УДК 517.929

Р. Рабах (Ин-т кибернетики и связи Нанта, Франция),
Г. М. Скляр (Ин-т математики Ун-та Щецина, Польша; Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина),
П. Ю. Бархаев (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков;
Харьков. нац. ун-т им. В. Н. Каразина)

К ВОПРОСУ ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА *

We study the problem of exact controllability for a broad class of neutral and mixed systems with time delay. We consider an equivalent operator model in a Hilbert space and formulate steering conditions for controllable states in the form of a vector moment problem. The existence of a basis of eigenvectors of the operator of system with delay significantly simplifies the form of the moment problem. A change of function in the control by a feedback law modi es the system structure in order to guarantee the existence of a basis of eigenvectors of the corresponding operator. We prove a criterion for the exact controllability and determine the exact critical time of control.

Роботу присвячено розв'язанню задачі точної керованості для досить широкого класу систем із запізненням нейтрального та мішаного типів. Розглядаючи еквівалентну операторну модель у гільбертовому просторі, ми формулюємо умови керованості у вигляді деякої векторної проблеми моментів. Вид даної проблеми моментів істотно спрощується при наявності базису простору з власних векторів оператора системи з запізненням. Заміна керування дозволяє перетворити структуру системи і гарантувати існування базису з власних векторів відповідного оператора. Доведено критерій точної керованості і встановлено точний час керування.

1. Введение. Задача управляемости для линейных систем с запаздывающим аргументом имеет достаточно длительную историю (см., например, [2, 4, 6, 9, 11, 12] и приведенную там библиографию). В данной работе мы рассматриваем задачу точной управляемости для достаточно широкого класса систем нейтрального типа, заданных уравнением

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $A_{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — постоянные матрицы, $z_t\colon [-1,0] \to \mathbb{C}^n$ определяется как $z_t(s) = z(t+s)$, оператор запаздывания L задан соотношением

$$Lf = \int\limits_{-1}^{0} A_2(\theta)\frac{d}{d\theta}f(\theta)\,d\theta + \int\limits_{-1}^{0} A_3(\theta)f(\theta)\,d\theta$$

и A_2, A_3 являются $(n\times n)$-матрицами с элементами из $L_2([-1,0],\mathbb{C})$; управление u также принадлежит классу $L_2(0,T;\mathbb{C}^r)$.

Переход от систем с запаздывающим аргументом к эквивалентным моделям в некотором функциональном пространстве является одним из наиболее продуктивных подходов. А именно, системе с запаздыванием сопоставляется бесконечномерная система вида

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}u, \quad x \in H, \tag{1.2}$$

где линейный оператор $\mathcal{A}$ является генератором C_0-полугруппы.

Для линейных систем вида (1.2) с конечномерным фазовым пространством хорошо известна концепция управляемости Калмана: множество достижимости из нуля за время T совпадает

* Выполнена при частичной поддержке PROMEP (Mexico) via "Poyecto de Redes".

со всем пространством ($\mathcal{R}_T = H$), при этом если управление не ограничено, то время T произвольно. Если же фазовое пространство H бесконечномерно, то данное свойство, вообще говоря, не имеет места. Для линейных систем с запаздыванием множество достижимости является подмножеством $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ области определения оператора $\mathcal{A}$, поэтому естественным является вопрос попадания на все множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Кроме того, время перехода для систем с запаздыванием не может быть произвольно малым, поэтому мы также ставим задачу нахождения минимального времени перехода из точки 0 в произвольное состояние. Следующий критерий управляемости для класса линейных систем нейтрального типа (1.1) был получен нами в статье [14].

Теорема 1.1. *Система нейтрального типа* (1.1) *является точно управляемой тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

(i) *не существует таких* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $y \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, *что* $(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda))^* \, y = 0$ *и* $B^* y = 0$, *где*

$$\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda I - \lambda e^{-\lambda} A_{-1} - \lambda \int\limits_{-1}^{0} e^{\lambda s} A_2(s) ds - \int\limits_{-1}^{0} e^{\lambda s} A_3(s) ds,$$

или, что то же самое, $\operatorname{rank}(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) \ B) = n$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) *не существует таких* $\mu \in \sigma(A_{-1})$ *и* $y \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, *что* $A_{-1}^* y = \bar{\mu} y$ *и* $B^* y = 0$, *или, что то же самое,* $\operatorname{rank}(B \quad A_{-1}B \ldots A_{-1}^{n-1}B) = n$.

Более того, если выполнены условия (i) *и* (ii), *то система точно управляема за любое время* $T > n_1$ *и неуправляема за любое время* $T \leq n_1$, *где* n_1 *— первый индекс управляемости пары* (A_{-1}, B).

Если максимальная величина запаздывания равна h, *а не* 1, *то критическое время управляемости* $T = n_1 h$.

Отметим, что система (1.1) является системой с распределенным запаздыванием, для которой, в отличие от случая нескольких дискретных запаздываний (см. [2, 3, 9, 10, 13, 20] и приведенную в них библиографию), явный вид полугруппы, вообще говоря, нельзя найти, что существенно усложняет дальнейший анализ. Кроме того, важным достоинством теоремы является определение точного времени управляемости.

Также отметим, что для линейных систем с запаздыванием без нейтрального слагаемого ($A_{-1} = 0$) для точной управляемости необходимо выполнение условия $\operatorname{rank} B = n$, которое является очень жестким. Это означает, что понятие точной управляемости является более естественным для систем нейтрального типа.

Для изучения точной управляемости мы используем подход, связанный с переходом к проблеме моментов и ее последующим анализом. А именно, условия попадания из нуля в некоторое состояние фазового пространства интерпретируются как векторная тригонометрическая проблема моментов, которая строится по некоторому специальному базису Рисса фазового пространства. Исследуется разрешимость полученной проблемы моментов с использованием методов [1] (см. также [24]).

В случае, когда существует базис Рисса фазового пространства, состоящий из собственных векторов оператора системы, представление проблемы моментов существенно упрощается (см. [18, 22]). Существование базиса определяется видом матрицы A_{-1} нейтрального слагаемого системы (1.1), в общем случае такой базис не существует (см. [15, 16, 19]). Поэтому для произвольной линейной системы с запаздыванием процедура выбора подходящего базиса Рисса довольно сложная. Кроме того, громоздкая форма получаемого базиса делает технически сложными дальнейшие манипуляции с ним [14].

Было замечено, что замена управления в исходной системе позволяет перейти к эквивалентной задаче управляемости для системы, у которой структура матрица A_{-1} гарантирует существование базиса Рисса фазового пространства из собственных векторов. При этом вид соответствующей проблемы моментов становится существенно проще, что позволяет провести более наглядные построения и доказательства.

В данной работе мы доказываем теорему 1.1 для систем (1.1) с матрицей A_{-1} специального вида и показываем, что данный факт влечет за собой справедливость теоремы для систем с произвольной матрицей A_{-1}. Кроме того, мы рассматриваем задачу управляемости для систем так называемого смешанного типа (см. также [19]), которые не были рассмотрены в работе [14], и показываем, что если нейтральное слагаемое вырождено ($\det A_{-1} = 0$) и пара (A_{-1}, B) неуправляема, то система (1.1) также является неуправляемой.

Статья имеет следующую структуру. Во втором пункте рассматривается абстрактное уравнение и обсуждается эквивалентный переход к системе специального вида, порождающей базис Рисса из собственных векторов. В третьем пункте с использованием свойства базисности Рисса собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ дается представление условия управляемости в виде проблемы моментов. Четвертый пункт посвящен доказательству необходимости условий управляемости, в пятом и шестом пунктах доказывается достаточность для случаев одно- и многомерного управлений. Наконец, в седьмом пункте приведен пример, иллюстрирующий полученный результат.

2. Эквивалентные задачи управляемости. Мы рассматриваем операторную модель систем нейтрального типа, введенную в [5] (см. также [8]). Фазовым пространством является $M_2(-1, 0; \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n \times L_2(-1, 0; \mathbb{C}^n)$ (сокращенно M_2), и уравнение (1.1) может быть записано следующим образом:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t), \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & \dfrac{d}{d\theta} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где оператор $\mathcal{A}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{(y, z(\cdot)) \in M_2 \colon z \in H^1(-1, 0; \mathbb{C}^n),\ y = z(0) - A_{-1}z(-1)\Big\}$$

и под H^1 мы подразумеваем соболевское пространство функций, которые вместе со своей первой производной лежат в L_2.

Множество достижимости из начального состояния 0 за время T имеет вид

$$\mathcal{R}_T = \left\{ x \colon x = \int\limits_0^T e^{\mathcal{A}t}\mathcal{B}u(t)dt,\ u(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r) \right\}.$$

В дальнейшем мы покажем, что $\mathcal{R}_T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для всех $T > 0$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что система* (2.1) *точно управляема из нуля управлениями класса* L_2, *если существует такое время* T_0 (*критическое время*), *что для всех* $T > T_0$ *выполнено*

$$\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Данное определение означает, что для некоторого $T > 0$ множество решений $\{z(t) : t \in \in [T-1,T]\}$ системы (1.1), полученное при применении всевозможных управлений, совпадает с пространством $H^1(T-1,T;\mathbb{C}^n)$.

Лемма 2.1. *Если система* (1.1) *является точно управляемой за время* T, *то для произвольной матрицы* $P \in \mathbb{C}^{n\times r}$ *возмущенная система*

$$\dot{z}(t) = (A_{-1} + BP)\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu \tag{2.2}$$

является точно управляемой за то же самое время T.

Доказательство. Предположим, что система (1.1) управляема за время T. Это означает, что для любой функции $f(t) \in H^1(T-1,T;\mathbb{C}^n)$ существует такое управление $u(t) \in L_2(0,T;\mathbb{C}^r)$, что решение уравнения

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bu(t) \tag{2.3}$$

с начальным условием $z(t) = 0$, $t \in [-1,0]$, удовлетворяет соотношению $z(t) = f(t)$, $t \in \in [T-1,T]$. Запишем (2.3) в виде

$$\dot{z}(t) = (A_{-1} + BP)\dot{z}(t-1) + Lz_t + Bv(t),$$

где $v(t) = u(t) - P\dot{z}(t-1)$, $t \in [0,T]$. Поскольку $z(t-1) \in H^1(0,T;\mathbb{C}^n)$, то $v(t) \in L_2(0,T;\mathbb{C}^r)$. Следовательно, управление $v(t)$ переводит состояние $z(t) = 0$, $t \in [-1,0]$, в состояние $z(t) = = f(t)$, $t \in [T-1,T]$, в силу системы (2.2). Это означает, что система (2.2) также точно управляема за время T.

Лемма 2.1 доказана.

Имеет место следующая эквивалентность выполнения условий теоремы 1.1 для исходной и возмущенной систем.

Лемма 2.2. *Если система вида* (1.1) *такова, что выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 1.1, *то для произвольной матрицы* P *и соответствующей возмущенной системы* (2.2) *также выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 1.1. *Обратное также справедливо.*

Доказательство данного утверждения следует из соотношения $\Delta^*_{\widehat{\mathcal{A}}}(\lambda)y = [\Delta^*_{\mathcal{A}}(\lambda) - -\lambda e^{-\lambda}P^*B^*]y = 0$, где $\widehat{\mathcal{A}}$ — оператор, соответствующий системе (2.2), а также инвариантности свойства управляемости пары матриц относительно замены управления обратной связью (см., например, [23]).

***Следствие* 2.1.** *Из доказательства теоремы* 1.1 *для системы* (1.1) *с некоторой парой матриц* (A_{-1}, B) *следует, что теорема имеет место также для возмущенных систем* (2.2) *с произвольной матрицей* P.

Если пара матриц (A, B) является управляемой, то известно (см., например, [23]), что для произвольного наперед заданного множества $S = \{\mu_1,\ldots,\mu_n\} \subset \mathbb{C}$ существует матрица $P \in \mathbb{C}^{r\times n}$ такая, что множество S будет спектром возмущенной матрицы: $\sigma(A + BP) = S$. Тогда, если зафиксируем n различных действительных чисел

$$\{\mu_1,\ldots,\mu_n\} \subset \mathbb{R}, \qquad \mu_i \neq \mu_j, i \neq j, \quad \mu_i \notin \{0,1\},$$

найдутся замены управления $u(t) = P\dot{z}(t-1) + v(t)$, $P \in \mathbb{C}^{r\times n}$, и фазовых переменных $z = Cw$, которые приводят систему к виду

$$\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1) + \int\limits_{-1}^{0} \widehat{A}_2(\theta)\dot{w}(t+\theta)d\theta + \int\limits_{-1}^{0} \widehat{A}_3(\theta)w(t+\theta)d\theta + \widehat{B}v, \tag{2.4}$$

где $\widehat{A}_{-1} = C^{-1}(A_{-1} + BP)C$, $\widehat{A}_i(\theta) = C^{-1}A_i(\theta)C$, $\widehat{B} = C^{-1}B$, и удовлетворяют следующим условиям:

(а) спектр матрицы $\widehat{A}_{-1}$ равен $\sigma(\widehat{A}_{-1}) = \{\mu_m\}_{m=1}^n$;

(б) пара $(\widehat{A}_{-1}, \widehat{B})$ приведена к форме Фробениуса (см. [23]), т. е.

$$\widehat{A}_{-1} = \mathrm{diag}\{F_1, \ldots, F_r\}, \qquad F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \ldots & a_{s_i}^i \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

и $\widehat{B} = \mathrm{diag}\{g_1, \ldots, g_r\}$, где $g_i = (0,\, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, размерности $s_i \times 1$.

Из приведенных рассуждений и леммы 2.2 получаем следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Из доказательства достаточности теоремы* 1.1 *для семейства систем вида* (2.4), *удовлетворяющих условиям* (а), (б), *следует достаточность условий данной теоремы для произвольных систем вида* (1.1).

***Замечание* 2.1.** При доказательстве теоремы 1.1 в случае одномерного управления $(r = 1)$ достаточно предполагать, что система имеет простой спектр (выполнено только условие (а)), тогда как для доказательства общего случая необходимо выполнение условий (а), (б).

В работе [14] необходимость условия (ii) доказана в предположении, что матрица A_{-1} нейтрального слагаемого является невырожденной. В данной статье мы дополним доказательство, показав, что если пара (A_{-1}, B) является неуправляемой и $\det A_{-1} = 0$, то система (1.1) также не является точно управляемой (теорема 4.2).

Далее, не нарушая общности, будем предполагать, что для пары (A_{-1}, B) выполнены свойства (а) и (б). По построению $\det A_{-1} \neq 0$, и будем обозначать через $\{c_m\}_{m=1}^n$ базис из нормированных собственных векторов A_{-1}.

3. Базисы Рисса в фазовом пространстве и проблема моментов. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$ оператор $\mathcal{A}$ в случае $A_2(\theta) = A_3(\theta) \equiv 0$. Собственные значения $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеют вид (см. [16])

$$\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) = \big\{\widetilde{\lambda}_m^k = \ln|\mu_m| + 2k\pi \mathrm{i},\ m = 1, \ldots, n, k \in \mathbb{Z}\big\} \cup \{0\},$$

где $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \sigma(A_{-1})$. В силу того, что спектр матрицы A_{-1} простой, каждому собственному значению $\widetilde{\lambda}_m^k$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ соответствует только один собственный вектор $\widetilde{\varphi}_{m,k} = \left(0, e^{\widetilde{\lambda}_m^k t}c_m\right)^T$ и нет корневых векторов. Более того, выполнены оценки

$$0 < \inf_{k\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{\varphi}_{m,k}\| \le \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{\varphi}_{m,k}\| < +\infty.$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет вид (см. [16])

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\ln|\mu_m| + 2k\pi\mathrm{i} + \bar{\mathrm{o}}(1/k),\ m = 1, \ldots, n,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для всех $m = 1, \ldots, n$ и всех $k\colon |k| > N$ в каждом круге $L_m^k(r^{(k)})$ содержится ровно одно собственное значение оператора $\mathcal{A}$, где $L_m^k(r^{(k)}) = L_m^k$ — круги с радиусами $r^{(k)}$ и центрами в $\widetilde{\lambda}_m^k$, причем выполнено соотношение $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(r^{(k)})^2 < \infty$ ([17], теорема 4). Обозначим данные собственные значения $\mathcal{A}$ через λ_m^k, а соответствующие собственные векторы через $\varphi_{m,k},\ m = 1, \ldots, n,\ |k| > N$.

Нормируем векторы $\varphi_{m,k}$ так, чтобы $P_m^{(k)}\widetilde{\varphi}_{m,k} = \varphi_{m,k}$, где $P_m^{(k)} = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{L_m^{(k)}} R(\lambda, \mathcal{A})d\lambda$ являются проекторами на соответствующие собственные подпространства и $R(\lambda, \mathcal{A})$ — резольвента оператора $\mathcal{A}$. Семейства $\{\varphi_{m,k}\}$ и $\{\widetilde{\varphi}_{m,k}\}$ квадратично близки: $\sum_{|k|>N}\sum_{m=1}^{n}\|\varphi_{m,k} - \widetilde{\varphi}_{m,k}\|^2 < \infty$, откуда, в частности, следует, что

$$0 < \inf_{|k|>N}\|\varphi_{m,k}\| \leq \sup_{|k|>N}\|\varphi_{m,k}\| < +\infty.$$

Можно указать явный вид собственных векторов: $\varphi_{m,k} = \left((I - e^{\lambda_m^k}A_{-1})x_{m,k},\ e^{\lambda_m^k\theta}x_{m,k}\right)^T$, где $x_{m,k} \in \mathrm{Ker}\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda_m^k)$.

Вне кругов $L_m^k,\ |k| > N,\ m = 1, \ldots, n$, лежит только конечное число собственных чисел оператора $\mathcal{A}$, которые обозначим через $\widehat{\lambda}_s,\ s = 1, \ldots, \ell_N$, с учетом кратностей. Соответствующие обобщенные собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ обозначим через $\widehat{\varphi}_s$. Семейство

$$\{\varphi\} = \{\varphi_{m,k}\} \cup \{\widehat{\varphi}_s\} \tag{3.1}$$

образует базис Рисса пространства M_2 [16].

Обозначим через

$$\{\psi\} = \{\psi_{m,k}\} \cup \{\widehat{\psi}_s\} \tag{3.2}$$

семейство собственных векторов сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, которое биортогонально семейству $\{\varphi\}$. Здесь $\mathcal{A}^*\psi_{m,k} = \overline{\lambda_m^k}\psi_{m,k},\ m = 1, \ldots, n,\ |k| > N$. Также можно указать явный вид собственных векторов сопряженного оператора

$$\psi_{m,k} = \left(y_{m,k},\ \left[\overline{\lambda_m^k}e^{-\overline{\lambda_m^k}\theta}I - A_2^*(\theta) + \int\limits_0^\theta e^{\overline{\lambda_m^k}(s-\theta)}\left(A_3^*(s) + \overline{\lambda_m^k}A_2^*(s)\right)ds\right]y_{m,k}\right)^T, \tag{3.3}$$

где $y_{m,k} \in \mathrm{Ker}\Delta_{\mathcal{A}}^*(\overline{\lambda_m^k})$.

Семейство (3.2) образует базис M_2. Полные доказательства фактов, на которые мы опираемся в данном пункте, могут быть найдены в работах [15 – 17].

Перейдем к постановке задачи управляемости в виде проблемы моментов. Для этого разложим условие управляемости $x_T = \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot)\end{pmatrix} = \displaystyle\int_0^T e^{\mathcal{A}t}\mathcal{B}u(t)dt$ через биортогональные базисы (3.1) и (3.2). Состояние $x_T \in M_2$ достижимо за время T тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\varphi\in\{\varphi\}}\langle x_T, \psi\rangle\,\varphi = \sum_{\varphi\in\{\varphi\}}\int\limits_0^T\left\langle e^{\mathcal{A}t}\mathcal{B}u(t), \psi\right\rangle dt\cdot\varphi.$$

Здесь и далее под $\langle\cdot,\cdot\rangle$ мы подразумеваем скалярное произведение в пространстве M_2: $\langle\cdot,\cdot\rangle_{M_2}$.

Пусть $\{b_1,\ldots,b_r\}$ — произвольный базис образа матрицы B и $\mathbf{b}_d=(b_d,0)^T\in M_2$, $d=1,\ldots,r$. Тогда условие управляемости эквивалентно системе равенств

$$\langle x_T,\psi\rangle=\int\limits_0^T\left\langle e^{\mathcal{A}t}\mathcal{B}u(t),\psi\right\rangle dt=\sum_{d=1}^r\int\limits_0^T\left\langle e^{\mathcal{A}t}\mathbf{b}_d,\psi\right\rangle u_d(t)\,dt, \tag{3.4}$$

где $\psi\in\{\psi\}$, $u(\cdot)\in L_2(0,T;\mathbb{C}^r)$. Используя представление (3.3) для элементов базиса $\psi=\psi_{m,k}$, $m=1,\ldots,n$, $|k|>N$, получаем тождество

$$\left\langle e^{\mathcal{A}t}\mathbf{b}_d,\ \psi_{m,k}\right\rangle_{M_2}=e^{\lambda_m^k t}\left\langle\mathbf{b}_d,\psi_{m,k}\right\rangle_{M_2}=e^{\lambda_m^k t}\left\langle b_d,y_{m,k}\right\rangle_{\mathbb{C}^n}, \tag{3.5}$$

где $y_{m,k}\in\mathrm{Ker}\Delta^*_{\mathcal{A}}(\overline{\lambda_m^k})$.

Обозначим

$$q^d_{m,k}=k\left\langle\mathbf{b}_d,\psi_{m,k}\right\rangle_{M_2}.$$

В силу (3.5) равенства (3.4) для $\psi\in\{\psi_{m,k},\ |k|>N,\ m=1,\ldots,n\}$ имеют вид

$$k\left\langle x_T,\psi_{m,k}\right\rangle=\sum_{d=1}^r\int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t}q^d_{m,k}u_d(t)dt. \tag{3.6}$$

Далее, для элементов базиса $\psi=\widehat{\psi}_s$, $s=1,\ldots,\ell_N$, справедливы тождества

$$\left\langle e^{\mathcal{A}t}\mathbf{b}_d,\psi\right\rangle=\left\langle\mathbf{b}_d,e^{\mathcal{A}^*t}\psi\right\rangle=\widehat{q}^d_s(t)e^{\widehat{\lambda}_s t},$$

где $\widehat{q}^d_s(t)$ — полиномы подходящих степеней. Следовательно, равенства (3.4) для $\psi\in\{\widehat{\psi}_s\}$ принимают вид

$$\left\langle x_T,\widehat{\psi}_s\right\rangle=\sum_{d=1}^r\int\limits_0^T e^{\widehat{\lambda}_s t}\widehat{q}^d_s(t)u_d(t)dt. \tag{3.7}$$

Таким образом, состояние $x_T\in M_2$ достижимо из точки 0 за время $T>0$ тогда и только тогда, когда для некоторых управлений $u_d(\cdot)\in L_2(0,T)$, $d=1,\ldots,r$, выполнены равенства (3.6) и (3.7).

Полученная проблема моментов (3.6), (3.7) является основным объектом последующего анализа. В конце пункта приведены две оценки, играющие важную роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма 3.1. *Существует константа $\delta_1>0$ такая, что*

$$|q^d_{m,k}|\le\delta_1,\qquad m=1,\ldots,n,\quad |k|>N,\quad d=1,\ldots,r.$$

Лемма 3.2. *Существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$, $\sum_{|k|>N}\alpha_k^2<+\infty$, что для всех $m=1,\ldots,n$, $|k|>N$, $d=1,\ldots,r$ и $t\in[0,T]$ имеет место оценка*

$$\left|e^{\lambda_m^k t}\left\langle\mathbf{b}_d,\psi_{m,k}\right\rangle_{M_2}-e^{\widetilde{\lambda}_m^k t}\left\langle\mathbf{b}_d,\widetilde{\psi}_{m,k}\right\rangle_{M_2}\right|\le\frac{\alpha_k}{|k|}.$$

Доказательство данных утверждений см. в работе [14].

4. Необходимость условий управляемости. Изучим разрешимость системы равенств (3.6), (3.7). Следующий классический результат является следствием теоремы Бари (см., например, [7, 24]).

Лемма 4.1. *Рассмотрим проблему моментов*

$$s_k = \int\limits_0^T g_k(t)u(t)dt, \qquad T > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

где $g_k(\cdot) \in L_2(0,T)$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *для последовательности* $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *проблема* (4.1) *имеет решение* $u(\cdot) \in L_2(0,T)$ *тогда и только тогда, когда* $\{s_k\} \in \ell_2$, *т. е.* $\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k^2 < +\infty$;

(ii) *семейство функций* $\{g_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $t \in [0,T]$, *образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки* $\mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}\{g_k(t), k \in \mathbb{N}\}$.

Введем следующее обозначение: $\mathcal{L}(0,T) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{Cl}\,\mathrm{Lin}\{g_k(t), k \in \mathbb{N}\} \subset L_2(0,T)$. В работе [14] доказаны два следующих утверждения о разрешимости проблемы моментов.

Лемма 4.2. *Пусть для некоторого* $T_1 > 0$ *функции* $\{g_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$, *определенные на* $[0,T_1]$, *образуют базис Рисса в* $\mathcal{L}(0,T_1) \subset L_2(0,T_1)$ *и* $\mathrm{codim}\,\mathcal{L}(0,T_1) < +\infty$. *Тогда для всех* T: $0 < T < T_1$ *существует такое бесконечномерное подпространство* $\ell_T \subset \ell_2$, *что проблема моментов* (4.1) *неразрешима на отрезке* $[0,T]$ *для последовательностей* $\{s_k\} \in \ell_T \backslash \{0\}$.

Лемма 4.3. *Рассмотрим проблему моментов*

$$s_k = \sum_{d=1}^{r} \int\limits_0^T g_k^d(t)u_d(t)dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

в предположении, что $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^T |g_k^d(t)|^2 dt < +\infty$ *для всех* $d = 1, \ldots, r$.

Тогда множество $S_{0,T}$ *последовательностей* $\{s_k\}$, *для которых проблема* (4.2) *разрешима, является нетривиальным подмногообразием* ℓ_2, *т. е.* $S_{0,T} \neq \ell_2$.

Следующее утверждение (см. [14]) показывает, что множество $\mathcal{R}_T$ состояний, достижимых из точки 0 посредством системы (2.1) с управлениями из $L_2(0,T)$, всегда является подмножеством $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. также [8]).

Лемма 4.4. *Если состояние* $x_T = \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix}$ *достижимо из точки* 0 *посредством системы* (2.1), *то оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям*:

(C_1) $\sum_{|k|>N} \sum_{m=1}^{n} k^2 \left| \left\langle \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix}, \psi_{m,k} \right\rangle \right|^2 < \infty$;

(C_2) $\sum_{|k|>N} \sum_{m=1}^{n} k^2 \left\| P_m^{(k)} \begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix} \right\|^2 < \infty$;

(C_3) $\begin{pmatrix} y_T \\ z_T(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Перейдем к доказательству необходимости условий (i) и (ii) теоремы 1.1.

Теорема 4.1. *Если не выполнено условие* (i) *теоремы* 1.1, *т. е. существуют такие* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $y \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, *что* $\Delta_{\mathcal{A}}^*(\lambda)y = 0$ *и* $B^*y = 0$, *то система* (1.1) *не является точно управляемой ни за какое время* $T > 0$.

Доказательство. Условие (i) допускает следующую эквивалентную формулировку: не существует собственного вектора g оператора $\mathcal{A}^*$, который принадлежал бы $\operatorname{Ker}\mathcal{B}^*$. Данное утверждение следует из явного вида (3.3) собственных векторов сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.

Предположим, что существует такой вектор $g \neq 0$, что $\mathcal{A}^*g = \lambda g$ и $g \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}^*$. Рассмотрим произвольное состояние $x_T \in \mathcal{R}_T$. Имеет место равенство

$$\langle x_T, g\rangle = \int\limits_0^T \left\langle u(t), \mathcal{B}^* e^{\mathcal{A}^* t} g\right\rangle dt = 0.$$

Это означает, что для всех $T > 0$ множество $\mathcal{R}_T$ не плотно в M_2 и, следовательно, не может быть равным $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, которое плотно в M_2, так как $\mathcal{A}$ является инфинитезимальным генератором полугруппы. Следовательно, система не может быть управляемой.

Теорема 4.1 доказана.

Далее покажем, что управляемость пары (A_{-1}, B) является необходимым условием управляемости системы (1.1) вне зависимости от того является ли матрица A_{-1} вырожденной или нет.

Теорема 4.2. *Пусть не выполнено условие* (ii) *теоремы* 1.1, *т. е. пара* (A_{-1}, B) *не является управляемой. Тогда система* (1.1) *также не является точно управляемой.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существуют такие $\mu_0 \in \sigma(A_{-1})$ и $v_0 \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, что $A_{-1}^* v_0 = \overline{\mu_0} v_0$ и $B^* v_0 = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $\mu_0 = 0$ — неуправляемое собственное значение A_{-1}, т. е.

$$A_{-1}^* v_0 = 0 \qquad \text{и} \qquad B^* v_0 = 0. \tag{4.3}$$

Умножим уравнение (1.1) на вектор v_0^*:

$$v_0^* \dot{z}(t) = v_0^* A_{-1} \dot{z}(t-1) + \int\limits_{-1}^0 \left[v_0^* A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)\right] d\theta + v_0^* B u.$$

Учитывая соотношение (4.3), приходим к равенству

$$v_0^* \dot{z}(t) = \int\limits_{-1}^0 \left[v_0^* A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)\right] d\theta.$$

Если предположить, что система (1.1) является точно управляемой за некоторое время $T > 0$, то множество ее решений при различных допустимых управлениях должно совпадать с пространством $H^1(T-1, T; \mathbb{C}^n)$. Последнее означает, что

$$\{v_0^* \dot{z}(t),\ t \in [T-1, T]\} = L_2(T-1, T; \mathbb{C}).$$

С другой стороны, оператор $Q(z) = \int_{-1}^0 \left[v_0^* A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) + v_0^* A_3(\theta) z(t+\theta)\right] d\theta$, действующий из пространства $H^1(T-2, T; \mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(T-1, T; \mathbb{C})$, является оператором Фредгольма. Действительно, заменив время $\tau = t + \theta$, получим

$$Q(z) = \int_{t-1}^{t} [v_0^* A_2(\tau - t)\dot{z}(\tau) + v_0^* A_3(\tau - t)z(\tau)]\, d\tau.$$

Таким образом, оператор Q является компактным и, следовательно, его образ не может совпадать со всем пространством $L_2(T-1, T; \mathbb{C})$. Мы пришли к противоречию, которое доказывает неуправляемость в случае $\mu_0 = 0$.

Далее, рассмотрим случай, когда неуправляемыми являются только ненулевые собственные значения A_{-1}. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $\det A_{-1} \neq 0$. Действительно, если $0 \in \sigma(A_{-1})$, то существует такая матрица P, что $A_{-1} + BP$ является невырожденной матрицей (см. [23]). При этом, очевидно, пара $(A_{-1} + BP, B)$ остается неуправляемой. Тогда, используя замену управления, переходим к эквивалентной задаче управляемости для системы с невырожденным нейтральным слагаемым $A_{-1} + BP$.

Выполнение условия $\det A_{-1} \neq 0$ позволяет записать моментные равенства (3.6), (3.7). Рассмотрим некоторый индекс $m = m_0$, определяющий неуправляемое собственное значение ($A_{-1}^* v_0 = \bar{\mu}_{m_0} v_0,\ B^* v_0 = 0,\ v_0 \neq 0$), и соответствующее m_0 подмножество равенств (3.6):

$$s_k = k \langle x_T, \psi_{m_0,k} \rangle = \sum_{d=1}^{r} \int_0^T e^{\lambda_{m_0}^k t} q_{m_0,k}^d u_d(t) dt, \quad |k| > N, \tag{4.4}$$

где $q_{m_0,k}^d = k \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m_0,k} \rangle_{M_2}$. Покажем, что существуют $\{s_k\} \in \ell_2$, для которых проблема моментов (4.4) неразрешима.

При $m = m_0$ собственные векторы $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеют вид $\widetilde{\psi}_{m_0,k} = \left(v_0,\ \overline{\lambda_{m_0}^k} e^{-\overline{\lambda_{m_0}^k}\theta} v_0\right)^T$, откуда следует, что $\left\langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m_0,k} \right\rangle_{M_2} = \langle b_d, v_0 \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$ для всех $d = 1, \ldots, r$ и $|k| > N$. Тогда, используя лемму 3.2, получаем оценку

$$\sum_{|k|>N} k^2 \sum_{d=1}^{r} \int_0^T \left| e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} \right|^2 dt < +\infty. \tag{4.5}$$

Из леммы 4.3 следует, что множество разрешимости системы (4.4) за произвольное время $T > 0$ является нетривиальным линейным подмногообразием $\ell_T \subset \ell_2,\ \ell_T \neq \ell_2$. Другими словами, существуют последовательности $\{s_k\}_{|k|>N}$, для которых (4.4) неразрешимо. Это означает, что существуют состояния x_T, которые удовлетворяют условию (C_1) леммы 4.4, но не достижимы из точки 0 посредством системы (1.1). Таким образом, $\mathcal{R}_T \neq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для произвольного $T > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.2.

5. Достаточность условий управляемости в случае одномерного управления. В случае систем с одним управлением ($r = 1,\ B = b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$) проблема моментов (3.6), (3.7) принимает вид

$$\alpha_{m,k} \langle x_T, \psi_{m,k} \rangle = \int_0^T e^{\lambda_m^k t} u(t) dt, \quad |k| > N, \quad m = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

$$\left\langle x_T, \widehat{\psi}_s \right\rangle = \int_0^T e^{\widehat{\lambda}_s t} \widehat{q}_s(t) u(t) dt, \quad s = 1, \ldots, \ell_N, \tag{5.2}$$

где N достаточно велико, семейство (5.1) бесконечно, $\widehat{q}_j$ — полиномы, семейство (5.2) конечно и $\alpha_{m,k} = \left(\langle \mathbf{b}, \psi_{m,k}\rangle_{M_2}\right)^{-1}$, $\mathbf{b} = (b, 0)^T$.

Из леммы 3.1 и явного вида базиса $\{\psi\}$ оператора $\mathcal{A}^*$ следует, что для всех $m = 1, \ldots, n$ и $k : |k| > N$ имеет место оценка

$$0 < C_1 \leq \left|\frac{1}{k}\alpha_{m,k}\right| \leq C_2 < +\infty.$$

Исследуем вопрос базисности семейств $\{e^{\lambda_m^k t}\}$ и $\left\{e^{\widehat{\lambda}_s t}\widehat{q}_s(t)\right\}$. Пусть заданы некоторые различные по модулю $2\pi\mathrm{i}$ комплексные числа $\delta_1, \ldots, \delta_n$, $N \in \mathbb{N}$ и множество $\{\varepsilon_{m,k}, |k| > N, m = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{C}^n$ таково, что $\sum_{m,k} |\varepsilon_{m,k}|^2 < +\infty$. Обозначим через $\mathcal{E}_N$ (бесконечное) семейство функций

$$\mathcal{E}_N = \left\{e^{(\delta_m + 2\pi\mathrm{i}k + \varepsilon_{m,k})t},\ |k| > N,\ m = 1, \ldots, n\right\}.$$

Далее, пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — такое множество различных комплексных чисел, что $\varepsilon_j \neq \delta_m + 2\pi\mathrm{i}k + \varepsilon_{m,k}$, $j = 1, \ldots, r$, $m = 1, \ldots, n$, $|k| > N$, и $m_1', \ldots, m_r'$ — некоторые натуральные числа. Обозначим через $\mathcal{E}_0$ (конечное) семейство функций

$$\mathcal{E}_0 = \left\{e^{\varepsilon_j t}, te^{\varepsilon_j t}, \ldots, t^{m_j'-1}e^{\varepsilon_j t}\right\}_{j=1,\ldots,r}$$

и через $\mathcal{E}$ семейство функций $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N \cup \mathcal{E}_0$.

Теорема 5.1. (i) *Если* $\sum_{j=1}^r m_j' = (2N+1)n$, *то семейство* $\mathcal{E}$ *образует базис Рисса пространства* $L_2(0, n)$.

(ii) *Для* $T > n$ *независимо от количества элементов в* $\mathcal{E}_0$ *семейство* $\mathcal{E}$ *образует базис Рисса замыкания своей линейной оболочки в пространстве* $L_2(0, T)$.

Доказательство данной теоремы, основанное на результатах работы [1], можно найти в [14]. Перейдем к доказательству достаточности условий управляемости.

Теорема 5.2. *Пусть* $r = 1$ *в системе* (1.1) *и выполнены условия* (i), (ii) *теоремы* 1.1. *Тогда*:

(1) *система* (1.1) *является точно управляемой за произвольное время* $T > n$;

(2) *оценка времени управляемости является точной, т. е. система* (1.1) *неуправляема за время* $T \leq n$.

Доказательство. Отметим, что размерности всех собственных пространств $\mathcal{A}^*$ равны единице. Действительно, в противном случае существовал бы такой собственный вектор g оператора $\mathcal{A}^*$, что $\langle \mathbf{b}, g\rangle_{M_2} = 0$. Поскольку $g = (y, z(\theta))^T$, где $y : \Delta_{\mathcal{A}}^*(\lambda_0)y = 0$, $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A}^*)$, и $\langle \mathbf{b}, g\rangle_{M_2} = \langle b, y\rangle_{\mathbb{C}^n}$, приходим к противоречию с условием (i).

Рассмотрим задачу (5.1), (5.2). Из условия (i) следует, что $\langle \mathbf{b}, \psi_{m,k}\rangle_{M_2} \neq 0$ для всех m и k, а также все полиномы $\{\widehat{q}_s(t)\}$, $s = 1, \ldots, \ell_N$, нетривиальны. По проблеме моментов построим следующие наборы функций:

$$\Phi_1 = \left\{e^{\lambda_m^k t},\ |k| > N,\ m = 1, \ldots, n\right\},$$

$$\Phi_2 = \left\{e^{\widehat{\lambda}_s t}\widehat{q}_s(t),\ s = 1, \ldots, \ell_N\right\}.$$

Согласно теореме 5.1 при $T > n$ и достаточно большом N множество функций

$$\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2$$

образует базис Рисса в $\operatorname{Cl}\operatorname{Lin}\Phi \subset L_2(0,T)$. Тогда, в силу леммы 4.1, проблема моментов (5.1), (5.2) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть является элементом ℓ_2, или, что то же самое, когда выполнено условие (C$_1$) из леммы 4.4. В силу того, что условие (C$_1$) эквивалентно условию (C$_3$), получаем, что проблема моментов при $T > n$ разрешима тогда и только тогда, когда $x_T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, т. е. $\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Для доказательства второго утверждения теоремы напомним, что количество элементов семейства Φ_2 равно $\ell_N = (2N+2)n$. С другой стороны, из теоремы 5.1 следует, что в $L_2(0,n)$

$$\operatorname{codim}\operatorname{Cl}\operatorname{Lin}\Phi_1 = (2N+1)n.$$

Следовательно, семейство $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ содержит n функций, которые представимы как линейная комбинация других функций этого семейства. Это означает, что коразмерность $\mathcal{R}_T$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ не равна нулю: $\operatorname{codim}\mathcal{R}_T = n$, т. е. множество достижимости $\mathcal{R}_T$ при $T = n$ не равно $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и система не является управляемой. При $T < n$ из леммы 4.2 следует, что коразмерность множества $\mathcal{R}_T$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ бесконечна.

Теорема 5.2 доказана.

6. Достаточность условий управляемости в случае многомерного управления. Рассмотрим случай $\dim B = r > 1$. Предполагаем, что пара (A_{-1}, B) приведена к форме Фробениуса, т. е. $A_{-1} = \operatorname{diag}\{F_1, \ldots, F_r\}$, $\dim F_i = s_i$, и F_i имеют вид (2.5); $B = \operatorname{diag}\{g_1, \ldots, g_r\}$, где $g_i = (0,\ 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^{s_i}$. Известно, что

$$\max_i \dim F_i = n_1,$$

где n_1 — первый индекс управляемости пары (A_{-1}, B), т. е. наименьшее натуральное число ν, удовлетворяющее соотношению $\operatorname{rank}(B, A_{-1}B, \ldots, A_{-1}^{\nu-1}B) = n$.

Опираясь на представление в форме Фробениуса, запишем бесконечную часть проблемы моментов (3.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
k\,\langle x_T, \psi_{m,k}\rangle &= \int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^1 u_1(t)dt + \sum_{d\neq 1}\int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t)dt, \quad m \in S_1,\\
k\,\langle x_T, \psi_{m,k}\rangle &= \int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^2 u_2(t)dt + \sum_{d\neq 2}\int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t)dt, \quad m \in S_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k\,\langle x_T, \psi_{m,k}\rangle &= \int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^r u_r(t)dt + \sum_{d\neq r}\int\limits_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t)dt, \quad m \in S_r,
\end{aligned} \tag{6.1}$$

где $S_1 = \{1, \ldots, s_1\}$, $S_2 = \{s_1 + 1, \ldots, s_1 + s_2\}$, $\ldots$, $S_r = \{s_1 + \ldots, s_{r-1} + 1, \ldots, n\}$.

Применим теорему 5.1 к множеству функций из (6.1). Зафиксируем $d \in \{1, \ldots, r\}$ и выберем произвольное подмножество $L \subset \{1, \ldots, n\}$.

Теорема 6.1. *Для произвольно выбранных* $d,\ L$ *для всех* $T > n' = |L|$ *множество*

$$\Phi_1 = \left\{ e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d,\ |k| > N;\ m \in L \right\}$$

образует базис Рисса замыкания своей линейной оболочки $\mathrm{Cl\,Lin}\Phi_1$ *в* $L_2(0,T)$.

Если $T = n'$, *то* $\operatorname{codim} \mathrm{Cl\,Lin}\Phi_1 = (2N+1)n'$ *в пространстве* $L_2(0,n')$.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{T} \colon \mathrm{Lin}\,\Phi_1 \to \mathrm{Lin}\,\Phi_1$, определенный на элементах Φ_1 соотношениями

$$\mathcal{T}(e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d) = e^{\lambda_m^k t}, \qquad |k| > N, \quad m \in L.$$

В силу леммы 3.1 семейство $\{q_{m,k}^d\}$ является равномерно ограниченным. Тогда из теоремы 5.1 следует, что оператор $\mathcal{T}$ ограничен в смысле $L_2(0,T)$ и его продолжение на $L = \mathrm{Cl\,Lin}\,\Phi_1$ является ограниченным взаимно однозначным оператором из L в L.

Следовательно, так как в силу теоремы 5.1 образы элементов из Φ_1 образуют базис Рисса пространства L, Φ_1 также является базисом Рисса L в $L_2(0,T)$.

Теорема 6.1 доказана.

Далее нам потребуется следующий результат (см. [14], теорема 5.5).

Теорема 6.2. *Пусть для системы* (2.1) *существуют натуральное число* N *и время* $T_0 > 0$ *такие, что проблема моментов* (3.6) *при* $T = T_0$ *разрешима для всех последовательностей* $\{k\,\langle x_T, \psi_{m,k}\rangle\}_{|k|>N}$, *удовлетворяющих условию* (C_1).

Тогда из условия (i) *следует, что* $\mathcal{R}_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *при* $T > T_0$.

Перейдем к доказательству основного результата данного пункта.

Теорема 6.3. *Пусть для произвольной системы вида* (1.1) *выполнены условия* (i) *и* (ii) *теоремы* 1.1. *Тогда система* (1.1) *является точно управляемой, при этом критическое время управления* $T_0 = n_1$, *где* n_1 *— первый индекс управляемости пары* (A_{-1}, B).

Доказательство. Предположим, что пара (A_{-1}, B) приведена к форме Фробениуса. Тогда для всех $i = 1, \ldots, r$, $m \in S_i$, $d \neq i$ и $|k| > N$ справедливы соотношения

$$\left\langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m,k} \right\rangle_{M_2} = \langle b_d, c_m \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0,$$

где $c_m \colon A_{-1}c_m = \mu_m c_m$. Тогда для всех $i = 1, \ldots, r$ и $m \in S_i$ имеет место равенство

$$\sum_{d\neq i} \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^d u_d(t)dt = \sum_{d\neq i} \int_0^T k \left(e^{\lambda_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \rangle_{M_2} - e^{\widetilde{\lambda}_m^k t} \left\langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m,k} \right\rangle_{M_2} \right) u_d(t)dt.$$

Для произвольного $N \in \mathbb{N}$ проблему моментов (6.1) можно записать в операторном виде

$$\{S_{m,k}\} = Z_N u(\cdot) + Q_N u(\cdot),$$

где последовательность $\{S_{m,k}\} = \{k\,\langle x_T, \psi_{m,k}\rangle\}$ и операторы $Z_N, Q_N \colon L_2(0,T;\mathbb{C}^r) \to \ell_2$ имеют вид

$$Z_N u(\cdot) = \left\{ \int_0^T e^{\lambda_m^k t} q_{m,k}^i u_i(t)dt,\ |k| > N \right\},$$

$$Q_N u(\cdot) = \left\{ \sum\nolimits_{d\neq i} \int\limits_0^T k \left(e^{\lambda_m^k t} \left\langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k} \right\rangle_{M_2} - e^{\widetilde{\lambda}_m^k t} \langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m,k} \rangle_{M_2} \right) u_d(t) dt, \ |k| > N \right\}.$$

В силу теоремы 6.1 для достаточно больших N и $T \geq n_1$ оператор Z_N является сюръективным, т. е. образом пространства $L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ есть все ℓ_2. Из леммы 3.2 следует, что при достаточно больших N операторы Q_N являются компактными и, более того, $\|Q_N\| \to 0$ при $N \to +\infty$.

Покажем, что существует такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $N > N_0$

$$\operatorname{Im}[Z_N + Q_N] = \ell_2.$$

Поскольку $\operatorname{Im} Z_N = \ell_2$, то существует такая константа $\gamma_N > 0$, что $\|Z_N^* x\| \geq \gamma_N \|x\|$ для всех $x \in \ell_2$ (см., например, [21], теорема 4.13). Для $N > N_0$ введем обозначение $\ell_2^N = \{\{S_{m,k}\}_{|k|>N} : \sum\nolimits_{|k|>N} |s_k|^2 < +\infty\}$. Тогда $Z_N = P Z_{N_0}$, где проекторы $P \colon \ell_2^{N_0} \to \ell_2^N$ определены как

$$P(\{S_{m,k}\}_{|k|>N_0}) = \{S_{m,k}\}_{|k|>N}.$$

Следовательно, $Z_N^* = Z_{N_0}^* P^*$ и $\|P^* x\| = \|x\|$, откуда получаем

$$\|Z_N^* x\| = \|Z_{N_0}^* P^* x\| \geq \gamma_{N_0} \|x\|.$$

Последнее означает, что для всех $N > N_0$ и $x \in \ell_2$ выполнено $\|Z_N^* x\| \geq \gamma \|x\|$, где $\gamma = \gamma_0$. Так как $\|Q_N\| \to 0$ при $N \to +\infty$, то величину $\|Z_N - (Z_N + Q_N)\| = \|Q_N\|$ можно сделать как угодно малой, выбирая N, например, таким, что $\|Q_N\| \leq \dfrac{\gamma}{2}$. Тогда

$$\|[Z_N^* + Q_N^*] x\| \geq \|Z_N^* x\| - \|Q_N^* x\| \geq \gamma \|x\| - \frac{\gamma}{2} \|x\| = \frac{\gamma}{2} \|x\|.$$

Следовательно, оператор $Z_N + Q_N$ является сюръективным и его образ равен ℓ_2.

Таким образом, проблема моментов (6.1) разрешима при $T \geq n_1$ и достаточно больших $N \in \mathbb{N}$. Применяя теорему 6.2, получаем, что $R_T = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $T > n_1$.

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5.2, можно показать, что коразмерность $\mathcal{R}_{n_1}$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ конечна и не менее чем n_1 и, следовательно, система (1.1) неуправляема за время $T = n_1$. Для $T < n_1$ коразмерность $\mathcal{R}_T$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ бесконечна.

Теорема 6.3 доказана.

7. Пример. Рассмотрим трехмерную систему, заданную уравнением (1.1) с матрицами

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

функции $A_2(\theta)$, $A_3(\theta)$ таковы, что $\operatorname{rank}(\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)\ B) = n$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Применив замены управления и фазовых координат $u(t) = P\dot{z}(t-1) + v(t)$, $w = Cz$, заданные матрицами

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приходим к системе

$$\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1) + \int_{-1}^{0} \widehat{A}_2(\theta)\dot{w}(t+\theta)d\theta + \int_{-1}^{0} \widehat{A}_3(\theta)w(t+\theta)d\theta + \widehat{B}v, \tag{7.1}$$

где матрицы имеют вид

$$\widehat{A}_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_1, b_2). \tag{7.2}$$

Пусть оператор $\mathcal{A}$ с собственными значениями λ_m^k соответствует преобразованной системе (7.1), (7.2), а оператор $\widetilde{\mathcal{A}}$ с собственными значениями $\widetilde{\lambda}_m^k$ — системе без возмущения $\dot{w}(t) = \widehat{A}_{-1}\dot{w}(t-1)$. Поскольку пара $(\widehat{A}_{-1}, \widehat{B})$ приведена к форме Фробениуса, собственные векторы $\widetilde{\psi}_{m,k}$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}^*$ удовлетворяют соотношениям

$$\langle \mathbf{b}_1, \widetilde{\psi}_{m,k}\rangle = 0, \quad m = 2, 3,$$

$$\langle \mathbf{b}_2, \widetilde{\psi}_{m,k}\rangle = 0, \quad m = 1, \quad \mathbf{b}_i = (b_i, 0) \in M_2.$$

Далее, $q_{m,k}^d = k\langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k}\rangle$, где $\psi_{m,k}$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*$, и бесконечная часть проблемы моментов (3.6) принимает вид

$$k\,\langle x_T,\ \psi_{1,k}\rangle = \int_0^T e^{\lambda_1^k t} q_{1,k}^1 u_1(t)dt + \int_0^T f_{1,k}^2(t)u_2(t)dt,$$

$$k\,\langle x_T,\ \psi_{2,k}\rangle = \int_0^T e^{\lambda_2^k t} q_{2,k}^2 u_2(t)dt + \int_0^T f_{2,k}^2(t)u_1(t)dt,$$

$$k\,\langle x_T,\ \psi_{3,k}\rangle = \int_0^T e^{\lambda_3^k t} q_{3,k}^2 u_2(t)dt + \int_0^T f_{3,k}^2(t)u_1(t)dt, \quad |k| > N,$$

где функции

$$f_{m,k}^d(t) = k\left(e^{\lambda_m^k t}\langle \mathbf{b}_d, \psi_{m,k}\rangle - e^{\widetilde{\lambda}_m^k t}\langle \mathbf{b}_d, \widetilde{\psi}_{m,k}\rangle\right)$$

в силу леммы 3.2 удовлетворяют оценке $|f_{m,k}^d(t)| \le \alpha_k,\ \sum_k \alpha_k^2 < +\infty$.

Индекс управляемости n_1 пары $(\widehat{A}_{-1}, \widehat{B})$ (или пары (A_{-1}, B)) равен 2. Условия (i) и (ii) теоремы 1.1 выполнены и, следовательно, система является точно управляемой с критическим временем управляемости $T_0 = 2$.

8. Выводы. Предложен подход к решению задачи точной управляемости с помощью проблемы моментов. Сложность выбора базиса для построения проблемы моментов преодолена с помощью замены управления и фазовых координат, что позволяет привести более наглядное доказательство критерия точной управляемости. Данный подход открывает новые перспективы для анализа как управляемости, так и стабилизируемости более общего класса систем с нейтральным оператором $Kf = \sum_{i=1}^{r} A_{h_i} f(h_i),\ h_i \in [-1, 0]$.

Литература

1. *Avdonin S. A., Ivanov S. A.* Families of exponentials. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
2. *Banks H. T., Jacobs M. Q., Langenhop C. E.* Characterization of the controlled states in $W_2^{(1)}$ of linear hereditary systems // SIAM J. Contr. – 1975. – **13**. – P. 611 – 649.
3. *Bartosiewicz Z.* A criterion of closedness of an attainable set of a delay system // Syst. Contr. Lett. – 1983. – **3**, № 4. – P. 211 – 215.
4. *Bensoussan A., Prato G. Da., Delfour M. C., Mitter S. K.* Representation and control of infinite-dimensional systems. – Boston, MA: Birkhäuser, 1992. – Vol. 1.
5. *Burns J. A., Herdman T. L., Stech H. W.* Linear functional-differential equations as semigroups on product spaces // SIAM J. Math. Anal. – 1983. – **14**, № 1. – P. 98 – 116.
6. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.
8. *Ito K., Tarn T. J.* A linear quadratic optimal control for neutral systems // Nonlinear Anal. – 1985. – **9**, № 7. – P. 699 – 727.
9. *Jacobs M. Q., Langenhop C. E.* Criteria for function space controllability of linear neutral systems // SIAM J. Contr. Optim. – 1976. – **14**, № 6. – P. 1009 – 1048.
10. *Хартовский В. Е., Павловская А. Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. – 2013. – **5**. – С. 59 – 79.
11. *Manitius A., Triggiani R.* Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions // SIAM J. Contr. Optim. – 1978. – **16**, № 4. – P. 599 – 645.
12. *Марченко В. М.* О полной управляемости систем с запаздыванием // Проблемы управления и теории информации. – 1979. – **8**, № 5-6. – С. 421 – 432.
13. *O'Connor D. A., Tarn T. J.* On the function space controllability of linear neutral systems // SIAM J. Contr. Optim. – 1983. – **21**, № 2. – P. 306 – 329.
14. *Rabah R., Sklyar G. M.* The analysis of exact controllability of neutral-type systems by the moment problem approach // SIAM J. Contr. Optim. – 2007. – **46**, № 6. – P. 2148 – 2181.
15. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems // C. r. Math. Acad. Sci. Paris. – 2003. – **337**, № 1. – P. 19 – 24.
16. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space // J. Different. Equat. – 2005. – **214**, № 2. – P. 391 – 428.
17. *Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V.* On strong regular stabilizability for linear neutral type systems // J. Different. Equat. – 2008. – **245**, № 3. – P. 569 – 593.
18. *Rabah R., Sklyar G. M.* On exact controllability of linear time delay systems of neutral type // Appl. Time Delay Systems (Lect. Notes Contr. and Inform. Sci.). – 2007. – **352**. – P. 165 – 171.
19. *Rabah R., Sklyar G. M., Barkhayev P. Yu.* Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems // ESAIM: Contr., Optim. and Calc. Var. – 2012. – **18**, № 3. – P. 656 – 692.
20. *Rivera Rodas H., Langenhop C. E.* A sufficient condition for function space controllability of a linear neutral system // SIAM J. Contr. Optim. – 1978. – **16**, № 3. – P. 429 – 435.
21. *Rudin W.* Functional analysis // Int. Ser. Pure and Appl. Math. – New York: McGraw-Hill Inc., 1991.
22. *Shklyar B.* Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials // Different. Equat. and Appl. – 2011. – **3**, № 2. – P. 171 – 188.
23. *Wonham W. M.* Linear multivariable control: a geometric approach. – New York: Springer, 1985.
24. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. – New York: Acad. Press, 1980.

Получено 08.07.15