УДК 513.83; 517.5

Ю. Б. Зелінський, М. В. Стефанчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТІНЬ

We solve the shadow problem in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{N}^n$ for a family of sets obtained from any convex domain with nonempty interior with the help of parallel translations and homotheties. We determine the number of balls with centers on the sphere, sufficient for giving a shadow in the n-dimensional complex (hypercomplex) space.

Получено решение задачи о тени в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ для семейства множеств, полученных из произвольного выпуклого множества с непустой внутренностью с помощью параллельных переносов и гомотетий. Кроме этого установлено какое количество шаров с центрами на сфере достаточно для создания тени в n-мерном комплексном (гиперкомплексном) пространстве.

1. Вступ. Метою роботи є розв’язання задачі про тінь для сім’ї множин, отриманих із довільної опуклої множини з непорожньою внутрішністю з допомогою паралельних перенесень та гомотетій в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Це еквівалентно знаходженню умов, які забезпечують належність точки узагальнено опуклій оболонці цієї сім’ї множин.

Означення 1. *Множина $B \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, якщо знайдеться m-вимірна площина L така, що $x \in L$ і $L \bigcap B = \varnothing$.*

Означення 2. *Множина B називається m-опуклою, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$.*

Ці означення задовольняють аксіому опуклості — перетин m-опуклих множин буде m-опуклою множиною. Тому для довільної множини $B \subset \mathbb{R}^n$ можна розглядати мінімальну m-опуклу множину, яка містить B, і називати її m-опуклою оболонкою множини B [1–3].

Частковим випадком належності точки 1-оболонці об’єднання сім’ї куль є задача про тінь, сформульована Худайбергановим [4, 5, 7].

Задача (про тінь). Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими за радіус сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?

Худайберганов довів, що при $n = 2$ двох куль достатньо для створення тіні [7]. У роботах [1, 2] отримано повний розв’язок цієї задачі. Показано, що при $n > 2$ $(n + 1)$-ї кулі необхідно і достатньо для того, щоб центр сфери належав 1-опуклій оболонці сім’ї куль.

2. 1-Опуклість для центра сфери. Нехай в n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задано опуклу множину з непорожньою внутрішністю. Із даної множини за допомогою групи геометричних перетворень отримано сім’ю попарно неперетинних замкнених множин. Постає проблема: скільки (найменша кількість) елементів цієї сім’ї достатньо для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-опуклій оболонці цієї сім’ї (тобто для того, щоб довільна пряма, яка проходить через точку x, перетинала принаймні одну з цих множин)? У роботі [3] отримано розв’язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю. Показано, що для цього необхідно і достатньо n елементів сім’ї. Розглянемо аналогічну задачу для сім’ї множин, отриманих з опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій.

Теорема 1. *Для того щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Доведення. Нехай B — задана опукла множина з непорожньою внутрішністю і $O \in \mathbb{R}^n$ — довільна точка. Виконаємо паралельне перенесення множини B так, щоб точка O належала внутрішності множини B. Локально межу опуклої множини можна задати опуклою функцією [8], яка диференційовна майже скрізь на області задання [6]. Тому в будь-якому околі довільної точки межі множини B знайдеться точка, в якій існує дотична гіперплощина. Опишемо навколо множини B багатогранник з якомога меншою кількістю граней, грані якого є дотичними гіперплощинами до множини B. В залежності від виду множини кількість граней багатогранника буде змінюватися в межах від $n+1$ (n-вимірний симплекс) до $2n$ (паралелепіпед). Якщо кількість граней більша, ніж $n+1$, то кількість пар паралельних граней буде від 1 до n.

Розглянемо випадок, коли навколо множини описано паралелепіпед. З точки O проведемо n променів, перпендикулярних до кожної з граней паралелепіпеда, які не є паралельними. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки перетину променів з гранями паралелепіпеда, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — точки перетину променів з множиною B; інколи ці точки відповідно збігаються між собою. На кожному з променів $OX_1, OX_2, \ldots, OX_n$ в досить малих околах точок $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ виберемо точки $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ так, щоб точки Y_i були внутрішніми точками відрізків OZ_i, $i = 1, \ldots, n$. Виконаємо паралельні перенесення множини на вектори $\overrightarrow{Z_1O}, \overrightarrow{Z_2O}, \ldots, \overrightarrow{Z_nO}$. Отримаємо множини $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Однак утворені таким способом множини можуть перетинатися.

Нехай r_1 — радіус мінімального кола з центром у точці O, яке містить кожну з множин $B_1, B_2, \ldots, B_n$, а r_2 — радіус максимального кола з центром у цій точці, внутрішність якого не перетинається з жодною з утворених множин і яке дотикається принаймні до однієї з множин $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Виконаємо гомотетичні перетворення множин $B_2, \ldots, B_n$ з коефіцієнтами відповідно

$$k_1 = r_2/r_1, k_2 = (r_2/r_1)^2 = {k_1}^2, \ldots, k_{n-1} = (r_2/r_1)^{n-1} = {k_1}^{n-1}.$$

Отримаємо множини $B_2', \ldots, B_n'$. Утворені таким способом множини $B_1, B_2', \ldots, B_n'$ не перетинаються. Легко переконатися, що двосторонній конус, заданий множинами $B_1, B_2', \ldots, B_n'$, містить всі точки простору $\mathbb{R}^n$. Таким чином, n опуклих множин достатньо для створення тіні. З леми 1 [1] випливає, що $(n-1)$-ї опуклої множини замало для створення тіні. Тому для створення тіні необхідно і достатньо n опуклих множин. Легко переконатися, що кількість опуклих множин залишиться такою самою, якщо навколо множини B описано багатогранник з меншою кількістю граней.

Теорему 1 доведено.

3. 1-Опуклість для внутрішності сфери. Узагальнимо задачу про тінь для куль з центрами на сфері. Скільки найменше попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) за радіус сфери, забезпечать належність внутрішності сфери 1-опуклій оболонці сім'ї куль?

Розглянемо випадок $n = 2$. Впишемо в коло правильний трикутник. Побудуємо три відкриті (замкнені) круги з центрами у вершинах трикутника та радіусами, які дорівнюють половині сторони трикутника. Бачимо, що довільна пряма, що проходить через будь-яку точку внутрішності кола, перетне хоча б один із цих кругів. Тобто внутрішність кола належить 1-опуклій оболонці цих кругів. Але при цьому кулі попарно дотикаються. Для уникнення цього для досить малого ε розглянемо три круги радіусів $c + \varepsilon, c - \varepsilon/2,\ c - \varepsilon/2^2$, де c — половина довжини сторони трикутника. Розмістимо круги так, щоб вони попарно дотикалися, а їхні центри утворювали трикутник, який мало відрізняється від правильного. Через центри цих кругів проходить єдине коло, внутрішність якого належить 1-оболонці цих кругів. Внутрішності кругів із центрами у вершинах трикутника утворюють сім'ю з трьох відкритих куль, для якої внутрішність кола, описаного навколо трикутника, належить 1-оболонці цієї сім'ї. Якщо круги замкнені, то внаслідок неперервності, трохи зменшивши їхні радіуси, отримаємо, що трьох замкнених куль достатньо для створення тіні для внутрішності кола, описаного навколо трикутника. Тому справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Для того щоб внутрішність кола належала* 1*-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих* (*замкнених*) *кругів із центрами на колі та радіусами*, *меншими за радіус кола*, *необхідно і достатньо трьох кругів.*

***Зауваження* 1.** У випадку $n > 2$ методика, застосована при доведенні теореми 2, не підходить. При $n = 3$ впишемо у двовимірну сферу правильний тривимірний симплекс та розмістимо у його вершинах чотири кулі з радіусами, що дорівнюють половині ребра симплекса. Тоді через кожну з точок, яка є серединою ребра симплекса, можна провести пряму, яка не буде перетинати жодну з цих куль.

***Зауваження* 2.** Як і при доведенні теореми 2, можна показати, що при $n > 2$ існує скінченна кількість куль з центрами на сфері, для яких довільна точка внутрішності сфери належить їх 1-опуклій оболонці. Але знайти мінімальну кількість цих куль поки що не вдалося.

***Зауваження* 3.** $(n + 1)$-ї кулі достатньо, щоб усі точки, які містяться у кулі, обмеженій сферою, належали до $(n - 1)$-опуклої оболонки системи куль. Для правильного симплекса візьмемо кулі з центрами у його вершинах та радіусами, що дорівнюють половині висоти симплекса. Тоді опукла оболонка цієї системи буде збігатися з її $(n - 1)$-опуклою оболонкою та міститиме сферу.

4. Задача про тінь для 1-напівопуклості. Розглянемо більш загальні щодо попередніх означень об'єкти.

Означення 3. *Множина $B \subset \mathbb{R}^n$ називається m-напівопуклою відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, якщо знайдеться m-вимірна півплощина L така*, *що $x \in L$ і $L \bigcap B = \varnothing$.*

Означення 4. *Множина B називається m-напівопуклою*, *якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus$* B.

Ці означення також задовольняють аксіому опуклості. Тому для довільної множини $B \subset \mathbb{R}^n$ можна розглядати m-напівопуклу оболонку цієї множини [1 – 3].

Розглянемо аналог задачі про тінь для напівопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою паралельних перенесень та гомотетій, достатня для того, щоб вибрана точка $x \in \mathbb{R}^n$ належала 1-напівопуклій оболонці цієї сім'ї (тобто для того, щоб довільний промінь, який проходить через цю точку, перетинав принаймні одну з цих множин). У роботі [3] отримано розв'язок цієї задачі для групи геометричних перетворень, яка складається з рухів та гомотетій опуклої множини з непорожньою внутрішністю (показано, що для цього необхідно і достатньо $(n+1)$-ї множини).

Теорема 3. *Для того щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-напівопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо $2n$ елементів цієї сім'ї.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, опишемо навколо опуклої множини багатогранник з якомога меншою кількістю граней. У внутрішності множини виберемо довільну точку O. З цієї точки проведемо промені, перпендикулярні до кожної грані багатогранника. В залежності від виду багатогранника кількість таких променів буде змінюватися в межах від $n+1$ до $2n$. Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ — точки перетину променів із гранями багатогранника, а $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}, \ldots, Y_{2n}$ — точки перетину променів із множиною B, інколи ці точки відповідно збігаються. На кожному з променів $OX_1, OX_2, \ldots, OX_{n+1}, \ldots, OX_{2n}$ в досить малих околах точок $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}, \ldots, Y_{2n}$ виберемо точки $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}, \ldots, Z_{2n}$ так, щоб точки Y_i були внутрішніми точками відрізків OZ_i, $i = 1, \ldots, n+1, \ldots, 2n$ (в залежності від виду багатогранника кількість цих променів буде змінюватися від $n+1$ до $2n$). Виконаємо паралельні перенесення множини на вектори $\overrightarrow{Z_1O}, \overrightarrow{Z_2O}, \ldots, \overrightarrow{Z_{n+1}O}, \ldots, \overrightarrow{Z_{2n}O}$. Отримаємо множини $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$. Однак утворені таким способом множини можуть перетинатися.

Нехай r_1 — радіус мінімального кола з центром у точці O, яке містить кожну з множин $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$, а r_2 — радіус максимального кола з центром у цій точці, внутрішність якого не перетинається з жодною з утворених множин і яке дотикається принаймні до однієї з множин $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$. Виконаємо гомотетичні перетворення множин $B_2, \ldots, B_{n+1}, \ldots, B_{2n}$ з коефіцієнтами відповідно

$$k_1 = r_2/r_1, k_2 = (r_2/r_1)^2 = {k_1}^2, \ldots, k_n = (r_2/r_1)^n = {k_1}^n, \ldots$$
$$\ldots, k_{2n-1} = (r_2/r_1)^{2n-1} = {k_1}^{2n-1}.$$

Отримаємо множини $B_2^{'}, \ldots, B_{n+1}^{'}, \ldots, B_{2n}^{'}$. Утворені таким способом множини $B_1, B_2^{'}, \ldots$ $\ldots, B_{n+1}^{'}, \ldots, B_{2n}^{'}$ не перетинаються. Легко переконатися, що конус, заданий множинами B_1, $B_2^{'}, \ldots, B_{n+1}^{'}, \ldots, B_{2n}^{'}$, містить всі точки простору $\mathbb{R}^n$. Таким чином, якщо навколо множини можна описати n-вимірний симплекс, то $(n+1)$-ї опуклої множини достатньо для створення тіні, а якщо паралелепіпед, то для створення тіні достатньо $2n$ множин, в іншому випадку для створення тіні достатньо від $n+2$ до $2n-1$ опуклих множин. З теореми 4 [1] випливає, що n опуклих множин замало для створення тіні. Тому для створення тіні необхідно і достатньо $2n$ опуклих множин.

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 4.** Узагальнимо задачу про тінь для напівопуклості. Яка найменша кількість попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими (які не перевищують) за радіус сфери, забезпечить належність внутрішності сфери 1-напівопуклій оболонці сім'ї куль? При $n > 1$ не існує скінченної кількості куль для створення тіні у довільній точці внутрішності сфери. Візьмемо дві кулі, центри яких найближчі. На відрізку, що з'єднує центри цих куль, знайдеться точка, яка не належить їх об'єднанню, та існує промінь з початком у будь-якій точці внутрішності сфери, який проходить через дану точку, що не перетинає систему куль.

5. Задача про тінь в комплексному та гіперкомплексному просторах. Розглянемо n-вимірні комплексний та гіперкомплексний простори.

Означення 5. *Множина* $B \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ *називається* m*-комплексно* (m*-гіперкомплексно*) *опуклою відносно точки* $z \in \mathbb{C}^n \setminus B$ $(\mathbb{H}^n \setminus B)$, *якщо знайдеться* m*-вимірна комплексна* (*гіперкомплексна*) *площина* L *така*, *що* $z \in L$ *і* $L \bigcap \mathrm{B} = \varnothing$.

Означення 6. *Множина* B *називається* m*-комплексно* (m*-гіперкомплексно*) *опуклою*, *якщо вона* m*-комплексно* (m*-гіперкомплексно*) *опукла відносно кожної точки* $z \in \mathbb{C}^n \setminus B$ $(\mathbb{H}^n \setminus B)$.

Для довільної множини $B \subset \mathbb{C}^n(B \subset \mathbb{H}^n)$ можна розглядати мінімальну m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклу множину, яка містить B, і називати її m-комплексною (m-гіперкомплексною) опуклою оболонкою множини B.

У статті [3] сформульовано задачу про тінь у комплексному та гіперкомплексному просторах. Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ та радіусами, меншими за радіус сфери, достатня, щоб довільна комплексна (гіперкомплексна) пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль (тобто для того, щоб центр сфери належав 1-комплексній чи 1-гіперкомплексній оболонці цих куль)?

Встановлено, що в комплексному (гіперкомплексному) просторі при $n = 2$ для створення тіні необхідно і достатньо двох куль [3]. Дослідимо, скільки таких куль достатньо для створення тіні при $n \geq 3$ у цих просторах.

Теорема 4. *Для того щоб вибрана точка в* n*-вимірному комплексному* (*гіперкомплексному*) *евклідовому просторі* $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$, $n \geq 3$, *належала* 1*-комплексній* (1*-гіперкомплексній*) *оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих* (*замкнених*) *куль з центрами на сфері* $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ *та радіусами*, *меншими за радіус сфери*, *достатньо* $2n$ $(4n-2)$ *куль*.

Доведення. В n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ $(\mathbb{H}^n)$ розглянемо сферу S^{2n-1} (S^{4n-1}). Через центр цієї сфери проведемо дійсну площину розмірності $2n-1$ $(4n-3)$. Вона перетне сферу S^{2n-1} (S^{4n-1}) по сфері S^{2n-2} (S^{4n-4}). Через центр сфери S^{2n-1} (S^{4n-1}) проведемо довільну комплексну (гіперкомплексну) пряму, яка не належить площині $\mathbb{R}^{2n-1}$ $(\mathbb{R}^{4n-3})$. Ця комплексна (гіперкомплексна) пряма має дійсну розмірність 2 (4). Перетин даної прямої та площини $\mathbb{R}^{2n-1}$ $(\mathbb{R}^{4n-3})$ буде містити дійсну пряму. Для того щоб центр сфери $S^{2n-2} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ $(S^{4n-4} \subset \mathbb{R}^{4n-3})$ належав 1-оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на цій сфері та радіусами, меншими за радіус сфери, необхідно і достатньо $2n$ $(4n-2)$ куль. Тому $2n$ $(4n-2)$ куль достатньо, щоб центр сфери $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ $(S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n)$ належав 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї куль з відповідними умовами.

Теорему 4 доведено.

Література

1. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Задача о тени // Доп. НАН України. – 2015. – № 5. – С. 15 – 20.
2. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // arXiv preprint arXiv:1501.06747.
3. *Зелинский Ю. Б.* Задача о тени для семейства множеств // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 4. – С. 197 – 204.
4. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012. – 280 с.
5. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
6. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества: Пер. с нем. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
7. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. – Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.82, № 1772-85 Деп.
8. *Anderson R. D., Klee V. L.* Convex functions and upper-semi-continuous collections // Duke Math. J. – 1952. – **19**. – P. 349 – 357.

Одержано 03.11.15