УДК 517.951.2

Б. Ю. Иргашев (Наманган. инж.-пед. ин-т, Узбекистан)

О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ИМЕЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

We construct partial solutions of odd-order equations with multiple characteristics and study some of their properties.

Побудовано частинні розв'язки для рівняння непарного порядку з кратними характеристиками та вивчено деякі їхні властивості.

Введение и формулировка основных результатов. При изучении линейных уравнений в частных производных важную роль играют так называемые фундаментальные решения, т. е. решения, имеющие особенности определенного типа. Если для основных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами известны точные формулы фундаментальных решений, то для уравнений высших порядков это не так. Общий метод построения фундаментального решения для эллиптических уравнений высших порядков приведен в работе [1], а для уравнений с кратными характеристиками — в [2]. Используя методику из [2], для уравнений

$$D_x^{2n}u-(-1)^nD_y^1u=0,$$

$$D_x^{2n+1}u+(-1)^nD_y^2u=0,$$

$$D_x^{2n+1}u+(-1)^nD_y^1u=0$$

в работах [3, 4, 5] соответственно найдены фундаментальные решения в виде несобственных интегралов и построена теория потенциала.

При рассмотрении так называемого стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнения)

$$D_x^3u\left(x,y\right)+D_y^2u+\frac{a}{y}D_y^1u=f\left(x,y\right)\quad \text{при}\quad a=0$$

с помощью метода подобия и автомодельного решения в работах [6, 7] построены и изучены некоторые свойства фундаментальных решений, выраженные через специальные функции. Также в работах [8, 9] в явном виде построены функции Грина некоторых внешних краевых задач в случаях $a=0$ и $a=1$. Случай произвольного a исследован в [10]. Следует отметить, что имеются многочисленные работы, в которых уравнения нечетного порядка изучены функциональными методами (см. [11, 12]). Вырожденный случай исследован в [13].

В данной работе мы построим частные решения $U_s(x,y,\xi,\eta),\ s\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, уравнения

$$(-1)^nD_x^{2n+1}u\left(x,y\right)-(-1)^mD_y^{2m}u\left(x,y\right)=0 \tag{1}$$

(где $(2n+1,2m)=1$ (т. е. взаимно простые), $n,m\in N,\ n\geq m$), которые имеют некоторые свойства фундаментального решения.

Сначала методом подобия [14] построим дельтообразные решения $U_s^*(x,y,\xi,\eta)$ уравнения (1), которые имеют вид

$$U_s^*(x,y,\xi,\eta)=\frac{f_s^*(t)}{\pi\left|y-\eta\right|^{\frac{2m}{2n+1}}},$$

где

$$f_s^*(t)=\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\beta_1^s\right)\cos\left(\lambda t+\beta_2^s\lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right)d\lambda,\quad s\in\{0,1,\ldots,m-1\},$$

$$t=\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{\frac{2m}{2n+1}}},$$

$$\beta_s=\beta_1^s-i\beta_2^s,\qquad \beta_1^s=\sin z_s,\qquad \beta_2^s=cos z_s,\qquad z_s=\frac{4s+1}{4m}\pi,\quad s\in\{0,1,\ldots,m-1\},$$

и докажем их основное свойство.

Теорема 1 (свойство функций $U_s^*(x,y,\xi,\eta)$)**.** *Для любого $\varphi\in C[a;b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0,\eta\to y}\int\limits_a^b U_s^*(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x_0).$$

Далее строим частные решения $U_s(x,y,\xi,\eta)$ такие, что

$$U_s(x,y,\xi,\eta)=\left|y-\eta\right|^b f_s(t),\qquad t=(x-\xi)\left|y-\eta\right|^a,\quad s\in\{0,1,\ldots,m-1\},$$

где $f_s(t)$ и b выбираются так, чтобы

$$D_y^{2m-1}U_s(x,y,\xi,\eta)=\operatorname{sgn}(y-\eta)\,U_s^*(x,y,\xi,\eta).$$

Теорема 2 (связь между функциями $f_s^*(t)$ и $f_s(t)$)**.** *Функции $f_s(t)$ имеют вид*

$$f_s(t)=\frac{1}{a\,(2m-2)!}\sum_{j=0}^{2m-2}t^{\frac{j-b}{a}}\left(c_{js}^{+}-(-1)^jC_{2m-2}^j\int\limits_t^{+\infty}\tau^{-\frac{j-b}{a}-1}f_s^*(\tau)\,d\tau\right),\quad t>0,$$

$$f_s(t)=\frac{1}{a\,(2m-2)!}\sum_{j=0}^{2m-2}|t|^{\frac{j-b}{a}}\left(c_{js}^{-}-(-1)^jC_{2m-2}^j\int\limits_{-\infty}^{t}|\tau|^{-\frac{j-b}{a}-1}f_s^*(\tau)\,d\tau\right),\quad t<0$$

$\left(s\in\{0,1,\ldots,m-1\},\ a=-\dfrac{2m}{2n+1},\ b=-2na-1,\ c_{js}^{+},\ c_{js}^{-}\right.$ *— определенным образом вычисленные постоянные*$\Big)$, *и для них справедливо равенство*

$$f_s^{(2n)}(t)=(-1)^{n+m+1}\,\frac{2m}{2n+1}tf_s^*(t).$$

Теорема 3 (свойства функции $U_s(x,y,\xi,\eta)$). *Пусть $\varphi(t)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[c,d]$. Тогда*:

1) $\lim_{y\to\eta+0}\int_c^d D_\eta^{2m-1}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi)d\xi = -\varphi\,(x)\,,$

2) $\lim_{y\to\eta-0}\int_c^d D_\eta^{2m-1}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi)d\xi = \varphi\,(x)\,,$

3) $\lim_{x\to\xi+0}\int_c^d \varphi\,(\eta)\,D_\xi^{2n}U_s\,(x,y,\xi,\eta)\,d\eta = (-1)^{n+m+1}\dfrac{2\,(n-m+2s+1)}{2n+1}\varphi(y),$

4) $\lim_{x\to\xi-0}\int_c^d \varphi\,(\eta)\,D_\xi^{2n}U_s\,(x,y,\xi,\eta)\,d\eta = (-1)^{n+m}\dfrac{2\,(n+m-2s)}{2n+1}\varphi(y).$

Доказательство полученных результатов. Построим дельтообразное решение уравнения (1). Для этого рассмотрим следующую задачу.

Задача A. Найти решение уравнения (1) со следующими краевыми условиями:

$$\lim_{y\to+0} u\,(x,y) = \begin{cases} 1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Решение задачи. Выполним замену переменных $t = xy^a$, где $a = -\dfrac{2m}{2n+1}$. Затем вычислим частные производные при $y\neq\eta$:

$$D_x^{2n+1}u = y^{-2m}D_t^{2n+1}u, \tag{2}$$

$$D_y^{2m} = D_y^{2m-1}\left(D_t^1 u D_y^1 t\right) = \sum_{k_1=0}^{2m-1}\left(C_{2m-1}^{k_1}D_y^{2m-1-k_1}\left(D_y^1 t\right)D_y^{k_1}\left(D_t^1 u\right)\right) =$$

$$= D_y^{2m-1}\left(D_y^1 t\right)D_t^1 u + \sum_{k_1=1}^{2m-1}C_{2m-1}^{k_1}D_y^{2m-1-k_1}\left(D_y^1 t\right)D_y^{k_1-1}\left(D_t^2 u D_y^1 t\right).$$

Введем обозначение $(a)_{j+1} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-j)$ и будем считать, что $(a)_0 = 1$. Тогда $D_y^j\left(D_y^1 t\right) = \dfrac{(a)_{j+1}t}{y^{j+1}}$. Отсюда находим

$$D_y^{2m} = \frac{(a)_{2m}t}{y^{2m}}D_t^1 u + \sum_{k_1=1}^{2m-1}C_{2m-1}^{k_1}\frac{(a)_{2m-k_1}}{y^{2m-k_1}}t\sum_{k_2=0}^{k_1-1}C_{k_1-1}^{k_2}D_y^{k_1-k_2-1}\left(D_y^1 t\right)D_y^{k_2}\left(D_t^2 u\right) =$$

$$= \frac{(a)_{2m}}{y^{2m}}tD_t^1 u + \sum_{k_1=1}^{2m-1}C_{2m-1}^{k_1}\frac{(a)_{2m-k_1}}{y^{2m-k_1}}tD_y^{k_1-1}\left(D_y^1 t\right)D_t^2 u +$$

$$+\sum_{k_1=1}^{2m-1}\sum_{k_2=1}^{k_1-1}C_{2m-1}^{k_1}C_{k_1-1}^{k_2}\frac{(a)_{2m-k_1}}{y^{2m-k_1}}\frac{(a)_{k_1-k_2}}{y^{k_1-k_2}}t^2D_y^{k_2-1}\left(D_t^3 u D_y^1 t\right).$$

Продолжая этот процесс, получаем формулу

$$D_y^{2m}u = y^{-2m}\sum_{j=1}^{2m}\left(A_{j-1}^{2m}t^jD_t^ju\right), \tag{3}$$

где

$$A_j^{2m} = \sum_{k_1=j}^{2m-1}\sum_{k_2=j-1}^{k_1-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{k_{j-1}-1}\left((a)_{k_j}\prod_{s=1}^{j}C_{k_{s-1}-1}^{k_s}(a)_{k_{s-1}-k_s}\right),$$

причем $k_0 = 2m,\ j\in\{1,2,\ldots,2m-1\},\ k_1>k_2>\ldots>k_j\geq 1$. Далее будем считать, что $A_i^j = 0$ при $i\geq j$. Отметим некоторые свойства коэффициентов A_i^j.

Лемма 1. *Коэффициенты* A_i^j *имеют следующие свойства*:

1) $A_i^{i+1} = a^{i+1}$,

2) $A_i^j = \sum_{k=i}^{j-1}C_{j-1}^k(a)_{j-k}A_{i-1}^k$,

3) $A_i^j = a\left((i+1)\,A_i^{j-1} + A_{i-1}^{j-1}\right) - (j-1)\,A_i^{j-1}$ *при* $i\geq 1$,

4) $A_0^j = (a)_j$.

Доказательство. 1. Очевидно, что $A_0^1 = a$. Далее, используя свойство 3 и то, что $A_i^j = 0$ при $i\geq j$, имеем

$$A_i^{i+1} = a\left((i+1)\,A_i^i + A_{i-1}^i\right) - iA_i^i = aA_{i-1}^i = a^iA_0^1 = a^{i+1}.$$

Второе свойство следует из представления A_j^{2m} при $j=i,\ 2m=j,\ s=1,\ k_0=j,\ k_1=k$.

3. Имеем

$$D_y^{j-1}u = y^{-j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\left(A_{i-1}^{j-1}t^iD_t^iu\right).$$

Возьмем производную

$$\left(D_y^{j-1}u\right)_y = D_y^ju = (1-j)\,y^{-j}\sum_{i=1}^{j-1}\left(A_{i-1}^{j-1}t^iD_t^iu\right)+$$

$$+y^{-j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\left(iA_{i-1}^{j-1}t^{i-1}\frac{at}{y}D_t^iu\right) + y^{-j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\left(A_{i-1}^{j-1}t^i\frac{at}{y}D_t^{i+1}u\right) =$$

$$= y^{-j}\sum_{i=1}^{j-1}t^iD_t^iu\left((1-j)\,A_{i-1}^{j-1} + iA_{i-1}^{j-1}a\right) + y^{-j}\sum_{i=2}^{j}\left(aA_{i-2}^{j-1}t^iD_t^iu\right).$$

С другой стороны,

$$D_y^ju = y^{-j}\sum_{i=1}^{j}\left(A_{i-1}^jt^iD_t^iu\right).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых $t^iD_t^iu$, получим требуемый результат.

Четвертое свойство автоматически следует из соотношения (3) при $j=0$.

Лемма 1 доказана.

Подставив (2), (3) в (1), получим следующую задачу:

$$(-1)^n u^{(2n+1)}(t) - (-1)^m \sum_{j=1}^{2m} A_{j-1}^{2m} t^j u^{(j)}(t) = 0,$$

$$u(+\infty) = 1, \qquad u(-\infty) = 0.$$

Пусть $v(t) = u'(t)$. Отсюда имеем

$$(-1)^n v^{(2n)}(t) - (-1)^m \sum_{j=0}^{2m-1} A_j^{2m} t^{j+1} v^{(j)}(t) = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$u(t) = c \int_{-\infty}^{t} v(\tau) d\tau,$$

где

$$c = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\, d\tau \right]^{-1}.$$

Значит, будем искать решение уравнения (4) из класса $L_1(-\infty, +\infty)$. Предварительно возьмем производную от уравнения (4):

$$(-1)^n v^{(2n+1)}(t) - (-1)^m \left(\sum_{j=1}^{2m} \left(A_j^{2m}(j+1) + A_{j-1}^{2m} \right) t^j v^{(j)}(t) + A_0^{2m} v(t) \right) = 0. \tag{5}$$

Теперь найдем решение уравнения (4) из класса $L_1(-\infty, +\infty)$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(x, y, \xi, \eta) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\alpha\mu(x-\xi) - \beta\mu^{\frac{2n+1}{2m}} |y-\eta| \right) d\mu, \tag{6}$$

где α, β — комплексные числа. Имеем

$$D_x^{2n+1} F = \alpha^{2n+1} \int_0^{+\infty} \mu^{2n+1} \exp\left(\alpha\mu(x-\xi) - \beta\mu^{\frac{2n+1}{2m}} |y-\eta| \right) d\mu,$$

$$D_y^{2m} F = \beta^{2m} \int_0^{+\infty} \mu^{2n+1} \exp\left(\alpha\mu(x-\xi) - \beta\mu^{\frac{2n+1}{2m}} |y-\eta| \right) d\mu.$$

Чтобы функция (6) удовлетворяла уравнению (1), потребуем выполнения равенства

$$\alpha^{2n+1} = (-1)^{n+m} \beta^{2m}.$$

При $\alpha = i$ имеем

$$\beta_s = \beta_1^s - i\beta_2^s, \qquad \beta_1^s = \sin z_s, \qquad \beta_2^s = \cos z_s, \qquad z_s = \frac{4s+1}{4m}\pi, \quad s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Найдем теперь α:

$$\alpha^{2n+1} = e^{i(\pi n + \pi/2)}, \qquad \alpha_k = \alpha_k^1 + i\alpha_k^2, \qquad \alpha_k^1 = \cos\theta_k,$$

$$\alpha_k^2 = \sin\theta_k, \qquad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}.$$

Выполнив в выражении (6) замену переменных $\mu = \lambda\,|y-\eta|^a$, $t = (x-\xi)\,|y-\eta|^a$, получим

$$F(x,y,\xi,\eta) = |y-\eta|^a\, g_{ks}(t),$$

где

$$g_{ks}(t) = \int\limits_0^{+\infty} \exp\left(\alpha_k \lambda t - \beta_s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right) d\lambda.$$

Функция $F(x,y,\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению (1) по переменным (x,y) и сопряженному уравнению по переменным (ξ,η). Далее будем считать, что $y>\eta$ (случай $y<\eta$ рассматривается аналогично). Вычислим частные производные и подставим их в уравнение (1):

$$D_x^{2n+1} F(x,y,\xi,\eta) = (y-\eta)^{a-2m}\, g_{ks}^{(2n+1)}(t),$$

$$D_y^{2m} F = \sum_{i=0}^{2m} C_{2m}^i D_y^{2m-i}\,(y-\eta)^a\, D_y^i g_{ks}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2m} C_{2m}^i (a)_{2m-i}\,(y-\eta)^{a+i-2m}\,(y-\eta)^{-i} \sum_{j=1}^{i} t^j g_{ks}^{(j)}(t) A_{j-1}^i =$$

$$= (y-\eta)^{a-2m}\left(\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{i} C_{2m}^i (a)_{2m-i} A_{j-1}^i t^j g_{ks}^{(j)}(t) + (a)_{2m} g_{ks}(t)\right).$$

Тогда получим, что функция $g_{ks}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(-1)^n g_{ks}^{(2n+1)}(t) - (-1)^m \left((a)_{2m} g_{ks}(t) + \sum_{j=1}^{2m} t^j g_{ks}^{(j)} \sum_{i=j}^{2m} C_{2m}^i (a)_{2m-i} A_{j-1}^i\right) = 0.$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{s=j}^{2m} C_{2m}^s (a)_{2m-s} A_{j-1}^s = A_j^{2m}\,(j+1) + A_{j-1}^{2m}. \tag{7}$$

Доказательство. Учитывая равенство

$$\sum_{s=j}^{2m} C_{2m}^{s}(a)_{2m-s}A_{j-1}^{s} = \sum_{s=j}^{2m-1} C_{2m}^{s}(a)_{2m-s}A_{j-1}^{s} + A_{j-1}^{2m},$$

достаточно показать, что

$$(j+1)\, A_j^{2m} = \sum_{s=j}^{2m-1} C_{2m}^{s}(a)_{2m-s}A_{j-1}^{s}.$$

Доказательство проведем индукцией по j. При $j=1$

$$2A_1^{2m} = \sum_{s=1}^{2m-1} C_{2m}^{s}(a)_{2m-s}(a)_s,$$

или (если собрать коэффициенты при одинаковых $(a)_{2m-s}\,(a)_s$)

$$2\left(C_{2m-1}^{s} + C_{2m-1}^{2m-s}\right) = C_{2m}^{s} + C_{2m}^{2m-s} = 2C_{2m}^{s},$$

или

$$C_{2m-1}^{s} + C_{2m-1}^{2m-s} = C_{2m}^{s}.$$

Действительно,

$$\frac{(2m-1)!}{s!\,(2m-s-1)!} + \frac{(2m-1)!}{(2m-1-2m+s)!\,(2m-s)!} =$$

$$= \frac{(2m-1)!}{s!\,(2m-s-1)!}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2m-s}\right) =$$

$$= \frac{2m!}{s!\,(2m-s)!} = C_{2m}^{s}.$$

Пусть формула правильна при $j=n$:

$$(n+1)\sum_{k=n}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}A_{n-1}^{k} = \sum_{k=n}^{2m-1} C_{2m}^{k}(a)_{2m-k}A_{n-1}^{k},$$

тогда при $j=n+1$ имеем

$$(n+2)\sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}A_{n}^{k} =$$

$$= (n+1)\sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}A_{n}^{k} + \sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}A_{n}^{k} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}\sum_{s=n}^{k-1} C_{k}^{s}(a)_{k-s}A_{n-1}^{s} +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(a)_{2m-k}\sum_{s=n}^{k-1} C_{k-1}^{s}(a)_{k-s}A_{n-1}^{s}.$$

Здесь мы использовали свойство 3 коэффициентов A_i^j. Далее

$$\sum_{k=n+1}^{2m-1}\sum_{s=n}^{k-1} C_{2m-1}^{k}\left(C_k^s+C_{k-1}^s\right)(a)_{2m-k}(a)_{k-s}A_{n-1}^{s}=$$

$$=\sum_{s=n}^{2m-1} A_{k-1}^{s}\sum_{k=s+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}\left(C_k^s+C_{k-1}^s\right)(a)_{2m-k}(a)_{k-s}.$$

Теперь преобразуем правую часть равенства:

$$\sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m}^{k}(a)_{2m-k}A_n^k=\sum_{k=n+1}^{2m-1} C_{2m}^{k}(a)_{2m-k}\sum_{s=n}^{k-1} C_{k-1}^{s}\,(a)_{k-s}\,A_{n-1}^{s}=$$

$$=\sum_{s=n}^{2m-2} A_{n-1}^{s}\sum_{k=s+1}^{2m-1} C_{2m}^{k}C_{k-1}^{s}(a)_{2m-k}(a)_{k-s}.$$

Итак, требуется доказать формулу

$$\sum_{k=s+1}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}\left(C_k^s+C_{k-1}^s\right)(a)_{2m-k}(a)_{k-s}=\sum_{k=s+1}^{2m-1} C_{2m}^{k}C_{k-1}^{s}(a)_{2m-k}(a)_{k-s},$$

или, собрав коэффициенты при одинаковых $(a)_{2m-k}(a)_{k-s}$,т. е. при $k=s+t$ и $k=2m-t$, необходимо доказать, что

$$C_{2m-1}^{s+t}\left(C_{s+t}^{s}+C_{s+t-1}^{s}\right)+C_{2m-1}^{2m-t}\left(C_{2m-t}^{s}+C_{2m-t-1}^{s}\right)=$$

$$=C_{2m}^{s+t}C_{s+t-1}^{s}+C_{2m}^{2m-t}C_{2m-t-1}^{s}.$$

Первое выражение после некоторого преобразования примет вид

$$\frac{(2m-1)!}{s!\,(t-1)!\,(2m-s-1-t)!}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{s+t}+\frac{1}{2m-t-s}+\frac{1}{2m-t}\right),$$

а второе —

$$\frac{(2m)!}{s!\,(t-1)!\,(2m-s-1-t)!}\left(\frac{1}{(s+t)\,(2m-s-t)}+\frac{1}{(2m-t)t}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{s+t}+\frac{1}{2m-t-s}+\frac{1}{2m-t}=2m\left(\frac{1}{(s+t)\,(2m-s-t)}+\frac{1}{(2m-t)t}\right)$$

или

$$\frac{2m-t+t}{t\,(2m-t)}+\frac{2m-t-s+s+t}{(s+t)\,(2m-t-s)}=\frac{2m}{(s+t)\,(2m-s-t)}+\frac{2m}{t\,(2m-t)},$$

откуда получаем тождество

$$\frac{2m}{t\,(2m-t)}+\frac{2m}{(s+t)\,(2m-t-s)}=\frac{2m}{(s+t)\,(2m-s-t)}+\frac{2m}{t\,(2m-t)}.$$

Лемма 2 доказана.

Отсюда следует, что функция $g_k(t)$ удовлетворяет уравнению (5) или

$$(-1)^n g_{ks}^{(2n)}(t) - (-1)^m \sum_{j=0}^{2m-1} A_j^{2m} t^{j+1} g_{ks}^{(j)}(t) = \mathrm{const}\,.$$

Вычислив константу (для этого вместо t подставим 0), получим тождество

$$(-1)^n \left(\alpha_k g_{ks}(t)\right)^{(2n)} - (-1)^m \sum_{j=0}^{2m-1} A_j^{2m} t^{j+1} \left(\alpha_k g_{ks}(t)\right)^{(j)} = (-1)^m \frac{(2m)!}{2n+1}. \qquad (8)$$

Поскольку правая часть — вещественное число, функция $\mathrm{Im}\left(\alpha_k g_{ks}(t)\right)$ удовлетворяет уравнению (4), а $\mathrm{Re}\left(\alpha_k g_{ks}(t)\right)$ — уравнению (8). Таким образом,

$$\alpha_k g_{ks}(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\left(\lambda t \alpha_k^1 - \lambda^{\frac{2n+1}{2m}} \beta_1^s\right) + i\left(\theta_k + \lambda t \alpha_k^2 + \beta_2^s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right)\right) d\lambda,$$

$$\mathrm{Re}\left(\alpha_k g_{ks}(t)\right) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\lambda t \alpha_k^1 - \lambda^{\frac{2n+1}{2m}} \beta_1^s\right) \cos\left(\theta_k + \lambda t \alpha_k^2 + \beta_2^s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right) d\lambda,$$

$$\mathrm{Im}\left(\alpha_k g_{ks}(t)\right) = \int_0^{+\infty} \exp\left(\lambda t \alpha_k^1 - \lambda^{\frac{2n+1}{2m}} \beta_1^s\right) \sin\left(\theta_k + \lambda t \alpha_k^2 + \beta_2^s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right) d\lambda.$$

С учетом того, что решение задачи А принадлежит классу $L_1\left(-\infty; +\infty\right)$, мы в качестве α_k возьмем i. Тогда

$$f_s^*(t) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda^{\frac{2n+1}{2m}} \beta_1^s\right) \cos\left(\lambda t + \beta_2^s \lambda^{\frac{2n+1}{2m}}\right) d\lambda, \quad s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\,.$$

Вычисления показывают [2, 15], что

$$\int_0^{+\infty} f_s^*(t)dt = \frac{n-m+2s+1}{2n+1}\pi, \qquad \int_{-\infty}^{0} f_s^*(t)dt = \frac{n+m-2s}{2n+1}\pi, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_s^*(t)dt = \pi.$$

Значит, решение задачи А имеет вид

$$u\left(x, y\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{xy^{-\frac{2m}{2n+1}}} f_s^*(t)dt.$$

Если ввести обозначение

$$F\left(xy^{-\frac{2m}{2n+1}}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{xy^{-\frac{2m}{2n+1}}} f_s^*(t)dt,$$

то решение примет вид
$$u\left(x,y\right)=F\left(xy^{-\frac{2m}{2n+1}}\right).$$

Пусть теперь в задаче A начальные условия таковы:
$$u\left(x,0\right)=\begin{cases}1, & x\geq x_1,\\ 0, & x<x_1.\end{cases}$$

Тогда решение запишется в виде
$$u\left(x,y\right)=F\left(\frac{x-x_1}{y^{\frac{2m}{2n+1}}}\right).$$

Если начальные условия задаются в виде
$$u\left(x,0\right)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ 1, & x_1\leq x\leq x_2,\\ 0, & x>x_2,\end{cases}$$

то решение представимо соотношением
$$u\left(x,y\right)=F\left(\frac{x-x_1}{y^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)-F\left(\frac{x-x_2}{y^{\frac{2m}{2n+1}}}\right),$$

которое можно записать следующим образом:
$$u\left(x,y\right)=-\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\xi}F\left(\frac{x-\xi}{y^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)d\xi.$$

Введем обозначение
$$U_s^*(x,y,\xi,\eta)=-\frac{\partial}{\partial\xi}F\left(\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)=\frac{f_s^*(t)}{\pi\left|y-\eta\right|^{\frac{2m}{2n+1}}},$$

где
$$t=\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{\frac{2m}{2n+1}}}.$$

***Доказательство теоремы* 1** (для упрощения записи индекс s будем опускать). Будем считать, что $y>\eta$ (при $y<\eta$ доказательство аналогично). В силу непрерывности $\varphi(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta(\varepsilon)$, что
$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon,$$

если только
$$|x-x_0|<\delta.$$

Разбив промежуток интегрирования на части, представим интеграл в виде трех слагаемых:

$$\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_a^{x_1}\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}f_s^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{x_1}^{x_2}\ldots d\xi+\int\limits_{x_2}^{b}\ldots d\xi\right)=\frac{1}{\pi}\left(I_1+I_2+I_3\right),$$

где

$$x_1=x_0-\delta,\qquad x_2=x_0+\delta.$$

Главное слагаемое этой суммы I_2 можно представить в виде

$$\varphi(x_0)\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}\right)\left[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)\right]d\xi=J_1+J_2.$$

Интеграл J_1 вычисляется непосредственно. Для этого выполним замену переменных

$$t=\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}},\qquad \xi=x-t\left(y-\eta\right)^{\frac{2m}{2n+1}},\qquad d\xi=-\left(y-\eta\right)^{\frac{2m}{2n+1}}dt,$$

тогда

$$J_1=\varphi(x_0)\int\limits_{\frac{x-x_2}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}}^{\frac{x-x_1}{(y-\eta)^{\frac{2m}{2n+1}}}}f^*(t)dt.$$

Как только $|x-x_0|<\delta$, верхний предел становится положительным, а нижний — отрицательным, причем при $\eta\to y-0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний — к $-\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\eta\to y-0,\,x\to x_0}J_1=\pi\varphi(x_0).$$

Нетрудно показать, что остальные интегралы (J_2,I_1,I_3) стремятся к 0.

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть $y>\eta$ (случай $y<\eta$ рассматривается аналогично). Тогда

$$D_y^{2m-1}\left(\left(y-\eta\right)^b f_s(t)\right)=$$

$$=\left(y-\eta\right)^{b-2m+1}\sum_{k=1}^{2m-1}\sum_{j=1}^{k}\left(C_{2m-1}^k(b)_{2m-k-1}A_{j-1}^k t^j f_s^{(j)}(t)\right)+$$

$$+\left(y-\eta\right)^{b-2m+1}(b)_{2m-1}f_s(t).$$

Если теперь $b = a + 2m - 1 = -2na - 1$, где $a = -\dfrac{2m}{2n+1}$, то для нахождения неизвестной функции $f_s(t)$ получим уравнение Эйлера

$$\sum_{j=1}^{2m-1} t^j f_s^{(j)}(t) \left(\sum_{k=j}^{2m-1} C_{2m-1}^k (b)_{2m-k-1} A_{j-1}^k \right) + (b)_{2m-1} f_s(t) = f_s^*(t). \tag{9}$$

Пусть $t > 0$, тогда решение однородного уравнения (9) будем искать в виде t^x:

$$\sum_{s=1}^{2m-1} \sum_{j=1}^{s} \left(C_{2m-1}^s (b)_{2m-1-s} A_{j-1}^s \, (x)_j \right) + (b)_{2m-1} = 0.$$

Используя свойство 3 коэффициентов A_i^j и считая, что$A_{-1}^{s-1} = 0$, имеем

$$\sum_{j=1}^{s} (x)_j \, A_{j-1}^s = \sum_{j=1}^{s} (x)_j \left(a \left(j A_{j-1}^{s-1} + A_{j-2}^{s-1} \right) - (s-1) \, A_{j-1}^{s-1} \right) =$$

$$= ax \sum_{j=1}^{s-1} (x)_j \, A_{j-1}^{s-1} - (s-1) \sum_{j=1}^{s-1} (x)_j \, A_{j-1}^{s-1} = (ax + 1 - s) \sum_{j=1}^{s-1} (x)_j A_{j-1}^{s-1}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\sum_{j=1}^{s} (x)_j \, A_{j-1}^s = (ax)_s \,,$$

откуда имеем уравнение

$$\sum_{s=0}^{2m-1} C_{2m-1}^s (b)_{2m-1-s} \, (ax)_s = 0. \tag{10}$$

Далее докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Справедлива формула*

$$\sum_{s=0}^{n} C_n^s (b)_{n-s} (y)_s = (y + b)_n.$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ имеем

$$C_1^0 (b)_1 (y)_0 + C_1^1 (b)_0 (y)_1 = b + y,$$

т. е. формула правильна. Предположим, что формула правильна при $n = k$:

$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s (b)_{k-s} (y)_s = (y + b)_k.$$

Докажем теперь ее для $n = k + 1$, т. е.

$$\sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^{s}(b)_{k+1-s}(y)_s = (y+b-k)\sum_{s=0}^{k} C_k^s(b)_{k-s}(y)_s.$$

Действительно,

$$(y+b-k)\sum_{s=0}^{k} C_k^s\,(b)_{k-s}\,(y)_s = ((y-s+1)+(b-k+s-1))\sum_{s=0}^{k} C_k^s(b)_{k-s}(y)_s =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} C_k^s(b)_{k-s+1}(y)_s + \sum_{s=0}^{k} C_k^s(b)_{k-s}(y)_{s+1} =$$

$$= (b)_{k+1} + \sum_{s=1}^{k} C_k^s(b)_{k-s+1}(y)_s + \sum_{s=0}^{k-1} C_k^s(b)_{k-s}(y)_{s+1} + (y)_{k+1} =$$

$$= (b)_{k+1} + \sum_{s=1}^{k}\left(C_k^s + C_k^{s-1}\right)(b)_{k-s+1}(y)_s + (y)_{k+1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k+1} C_{k+1}^{s}(b)_{k+1-s}(y)_s.$$

Лемма 3 доказана.

Отметим, что корни уравнения (10) имеют вид

$$x_j = \frac{-b+j}{a} = 2n + \frac{1+j}{a} = 2n - \frac{2n+1}{2m}\,(j+1)\,.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (9). Следуя методу, приведенному в [16], после замены переменной $t = e^{\tau}$ уравнение (9) можно преобразовать к виду

$$\sum_{j=1}^{2m-1}\left(\sum_{k=j}^{2m-1} C_{2m-1}^{k}(b)_{2m-k-1}A_{j-1}^{k}\right)(D)_j\, f_s\left(e^{\tau}\right) + (b)_{2m-1} f_s\left(e^{\tau}\right) = f_s^*\left(e^{\tau}\right),$$

или, как показано выше,

$$\left(aD+b\right)\left(aD+b-1\right)\ldots\left(aD+b-(2m-2)\right)f_s = f_s^*.$$

Тогда частное решение имеет вид

$$\overline{f_s} = \sum_{j=0}^{2m-2} B_j e^{x_j\tau}\int f_s\left(e^{\tau}\right)e^{-x_j\tau}d\tau,$$

где B_j получаются из разложения $\dfrac{1}{\left(aD+b\right)\left(aD+b-1\right)\ldots\left(aD+b-(2m-2)\right)}$ на элементарные дроби. Вернемся к старым переменным

$$t = e^{\tau}, \qquad d\tau = t^{-1}dt, \qquad \overline{f_s} = \sum_{j=0}^{2m-2} B_j t^{\frac{j-b}{a}} \int f_s(t) t^{-\frac{j-b}{a}-1} dt.$$

Вычислим теперь B_j:

$$\frac{1}{(aD+b)(aD+b-1)\ldots(aD+b-(2m-2))} =$$

$$= \frac{1}{a^{2m-1}\left(D+\dfrac{b}{a}\right)\ldots\left(D+\dfrac{b-2m+2}{a}\right)} =$$

$$= \frac{B_0}{D+\dfrac{b}{a}} + \frac{B_1}{D+\dfrac{b-1}{a}} + \ldots + \frac{B_{2m-2}}{D+\dfrac{b-2m+2}{a}},$$

откуда

$$B_j = \frac{1}{a^{2m-1}\prod_{i\neq j, i=0}^{2m-2}\left(\dfrac{b-i}{a}-\dfrac{b-j}{a}\right)} = \frac{1}{a\prod_{i\neq j, i=0}^{2m-2}(j-i)},$$

$$\prod_{i\neq j, i=0}^{2m-2}(j-i) = \prod_{i=0}^{j-1}(j-i)\prod_{i=j+1}^{2m-2}(j-i) = (-1)^j j!\,(2m-2-j)!.$$

Итак,

$$B_j = (-1)^j \frac{1}{aj!\,(2m-2-j)!} = (-1)^j \frac{C_{2m-2}^j}{a\,(2m-2)!}.$$

Значит, при $t>0$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$f_s(t) = \frac{1}{a\,(2m-2)!}\sum_{j=0}^{2m-2} t^{\frac{j-b}{a}}\left(c_{js}^{+} - (-1)^j C_{2m-2}^j \int\limits_t^{+\infty} \tau^{-\frac{j-b}{a}-1} f_s^{*}(\tau)\, d\tau\right).$$

Если $t<0$, то в (9) можно выполнить замену $t=-z$, $z>0$. Тогда после аналогичных преобразований получим формулу

$$f_s(t) = \frac{1}{a\,(2m-2)!}\sum_{j=0}^{2m-2} |t|^{\frac{j-b}{a}}\left(c_{js}^{-} - (-1)^j C_{2m-2}^j \int\limits_{-\infty}^{t} |\tau|^{-\frac{j-b}{a}-1} f_s^{*}(\tau)\, d\tau\right),$$

где c_{js}^{+}, c_{js}^{-} — произвольные постоянные.

Теперь подберем постоянные c_{js}^{+}, c_{js}^{-} так, чтобы функция $U_s(x,y,\xi,\eta) = |y-\eta|^b f_s(t)$ удовлетворяла уравнению (1). Для этого вычислим частные производные при $y>\eta$ (случай $y<\eta$ рассматривается аналогично):

$$D_x^{2n+1} U_s(x,y,\xi,\eta) = (y-\eta)^{b+(2n+1)a} f_s^{(2n+1)}(t) = (y-\eta)^{a-1} f_s^{(2n+1)}(t),$$

$$D_y^{2m} U_s = D_y^1 U_s^* = a\,(y-\eta)^{a-1}\, f_s^*(t) + (y-\eta)^a\, \frac{at}{(y-\eta)} \frac{d}{dt} f_s^* =$$

$$= a\,(y-\eta)^{a-1}\, \frac{d}{dt}\,(t f_s^*(t))\,.$$

Подставив их в уравнение (1), получим требуемое условие

$$f_s^{(2n)}(t) - (-1)^{n+m}\, at f_s^*(t) = \mathrm{const}\,.$$

Имеем

$$f_s(t) = \frac{1}{a\,(2m-2)!} \sum_{j=0}^{2m-2} f_{js}(t),$$

где

$$f_{js} = t^{\frac{j-b}{a}} \left(c_j^+ - (-1)^j\, C_{2m-2}^j \int\limits_t^{+\infty} \tau^{-\frac{j-b}{a}-1} f_s^*\,(\tau)\, d\tau \right).$$

Введем обозначение $s_j = \dfrac{j-b}{a}$, $B_j = (-1)^j\, C_{2m-2}^j$, тогда

$$\left(t f_{js}'\right)^{(k)} = s_j f_{js}^{(k)}(t) + B_j\, (f_s^*)^{(k)}\,.$$

По формуле Лейбница получим

$$\left(t f_{js}'\right)^{(k)} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m t^{(m)} \left(f_{js}'\right)^{(k-m)} = t f_{js}^{(k+1)} + k f_{js}^{(k)},$$

$$s_j f_{js}^{(k)}(t) + B_j\, (f_s^*)^{(k)} = t f_{js}^{(k+1)} + k f_{js}^{(k)},$$

откуда

$$t f_{js}^{(k+1)} = f_{js}^{(k)}\,(s_j - k) + B_j f_s^{*(k)},$$

и вообще

$$t^{k+1} f_{js}^{(k+1)} = (s_j)_{k+1}\, f_{js} + B_j \left(t^k f_s^{*(k)} + (s_j - k)\, t^{k-1} f_s^{*(k-1)} + \ldots + (s_j - 1)_k\, f_s^* \right).$$

В частности, при $k = 2n-1$

$$t^{2n} f_{js}^{(2n)} = (s_j)_{2n}\, f_{js} + B_j \left(t^{2n-1} f_s^{*(2n-1)} + \frac{(s_j)_{2n}}{(s_j)_{2n-1}} t^{2n-2} f_s^{*(2n-2)} + \ldots + \frac{(s_j)_{2n}}{(s_j)_1} f_s^* \right).$$

Итак,

$$f_{js}^{(2n)} = \frac{(s_j)_{2n}}{t^{2n}} \left(f_{js} + B_j \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{t^m f_s^{*(m)}(t)}{(s_j)_{m+1}} \right). \tag{11}$$

С другой стороны,

$$f_{js}=t^{s_j}\left(c_j^+-B_j\int\limits_t^{+\infty}\tau^{-s_j-1}f_s^*\left(\tau\right)d\tau\right)=$$

$$=t^{s_j}c_j^+ + B_j t^{s_j}\frac{1}{s_j}\int\limits_t^{+\infty}f_s^*\left(\tau\right)d\tau^{-s_j}=$$

$$=t^{s_j}c_j^+ +\frac{B_j t^{s_j}}{s_j}\left(f_s^*\left(\tau\right)\tau^{-s_j}\Big|_t^{+\infty}-\int\limits_t^{+\infty}\left(f_s^*\right)'\tau^{-s_j}d\tau\right)=$$

$$=c_j^+t^{s_j}-\frac{B_j f_s^*(t)}{\left(s_j\right)_1}-\frac{B_j t\frac{df_s^*(t)}{dt}}{\left(s_j\right)_2}-\frac{B_j t^{s_j}}{\left(s_j\right)_2}\int\limits_t^{+\infty}\frac{d^2 f_s^*}{d\tau^2}\tau^{-s_j+1}d\tau.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$f_{js}(t)=c_j^+t^{s_j}-B_j\left(\frac{f_s^*(t)}{\left(s_j\right)_1}+\frac{t\left(f_s^*(t)\right)'}{\left(s_j\right)_2}+\ldots+\frac{t^{2n-1}\left(f_s^*(t)\right)^{(2n-1)}}{\left(s_j\right)_{2n}}+\right.$$
$$\left.+\frac{t^{s_j}}{\left(s_j\right)_{2n}}\int\limits_t^{+\infty}\left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)}\tau^{-s_j+2n-1}d\tau\right). \qquad (12)$$

При $t<0$ формула (12) принимает вид

$$f_{js}(t)=c_j^-\left(-t\right)^{s_j}-B_j\left(\frac{f_s^*(t)}{\left(s_j\right)_1}+\frac{t\left(f_s^*(t)\right)'}{\left(s_j\right)_2}+\ldots+\frac{t^{2n-1}\left(f_s^*(t)\right)^{(2n-1)}}{\left(s_j\right)_{2n}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(-t\right)^{s_j}}{\left(s_j\right)_{2n}}\int\limits_t^{+\infty}\left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)}\left(-\tau\right)^{-s_j+2n-1}d\tau\right).$$

Подставляя (12) в (11), имеем

$$f_{js}^{(2n)}=\frac{\left(s_j\right)_{2n}}{t^{2n}}\left(c_j^+t^{s_j}-\frac{B_j t^{s_j}}{\left(s_j\right)_{2n}}\int\limits_t^{+\infty}\left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)}\tau^{-s_j+2n-1}d\tau\right),$$

откуда

$$f_s^{(2n)}(t)=\frac{1}{a\left(2m-2\right)!t^{2n}}\sum_{j=0}^{2m-2}\left(\left(s_j\right)_{2n}c_j^+t^{s_j}-B_j t^{s_j}\int\limits_t^{+\infty}\left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)}\tau^{-s_j+2n-1}d\tau\right)=$$
$$=\frac{1}{a\left(2m-2\right)!t^{2n}}\left(f_1(t)-f_2(t)\right),$$

где

$$f_1(t) = \sum_{j=0}^{2m-2} (s_j)_{2n} c_j^+ t^{s_j},$$

$$f_2(t) = \sum_{j=0}^{2m-2} \left(B_j t^{s_j} \int_t^{+\infty} \left(f_s^*(\tau)\right)^{(2n)} \tau^{-s_j+2n-1} d\tau \right).$$

Рассмотрим отдельно несобственный интеграл

$$I = \int_t^{+\infty} \left(f_s^*(\tau)\right)^{(2n)} \tau^{-s_j+2n-1} d\tau.$$

Этот интеграл вычисляется явно. Действительно, имеем

$$I = (-1)^{n+m} \int_t^{+\infty} \tau^{-s_j+2n-1} \left(\sum_{k=0}^{2m-1} A_k^{2m} \tau^{k+1} \left(f_s^*(\tau)\right)^{(k)} \right) d\tau =$$

$$= (-1)^{n+m} \int_t^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{2m-2} a_k^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+k+1} \left(f_s^*(\tau)\right)^{(k)} \right)' d\tau,$$

где неизвестные a_i^j определяются из системы

$$-\left(\frac{1+j}{a} - 1\right) a_0^j = A_0^{2m},$$

$$a_0^j - \left(\frac{1+j}{a} - 2\right) a_1^j = A_1^{2m},$$

. . . .

$$a_{2m-3}^j - \left(\frac{1+j}{a} - 2m + 1\right) a_{2m-2}^j = A_{2m-2}^{2m},$$

$$a_{2m-2}^j = A_{2m-1}^{2m}.$$

Эта система состоит из $2m$ уравнений с $2m-1$ неизвестными, т. е. уравнений больше, чем неизвестных. Но так как справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{2m} (x)_j A_{j-1}^{2m} = (ax)_{2m},$$

то система совместна и ее решение имеет вид

$$a_i^j = \frac{1}{\left(\frac{1+j}{a}\right)_{i+2}} \sum_{k=i+1}^{2m-1} \left(\frac{1+j}{a}\right)_{k+1} A_k^{2m}.$$

Итак,

$$f_2(t) = (-1)^{n+m} \sum_{j=0}^{2m-2} \left(B_j t^{s_j} \int\limits_t^{+\infty} \left(a_0^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+1} f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+2m-1} (f_s^*)^{(2m-2)} \right)' d\tau \right) =$$

$$= (-1)^{n+m} \sum_{j=0}^{2m-2} B_j t^{s_j} \left(\lim_{\tau\to+\infty} \left(a_0^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+1} f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+2m-1} \left(f_s^*\right)^{(2m-2)} \right) - \right.$$

$$\left. - t^{-\frac{1+j}{a}} \left(a_0^j t f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j t^{2m-1} \left(f_s^*\right)^{(2m-2)} \right) \right).$$

Введем обозначение

$$d_{js}^+ = (-1)^{n+m} \lim_{\tau\to+\infty} \left(a_0^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+1} f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j \tau^{-\frac{1+j}{a}+2m-1} \left(f_s^*\right)^{(2m-2)} \right),$$

тогда

$$\int\limits_t^{+\infty} \left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)} \tau^{-s_j+2n-1} d\tau =$$

$$= d_j^+ - (-1)^{n+m} t^{-\frac{1+j}{a}} \left(a_0^j t f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j t^{2m-1} \left(f_s^*\right)^{(2m-2)} \right).$$

Аналогично при $t < 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \left(f_s^*\left(\tau\right)\right)^{(2n)} \left(-\tau\right)^{-s_j+2n-1} d\tau =$$

$$= d_j^- - (-1)^{n+m} \left(-t\right)^{-\frac{1+j}{a}} \left(a_0^j t f_s^* + \ldots + a_{2m-2}^j t^{2m-1} \left(f_s^*\right)^{(2m-2)} \right),$$

откуда

$$d_{js}^+ = \int\limits_0^{+\infty} \left(f_s^*(t)\right)^{(2n)} t^{-\frac{1+j}{a}-1} dt.$$

Интегрируя последнее выражение по частям, находим

$$d_{js}^+ = (-1)^k \left(\left(1+j\right)c - 1\right)_k \int\limits_0^{+\infty} t^{(1+j)c-k-1} \left(f_s^*(t)\right)^{(2n-k)} dt,$$

где

$$k = \left[\left(1+j\right)c\right] = \left[\frac{2n+1}{2m}\left(1+j\right)\right].$$

Вычисляя, получаем

$$d_{js}^+ = (-1)^n \frac{2m}{2n+1} \left(2m-j-2\right)! \Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}\left(1+j\right)\right) \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\left(2n+1\right)\left(1+j\right) + \left(2m-j-1\right)\left(2m-4s-1\right)}{2m}\right)\right).$$

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j^k C_{2n}^j = \begin{cases} 0, & 1 \le k < 2n, \\ (2n)!, & k = 2n. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем

$$C_{2n-1}^{j-1} = \frac{(2n-1)!}{(j-1)!\,(2n-j)!} = \frac{j}{2n} C_{2n}^j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j^k C_{2n}^j = 2n \sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j^{k-1} C_{2n-1}^{j-1} =$$

$$= 2n\,(2n-1)\sum_{j=2}^{2n}(-1)^j j^{k-2} C_{2n-2}^{j-2} =$$

$$= (2n)_k \sum_{j=k}^{2n}(-1)^j C_{2n-k}^{j-k}. \tag{13}$$

Если $k = 2n$, то из формулы (13) получим

$$(2n)_{2n}\sum_{j=2n}^{2n}(-1)^j\, C_0^{j-2n} = (2n)!.$$

Пусть теперь $1 \le k < 2n$. Тогда обозначим $j - k = i$, и формула (13) примет вид

$$(2n)_k\,(-1)^k \sum_{i=0}^{2n-k}(-1)^i C_{2n-k}^i = 0.$$

Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 непосредственно следует, что при $i > 0$

$$\sum_{j=0}^{2m-2} a_i^j B_j = \sum_{j=0}^{2m-2}(-1)^j a_i^j C_{2m-2}^j = 0.$$

Осталось вычислить

$$\sum_{j=0}^{2m-2} a_0^j B_j = \sum_{j=0}^{2m-2} B_j \frac{1}{\left(\dfrac{1+j}{a}\right)_2}\sum_{k=1}^{2m-1}\left(\frac{1+j}{a}\right)_{k+1} A_k^{2m} = \sum_{j=0}^{2m-2} B_j \frac{\left(\dfrac{1+j}{a}\right)_{2m}}{\left(\dfrac{1+j}{a}\right)_2} A_{2m-1}^{2m} =$$

$$= \frac{A_{2m-1}^{2m}}{a^{2m-2}}\sum_{j=0}^{2m-2} j^{2m-2} B_j = \frac{a^{2m}}{a^{2m-2}}\,(2m-2)! = a^2\,(2m-2)!.$$

Итак,

$$f_2(t) = \sum_{j=0}^{2m-2} B_j d_j^+ t^{s_j} - (-1)^{n+m} a^2 \, (2m-2)! \cdot t^{2n+1} f_s^*(t),$$

откуда

$$f_s^{(2n)}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{2m-2} \left((s_j)_{2n} \, c_j^+ - B_j d_j^+ \right) t^{s_j} + (-1)^{n+m} \, a^2 \, (2m-2)! t^{2n+1} f_s^*(t)}{a \, (2m-2)! t^{2n}}.$$

Если

$$c_{js}^+ = (-1)^j \frac{C_{2m-2}^j}{(s_j)_{2n}} d_{js}^+,$$

то при $t > 0$ имеем

$$f_s^{(2n)}(t) = (-1)^{n+m} \, at f_s^*(t) = (-1)^{n+m+1} \, \frac{2m}{2n+1} t f_s^*(t). \tag{14}$$

Пусть теперь $t < 0$. В результате аналогичных преобразований получим формулу

$$f_s^{(2n)}(t) = \frac{1}{a \, (2m-2)! t^{2n}} \sum_{j=0}^{2m-2} (-t)^{s_j} \left((s_j)_{2n} \, c_j^- - B_j \int\limits_{-\infty}^{t} \left(f_s^* \left(\tau \right) \right)^{(2n)} (-\tau)^{-s_j+2n-1} \, d\tau \right),$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \left(f_s^* \left(\tau \right) \right)^{(2n)} (-\tau)^{-s_j+2n-1} \, d\tau =$$

$$= (-1)^{n+m} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\sum_{k=0}^{2m-2} b_k^j \, (-\tau)^{-\frac{1+j}{a}+k+1} \left(f_s^* \left(\tau \right) \right)^{(k)} \right)' d\tau,$$

где

$$b_i^j = \frac{(-1)^i}{\left(\dfrac{1+j}{a} \right)_{i+2}} \sum_{k=i+1}^{2m-1} \left(\frac{1+j}{a} \right)_{k+1} A_k^{2m}.$$

Если теперь

$$c_{js}^- = (-1)^j \frac{C_{2m-2}^j}{(s_j)_{2n}} d_{js}^-,$$

где

$$d_{js}^- = \int\limits_{-\infty}^{0} (-t)^{-\frac{1+j}{a}-1} \left(f_s^*(t) \right)^{(2n)} dt,$$

то при $t < 0$ опять получим формулу (14):

$$f_s^{(2n)}(t) = (-1)^{n+m+1}\,\frac{2m}{2n+1} t f_s^*(t).$$

Вычисления показывают, что

$$d_{js}^- = (-1)^n \frac{2m}{2n+1}\,(2m-j-2)!\Gamma\left(\frac{2n+1}{2m}\,(1+j)\right)\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n+1)\,(1+j)-(2m-j-1)\,(2m-4s-1)}{2m}\right)\right).$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы **3.** Первое и второе свойства следуют из теоремы 1. Покажем справедливость третьего равенства (четвертое доказывается аналогично третьему). Итак,

$$\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^d D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi\,(\eta)\,d\eta =$$

$$=\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^y D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi\,(\eta)\,d\eta + \lim_{x\to\xi+0}\int\limits_y^d D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi\,(\eta)\,d\eta =$$

$$= I_1 + I_2.$$

Поскольку функция $\varphi(\eta)$ непрерывна, то

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta\,(\varepsilon)>0\colon\ |\eta-y|<\delta\Rightarrow|\varphi\,(\eta)-\varphi(y)|<\varepsilon,$$

откуда

$$I_1 = \lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^{y-\delta} D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi\,(\eta)\,d\eta + \lim_{x\to\xi+0}\int\limits_{y-\delta}^{y} D_\xi^{2n}U_s\,(x,y,\xi,\eta)\,\varphi\,(\eta)\,d\eta = J_1+J_2,$$

$$J_1 = \lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^{y-\delta} D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)\varphi\,(\eta)\,d\eta =$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^{y-\delta}(y-\eta)^{-1}\,f_s^{(2n)}\left((x-\xi)\,(y-\eta)^a\right)\varphi\,(\eta)\,d\eta.$$

Выполняя замену переменных $t=(x-\xi)\,(y-\eta)^a$, имеем

$$J_1 = -\frac{1}{\pi a}\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_{(x-\xi)(y-c)^a}^{(x-\xi)\delta^a}\frac{1}{t}f_s^{(2n)}(t)\varphi\left(y-t^{1/a}\,(x-\xi)^{-1/a}\right)dt =$$

$$= (-1)^{n+m+1}\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_{(x-\xi)(y-c)^a}^{(x-\xi)\delta^a} f_s^*(t)\varphi\left(y - t^{1/a}\left(x-\xi\right)^{-1/a}\right)dt.$$

При $x \to \xi + 0$ верхний и нижний пределы интегрирования стремятся к нулю, функция φ ограничена в силу непрерывности, $f^*(t)$ в окрестности нуля не имеет особенностей, поэтому J_1 стремится к нулю. Расмотрим J_2:

$$J_2 = (-1)^{n+m+1}\frac{1}{\pi}\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_{(x-\xi)\delta^a}^{+\infty} f_s^*(t)\varphi\left(y - t^{1/a}\left(x-\xi\right)^{-1/a}\right)dt =$$

$$= (-1)^{n+m+1}\frac{1}{\pi}\varphi(y)\int\limits_0^{+\infty} f_s^*(t)dt = (-1)^{n+m+1}\frac{(n-m+2s+1)}{2n+1}\varphi(y).$$

Аналогично показывается, что

$$I_2 = (-1)^{n+m+1}\frac{(n-m+2s+1)}{2n+1}\varphi(y).$$

Значит,

$$\lim_{x\to\xi+0}\int\limits_c^d \varphi\left(\eta\right)D_\xi^{2n}U_s(x,y,\xi,\eta)d\eta = (-1)^{n+m+1}\frac{2\left(n-m+2s+1\right)}{2n+1}\varphi(y).$$

Теорема 3 доказана.

Заключение. Отметим, что в работе [4] для уравнения

$$\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}} + (-1)^n\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

получено фундаментальное решение

$$U(x,y,\xi,\eta) = |y-\eta|^{\frac{2n-1}{2n+1}}\,f\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2}{2n+1}}}\right),$$

где

$$f(t) = -\frac{2n+1}{2}t^{\frac{2n-1}{2}}\left(c^+ - \int\limits_t^{+\infty}\tau^{-\frac{2n+1}{2}}f^*\left(\tau\right)d\tau\right),\quad t>0,$$

$$f(t) = -\frac{2n+1}{2}\left(-t\right)^{\frac{2n-1}{2}}\left(c^- - \int\limits_{-\infty}^{t}\left(-\tau\right)^{-\frac{2n+1}{2}}f^*\left(\tau\right)d\tau\right),\quad t<0.$$

Построенное в настоящей статье частное решение (при $m = 0$) не только совпадает с этим фундаментальным решением, но также определяет неизвестные постоянные c^+, c^-:

$$c^{+}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{2}{2n+1}\dfrac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)}, & n=2k+1,\end{cases}$$

$$c^{-}=\begin{cases}(-1)^{n/2}\dfrac{2}{2n+1}\dfrac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)}, & n=2k,\\ 0, & n=2k+1.\end{cases}$$

Литература

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1958. – 439 с.
2. *Block H.* Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. Note 1. – 1912. – **7(13)**. – P. 1 – 34; note 2. – 1912. – **7(21)**. – P. 1 – 30; note 3. – 1912-1913. – **8(23)**. – P. 1 – 51.
3. *Cattabriga L.* Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine $2n$ //Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1958. – **28**. – P. 376 – 401.
4. *Cattabriga L.* Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1961. – **31**. – P. 1 – 45.
5. *Абдиназаров С.* Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Ташкент, 1992. – 239 с.
6. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 18 – 26.
7. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 40 – 51.
8. *Диесперов В. Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1972. – **12**, № 5. – С. 1265 – 1269.
9. *Диесперов В. Н., Ломакин Л. А.* Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 5. – С. 1244 – 1260.
10. *Засорин Ю. В.* Точные решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Докл. АН СССР. – 1984. – **287**, № 6. – С. 1347 – 1351.
11. *Дезин А. А.* Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, вып. 3(87). – С. 21 – 73.
12. *Егоров И. Е.* О первой краевой задаче для одного неклассического уравнения // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 3. – С. 394 – 402.
13. *Апаков Ю. П., Иргашев Б. Ю.* Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 10. – С. 1318 – 1331.
14. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
15. *Градштейн Н. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
16. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.

Получено 11.09.15,
после доработки — 04.12.15