leq \infty$, визначається таким чином:

$$B_{p,\theta}^{\mathbf{R}} = \left\{ f \in L_p : \|f\|_{B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}} = \|f\|_p + \sum_{j=1}^d |f|_{B_{p,\theta,j}^{r_j}} < \infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta,j}^{r_j}} = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega_{l_j}(f, e_j, t)_p}{t^{r_j}} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup_{t>0} \frac{\omega_{l_j}(f, e_j, t)_p}{t^{r_j}}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простори $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ (а також їхні аналоги в неперіодичному випадку), з дещо іншою заданою у них нормою, вперше було розглянуто О. В. Бесовим [1]. У випадку $\theta = \infty$ вони збігаються з просторами $H_p^{\mathbf{R}}$, які увів С. М. Нікольський [2]. Такі функціональні простори прийнято називати анізотропними, оскільки гладкісні властивості функцій із цих просторів, взагалі кажучи, неоднакові по кожній змінній. Якщо ж $\mathbf{R} = (r, \dots, r) \in \mathbb{R}^d$ і $0 < r < l$, $l \in \mathbb{N}$, то $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ називають ізотропними просторами Нікольського – Бесова (далі будемо позначати їх $B_{p,\theta}^r$).

Для вектора \mathbf{R} із означених вище просторів $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ покладемо

$$g(\mathbf{R}) = \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{r_j} \right)^{-1},$$

$$\rho = \frac{g(\mathbf{R})}{\mathbf{R}} = \left(\frac{g(\mathbf{R})}{r_1}, \dots, \frac{g(\mathbf{R})}{r_d} \right) = (\rho_1, \dots, \rho_d),$$

$$2^{\rho n} = (2^{\rho_1 n}, \dots, 2^{\rho_d n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$[2^{\rho n}] = ([2^{\rho_1 n}], \dots, [2^{\rho_d n}]),$$

де запис $[a]$ позначає цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$.

Під поняттям „класи $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ ” будемо розуміти одиничні кулі у просторах $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$, тобто

$$\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}} = \left\{ f \in L_p : \|f\|_{B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}} \leq 1 \right\}.$$

Відповідно одиничні кулі у просторах $H_p^{\mathbf{R}}$ та $B_{p,\theta}^r$ позначатимемо $\mathbb{H}_p^{\mathbf{R}}$ та $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$.

Далі запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 , які не залежать від одного істотного по контексту параметра у величинах A та B (наприклад, у наведеному нижче співвідношенні (1) – від функції f) і такі, що $C_1 A \leq B \leq C_2 A$. Якщо $B \leq C_2 A$ ($B \geq C_1 A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$).

У наведених нижче міркуваннях нам буде зручно використовувати еквівалентне означення норми функцій із просторів $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$.

Отже, нехай V_n , $n \in \mathbb{N}$, позначає одновимірне ядро Валле Пуссена:

$$V_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt + 2 \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2m-k}{m} \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тоді в точці $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ означимо багатовимірне ядро Валле Пуссена $V_{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$, згідно з формулою

$$V_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d V_{N_j}(x_j).$$

Далі через $\mathbb{V}_N(f)$ позначатимемо згортку функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, з багатовимірним ядром V_N , тобто

$$\mathbb{V}_N(f, \mathbf{x}) = (f * V_N)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{t}) V_N(\mathbf{x} - \mathbf{t}) dt,$$

і для функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, покладемо

$$\sigma_0(f, \mathbf{R}, \mathbf{x}) = \mathbb{V}_1(f, \mathbf{x}), \quad \sigma_s(f, \mathbf{R}, \mathbf{x}) = \mathbb{V}_{[2^s]}(f, \mathbf{x}) - \mathbb{V}_{[2^{s-1}]}(f, \mathbf{x}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

У прийнятих позначеннях простори $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ можна означити еквівалентним чином. А саме, має місце таке твердження.

Теорема А [3]. Функція $f \in L_p$ належить простору $B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\mathbf{R})\theta} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\mathbf{R}}} \asymp \left(\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\mathbf{R})\theta} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p^\theta \right)^{1/\theta}. \quad (1)$$

Відповідно функція $f \in L_p$ належить простору $B_{p,\infty}^{\mathbf{R}}$, $1 \leq p \leq \infty$, тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\mathbf{R})} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\mathbf{R}}} \asymp \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sg(\mathbf{R})} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p.$$

Зазначимо, що з урахуванням нерівностей

$$\sup_{s \in \mathbb{Z}_+} |\nu_s| \leq \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^{\theta'} \right)^{1/\theta'} \leq \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\nu_s|^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \theta' < \infty,$$

які виконуються для будь-якої послідовності чисел $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$ (див., наприклад, [4, с. 149]), із теореми А випливають вкладення

$$B_{p,1}^{\mathbf{R}} \subset B_{p,\theta}^{\mathbf{R}} \subset B_{p,\theta'}^{\mathbf{R}} \subset B_{p,\infty}^{\mathbf{R}} \equiv H_p^{\mathbf{R}}, \quad 1 < \theta < \theta' < \infty. \quad (2)$$

2. Апроксимативні характеристики та допоміжні твердження. У цьому пункті наведемо означення апроксимативних характеристик, що досліджуються у роботі, а також сформулюємо кілька допоміжних тверджень, які знадобляться нам при доведенні отриманого результату.

Нехай \mathcal{X} — нормований простір, $\mathcal{L}_m(\mathcal{X})$ — сукупність усіх лінійних підпросторів \mathcal{X} розмірності не більшої за m і Φ — центрально-симетрична підмножина в \mathcal{X} .

Означення 2. Колмогоровським поперечником множини Φ у просторі \mathcal{X} називається величина

$$d_m(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_m \in \mathcal{L}_m(\mathcal{X})} \sup_{f \in \Phi} \inf_{u \in L_m} \|f - u\|_{\mathcal{X}}.$$

Поперечник $d_m(\Phi, \mathcal{X})$ було введено у 1936 р. А. М. Колмогоровим [5]. Значення цієї величини є теоретично найкращою точністю, з якою можна наблизити множину Φ лінійними підпросторами L_m розмірності m у метриці простору \mathcal{X} . Якщо існує підпростір L_m^* , на якому досягається точна нижня межа (або принаймні її порядок відносно параметра m), то його називають екстремальним підпростором.

Для вектора $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_d) \in \mathbb{N}^d$ розглянемо множини

$$\mathcal{K}(\mathbf{N}, d) = \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \leq N_j, j = \overline{1, d} \right\}$$

і

$$\mathbb{T}(\mathbf{N}, d) = \left\{ g : g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}(\mathbf{N}, d)} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \right\},$$

де $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$.

Якщо $\mathbb{F} \subset L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{\mathbf{N}}(\mathbb{F})_q = \sup_{f \in \mathbb{F}} \inf_{g \in \mathbb{T}(\mathbf{N}, d)} \|f - g\|_q.$$

Теорема Б (див., наприклад, [4, с. 33]). Для функцій $\varphi \in L_1$ і $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, має місце нерівність

$$\|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p, \quad (3)$$

де

$$(f * \varphi)(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} f(\mathbf{t}) \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

— згортка функцій f і φ .

Теорема В [4, с. 159]. Якщо $1 \leq p \leq q \leq \infty$, то для довільного тригонометричного полінома $g \in \mathbb{T}(\mathbf{N}, d)$ має місце нерівність

$$\|g\|_q \leq 3^d \left(\prod_{j=1}^d N_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g\|_p. \quad (4)$$

Нерівність (4) називають нерівністю різних метрик Нікольського.

Теорема Г [3]. Нехай $1 \leq p, q \leq \infty$ і $g(\mathbf{R}) > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ має місце порядкова оцінка

$$E_{[2^{p\theta n}]}(\mathbb{B}_{p, \theta}^{\mathbf{R}})_q \asymp 2^{-n \left(g(\mathbf{R}) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ \right)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема Д [3]. Нехай $1 \leq q \leq p \leq \infty$ і $g(\mathbf{R}) > 0$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ має місце порядкова оцінка

$$d_m(\mathbb{B}_{p, \theta}^{\mathbf{R}}, L_q) \asymp m^{-g(\mathbf{R})}.$$

3. Колмогоровські поперечники класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ у просторах L_q .

Теорема 1. Якщо $1 < p < q \leq \infty$ і $1 \leq \theta < \infty$, то має місце порядкова оцінка

$$d_m(\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}, L_q) \asymp \begin{cases} m^{-g(\mathbf{R}) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} & \text{при } 1 < p < q \leq 2, \quad g(\mathbf{R}) > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ m^{-g(\mathbf{R}) + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}} & \text{при } 1 < p < 2 < q \leq \infty, \quad g(\mathbf{R}) > \frac{1}{p}, \\ m^{-g(\mathbf{R})} & \text{при } 2 \leq p < q \leq \infty, \quad g(\mathbf{R}) > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

Доведення. Внаслідок вкладення (2) оцінки зверху випливають із відомих оцінок колмогоровських поперечників для класів Нікольського $\mathbb{H}_p^{\mathbf{R}}$ (див. [6], розділ 2).

Оцінки знизу, внаслідок вкладення (2), достатньо встановити у випадку $\theta = 1$, тобто для класів $\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}$. В залежності від того, яких значень набувають параметри p та q , розглянемо кілька випадків.

Випадок 1: $1 < p < q = 2$. За заданим числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо натуральне число $n = n(m)$ так, щоб виконувались співвідношення $2m \leq \dim T([2^{\rho^n}], d)$ і $m \asymp 2^n$. Тоді, з одного боку, згідно з означенням колмогоровського поперечника

$$d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_2) \geq d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_2). \quad (6)$$

З іншого боку, якщо P_n — оператор ортогонального проектування на $T([2^{\rho^n}], d)$, то для $f \in T([2^{\rho^n}], d)$ і $u \in L_2$ з урахуванням того, що простір L_2 є гільбертовим, маємо

$$\|f - P_n u\|_2 = \|P_n(f - u)\|_2 \leq \|f - u\|_2. \quad (7)$$

Таким чином, беручи до уваги (6) та (7), отримуємо

$$d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_2) \geq d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_2 \cap T([2^{\rho^n}], d)). \quad (8)$$

Для подальшої оцінки знизу правої частини (8) побудуємо екстремальну сім'ю функцій із $\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d)$, тобто множину $W \subset \mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d)$ таку, що

$$d_m(W, L_2 \cap T([2^{\rho^n}], d)) \gg m^{-g(\mathbf{R}) + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

З цієї метою покладемо

$$f(\mathbf{x}) = C_3 2^{-n(g(\mathbf{R}) + 1 - \frac{1}{p})} D_{[2^{\rho^n}]}(\mathbf{x}), \quad C_3 > 0,$$

де

$$D_{[2^{\rho^n}]}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d D_{[2^{\rho_j n}]}(x_j) = \prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{[2^{\rho_j n}]} \cos kx_j \right)$$

— багатовимірне ядро Діріхле.

Покажемо, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}$.

Оскільки

$$\sigma_s(f, \mathbf{R}) = f * \left(V_{[2^{\rho^s}]} - V_{[2^{\rho^{(s-1)}}]} \right),$$

то внаслідок ортогональності тригонометричної системи функцій $\sigma_s(f, \mathbf{R}) = 0$ для довільної функції f , „номери” гармонік якої не належать множині $\mathcal{K}(2[2^{\rho^s}], d) \setminus \mathcal{K}([2^{\rho^{(s-1)}}], d)$. Звідси,

зокрема, $\sigma_s(f, \mathbf{R}) = 0$ при $s \geq n + 1$. Але тоді, використовуючи співвідношення (1) та (3), а також враховуючи, що (див., наприклад, [6], розділ 1)

$$\|D_{[2^{\rho n}]}\|_p \asymp 2^{n(1-\frac{1}{p})}, \quad 1 < p < \infty,$$

маємо

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,1}^{\mathbf{R}}} &\asymp \sum_{s=0}^{\infty} 2^{sg(\mathbf{R})} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p = \sum_{s=0}^n 2^{sg(\mathbf{R})} \|\sigma_s(f, \mathbf{R})\|_p \ll \\ &\ll \sum_{s=0}^n 2^{(s-n)g(\mathbf{R})} 2^{n(\frac{1}{p}-1)} \|D_{[2^{\rho n}]}\|_p \asymp \sum_{s=0}^n 2^{(s-n)g(\mathbf{R})} = C_4, \quad C_4 > 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що при деякому виборі сталої $C_3 > 0$ функція f належить класу $\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}$.

Нехай, далі, $M_n = \dim \mathcal{T}([2^{\rho n}], d)$ — кількість елементів множини $\mathcal{K}([2^{\rho n}], d)$ і $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^{M_n}$ — довільна ортонормована система функцій у просторі $L_2 \cap \mathcal{T}([2^{\rho n}], d)$. Тоді

$$e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} = \sum_{j=1}^{M_n} a_{\mathbf{k}}^j u_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d),$$

і

$$u_j(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)} \overline{a_{\mathbf{k}}^j} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad j = \overline{1, M_n}, \quad (9)$$

де $a_{\mathbf{k}}^j$ — коефіцієнти Фур'є експоненти $e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$ за системою $\{u_j\}_{j=1}^{M_n}$, а $\overline{a_{\mathbf{k}}^j}$ — комплексно-спряжене до $a_{\mathbf{k}}^j$ число. Оскільки система функцій $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)}$ є ортонормованою у просторі L_2 , то згідно з рівністю Парсеваля із (9) отримуємо

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)} |a_{\mathbf{k}}^j|^2 = 1. \quad (10)$$

Розглянемо відхилення функції $D_{[2^{\rho n}]}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ від її частинної суми Фур'є порядку m за системою $\{u_j\}_{j=1}^{M_n}$. Маємо

$$\begin{aligned} R_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= D_{[2^{\rho n}]}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - S_m^{\mathcal{U}} D_{[2^{\rho n}]}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} \sum_{j=m+1}^{M_n} a_{\mathbf{k}}^j u_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=m+1}^{M_n} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)} a_{\mathbf{k}}^j e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} \right) u_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далі двічі використовуючи рівність Парсеваля та співвідношення (10), одержуємо

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} \|R_m(\cdot, \mathbf{y})\|_2^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\pi_d} \sum_{j=m+1}^{M_n} \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho n}], d)} a_{\mathbf{k}}^j e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} \right|^2 d\mathbf{y} =$$

$$= \sum_{j=m+1}^{M_n} \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho^n}], d)} a_{\mathbf{k}}^j e^{i(\mathbf{k}, \cdot)} \right\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^{M_n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}([2^{\rho^n}], d)} |a_{\mathbf{k}}^j|^2 = M_n - m \geq m.$$

З останнього співвідношення, згідно з теоремою про середнє значення визначеного інтеграла, випливає, що існує принаймні одне $\mathbf{y}^* \in \pi_d$ таке, що

$$\|R_m(\cdot, \mathbf{y}^*)\|_2 \geq m^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Покладемо $W = \{f_{\mathbf{y}^*} : f_{\mathbf{y}^*}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\}$.

Таким чином, використовуючи оцінки (8) та (11), з урахуванням того, що простір L_2 є гільбертовим, отримуємо

$$\begin{aligned} d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_2) &\geq d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_2 \cap T([2^{\rho^n}], d)) \gg \\ &\gg d_m(W, L_2 \cap T([2^{\rho^n}], d)) \gg \inf_{\{u_j\}_{j=1}^{M_n}} \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - S_m^{\mathcal{U}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*)\|_2 = \\ &= 2^{-n(g(\mathbf{R})+1-\frac{1}{p})} \inf_{\{u_j\}_{j=1}^{M_n}} \|R_m(\cdot, \mathbf{y}^*)\|_2 \geq 2^{-n(g(\mathbf{R})+1-\frac{1}{p})} m^{\frac{1}{2}} \asymp m^{-g(\mathbf{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Випадок 2: $1 < p < q < 2$. Нехай $\mathcal{U} = \{u_j\}_{j=1}^m$ – довільна система функцій в L_q і

$$E_m(f, \mathcal{U})_q = \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \right\|_q, \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Розглянемо систему функцій $\mathcal{V} = \{v_j\}_{j=1}^m$, де $v_j = \mathbb{V}_{[2^{\rho^n}]} u_j$, $j = \overline{1, m}$, а числа m та n пов'язані між собою, як у попередньому випадку. Тоді для довільної функції $f \in \mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d)$ з урахуванням (3) маємо

$$\begin{aligned} E_m(f, \mathcal{V})_q &= \inf_{c_j} \left\| f - \sum_{j=1}^m c_j v_j \right\|_q = \inf_{c_j} \left\| \mathbb{V}_{[2^{\rho^n}]} f - \sum_{j=1}^m c_j \mathbb{V}_{[2^{\rho^n}]} u_j \right\|_q = \\ &= \inf_{c_j} \left\| \left(f - \sum_{j=1}^m c_j u_j \right) * V_{[2^{\rho^n}]} \right\|_q \ll E_m(f, \mathcal{U})_q. \end{aligned} \quad (12)$$

З іншого боку, для довільної функції $f \in \mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d)$, використовуючи нерівність різних метрик Нікольського (4), одержуємо

$$E_m(f, \mathcal{V})_2 \ll 2^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} E_m(f, \mathcal{V})_q. \quad (13)$$

Таким чином, беручи до уваги співвідношення (7), (12) та (13), отримуємо

$$\begin{aligned} d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_q) &\geq d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_q) \gg 2^{-n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_2) \gg \\ &\gg 2^{-n(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})} d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}} \cap T([2^{\rho^n}], d), L_2 \cap T([2^{\rho^n}], d)) \asymp \end{aligned}$$

$$\asymp 2^{-n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} m^{-g(\mathbf{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \asymp m^{-g(\mathbf{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Випадок 3: $1 < p < 2 < q \leq \infty$ або $2 \leq p < q \leq \infty$. На підставі відомої нерівності $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$ з урахуванням випадку 1 та теореми Д можемо записати

$$d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_q) \geq d_m(\mathbb{B}_{p,1}^{\mathbf{R}}, L_2) \asymp \begin{cases} m^{-g(\mathbf{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p < 2 < q \leq \infty, \\ m^{-g(\mathbf{R})}, & 2 \leq p < q \leq \infty. \end{cases}$$

Теорему доведено.

Порівнюючи теореми Г і 1, отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. Якщо $1 < p < q \leq 2$ і $g(\mathbf{R}) > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, то підпростір $T([2^{\rho n}], d)$ є екстремальним (у сенсі порядку) підпростором для наближення функцій із класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$.

Зауваження 1. У випадку $\theta = \infty$, який не охоплено в теоремі 1, тобто для класів $\mathbb{H}_p^{\mathbf{R}}$, порядкові оцінки колмогоровських поперечників було встановлено В. М. Темляковим [6] (розділ 2).

2. Для ізотропних класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{r}}$ порядкову оцінку (5) отримав А. С. Романюк [7].

3. Теорема 1 доповнює оцінки колмогоровських поперечників класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^{\mathbf{R}}$ у просторах L_q , які були встановлені у роботі [3] (див. теорему Д), для інших співвідношень між параметрами p та q .

Література

1. Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – 60. – С. 42–81.
2. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – 38. – С. 244–278.
3. Миронюк В. В. Тригонометричні наближення та колмогоровські поперечники анізотропних класів Бесова періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 8. – С. 1117–1132.
4. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
5. Kolmogoroff A. Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. – 1936. – 37, № 1. – P. 107–110.
6. Темляков В. N. Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 272 p.
7. Романюк А. С. Билинейные приближения и колмогоровские поперечники периодических классов Бесова // Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – 6, № 1. – С. 222–236.

Одержано 14.07.15