УДК 512.542

В. С. Монахов, И. Л. Сохор (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ШИРОКИМИ ПОДГРУППАМИ

A subgroup H of a finite group G is called wide if each prime divisor of the order of G divides the order of H. We obtain a description of finite solvable groups without wide subgroups. It is shown that a finite solvable group with nilpotent wide subgroups contains a quotient group with respect to the hypercenter without wide subgroups.

Підгрупа H скінченної групи G називається широкою, якщо кожний простий дільник порядку G ділить порядок H. Отримано опис скінченних розв'язних груп, що не містять широких підгруп. Доведено, що у скінченній розв'язній групі з нільпотентними широкими підгрупами фактор-група по гіперцентру не містить широких підгруп.

Введение. В настоящей статье рассматриваются только конечные группы. Принятые обозначения стандартны и соответствуют [1, 2]. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, а $|\pi(G)|$ — число всех различных простых делителей порядка группы G. Широкой подгруппой будем называть подгруппу H группы G, у которой $\pi(H) = \pi(G)$.

Пусть k — натуральное число. Группа, порядок которой делится точно на k различных простых чисел, будем называть k-примарной. При $k = 1, 2$ используются термины „примарная" и „бипримарная" группы. Группу G будем называть квази-k-примарной, если $|\pi(G)| > k$ и $|\pi(M)| \leq k$ для каждой максимальной подгруппы M из G. Квази-1-примарную группу называют квазипримарной, а квази-2-примарную группу — квазибипримарной [3].

Очевидно, что нильпотентная квазипримарная группа имеет порядок pq, где p и q — различные простые числа. Ненильпотентная квазипримарная группа $G = [E_{p^a}]Z_q$ является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой группы E_{p^a} порядка p^a и циклической группы Z_q порядка q, где a — показатель p по модулю q. Это следует из теоремы О. Ю. Шмидта [4] о группах, все подгруппы которых нильпотентны.

Квазибипримарные группы изучил С. С. Левищенко [3]. Разрешимая квазибипримарная группа G является полупрямым произведением $[P]M$ своей элементарной абелевой силовской p-подгруппы P и квазипримарной подгруппы M, являющейся максимальной подгруппой группы G [3] (теорема 3.1). В неразрешимой квазибипримарной группе G подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ примарна [3] (теорема 2.2), а фактор-группа $G/\Phi(G)$ является простой группой и все такие простые группы перечислены в [3] (теорема 2.1).

Вполне естественно возникает задача изучения строения квази-k-примарной группы при любом k. Большая часть простых групп является квази-k-примарными. Простые группы, которые не являются квази-k-примарными, перечислены в [5, 3.8]. Тем самым дан исчерпывающий ответ на вопрос В. С. Монахова из Коуровской тетради [6] (11.64).

В настоящей статье получено описание разрешимых квази-k-примарных групп и разрешимых групп с нильпотентными широкими подгруппами.

1. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Разрешимая квази-k-примарная группа $(k + 1)$-примарна.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая квази-k-примарная группа и M — ее максимальная подгруппа. По определению квази-k-примарной группы $|\pi(G)| \geq k+1$, $|\pi(M)| \leq k$. В разрешимой группе максимальные подгруппы имеют примарные индексы. Поэтому

$$|G\colon M| = p^{\alpha}, \qquad p \in \pi(G), \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $|G| = |M| \cdot |G\colon M|$, то $|\pi(G)| \leq k+1$ и $|\pi(G)| = k+1$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если G — разрешимая квази-k-примарная группа и N — нормальная холлова подгруппа, то G/N — квази-l-примарная группа, где $l = k - |\pi(N)|$.*

Доказательство. По лемме 1 группа G $(k+1)$-примарна, поэтому

$$|\pi(G/N)| = |\pi(G)| - |\pi(N)| = k + 1 - |\pi(N)| = l + 1.$$

Пусть M/N — произвольная максимальная подгруппа фактор-группы G/N. Тогда M — максимальная подгруппа группы G. Поэтому $|\pi(M)| < |\pi(G)|$. Поскольку N — холлова подгруппа группы G, то

$$|\pi(M/N)| = |\pi(M)| - |\pi(N)| < |\pi(G)| - |\pi(N)| = |\pi(G/N)| = l + 1.$$

Таким образом, фактор-группа G/N $(l+1)$-примарна, а любая ее максимальная подгруппа не более чем l-примарна. Следовательно, G/N квази-l-примарна.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 ([2], IV.2.11)**.** *Если в группе G все силовские подгруппы циклические, то коммутант G' является циклической холловой подгруппой и фактор-группа G/G' циклическая.*

2. Строение разрешимых квази-k-примарных групп.

Теорема 1. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *G — квази-k-примарная группа*;

2) *каждая нормальная подгруппа группы G является холловой подгруппой*;

3) *каждая максимальная подгруппа группы G является холловой подгруппой*;

4) *$G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G, а M — квази-$(k-1)$-примарная и максимальная подгруппа.*

Доказательство. Проверим, что из утверждения 1 следует утверждение 2. Пусть G — разрешимая квази-k-примарная группа, N — нормальная подгруппа группы G, $\tau = \pi(G) \setminus \pi(N)$. Предположим, что N не является холловой подгруппой группы G. Поскольку G — квази-k-примарная группа и N — ее собственная подгруппа, то $|\pi(N)| \leq k$ и $\tau \neq \varnothing$. Далее, так как G — разрешимая группа, то в G существует τ-холлова подгруппа M. Теперь $(|M|, |N|) = 1$, а значит, $M \cap N = 1$ и $NM = [N]M < G$. Но

$$\pi([N]M) = \pi(N) \cup \pi(M) = \pi(N) \cup \tau = \pi(G), \quad |\pi(G)| = k + 1,$$

т. е. в квази-k-примарной группе G существует собственная $(k+1)$-примарная подгруппа $[N]M$. Пришли к противоречию. Таким образом, N — холлова подгруппа группы G и из утверждения 1 следует утверждение 2.

Проверим, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Допустим, что в разрешимой группе G каждая нормальная подгруппа является холловой. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G, а N — минимальная нормальная подгруппа. Тогда N — силовская подгруппа группы G. Если N не содержится в M, то $G = NM$, а так как N — абелева подгруппа группы G, то $N \cap M = 1$ и подгруппа M холлова. Пусть $N \subseteq M$. Тогда M/N — максимальная подгруппа фактор-группы G/N. Понятно, что в G/N каждая нормальная подгруппа является холловой и можно применить индукцию. По индукции M/N — холлова подгруппа фактор-группы G/N и M также холлова в группе G.

Проверим, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Допустим, что в разрешимой группе G каждая максимальная подгруппа является холловой. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G и $|\pi(G)| = k + 1$. Поскольку M холлова, то $|\pi(M)| = |\pi(G)| - 1 = k$ и G — квази-k-примарная группа.

Таким образом, утверждения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Покажем, что из утверждения 1 следует утверждение 4. Пусть G — разрешимая квази-k-примарная группа и N — ее минимальная нормальная подгруппа. Из утверждения 2 следует, что N — силовская p-подгруппа группы G. По теореме Шура – Цассенхауза [1] (4.32) в группе G существует подгруппа M такая, что $G = [N]M$. По лемме 1 группа G $(k+1)$-примарна, поэтому подгруппа M k-примарна. Предположим, что в M существует собственная k-примарная подгруппа M_1. Тогда в G существует собственная $(k+1)$-примарная подгруппа вида $[N]M_1$. Пришли к противоречию. Следовательно, M квази-$(k-1)$-примарна.

Осталось показать, что из утверждения 4 следует утверждение 1. Пусть $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G, а M — ее квази-$(k-1)$-примарная и максимальная подгруппа. Тогда по лемме 1

$$|\pi(M)| = k, \qquad |\pi(G)| = |\pi([N]M)| = |\pi(N)| + |\pi(M)| = k + 1.$$

Покажем, что любая максимальная подгруппа K группы G не более чем k-примарна.

Пусть $NK = G$. Тогда $N \cap K = 1$ и $K \simeq M$. Так как M — квази-$(k-1)$-примарная разрешимая подгруппа группы G, то по лемме 1 подгруппа M, а значит и K, k-примарна.

Если NK — собственная подгруппа группы G, то $N \subseteq K$ и $K = N(K \cap M)$ по тождеству Дедекинда. Поскольку M квази-$(k-1)$-примарна, то $L \cap M$ не более чем $(k-1)$-примарна. Поэтому $K = [N](K \cap M)$ не более чем k-примарна. Таким образом, утверждения 4 и 1 эквивалентны.

Теорема 1 доказана.

Отметим, что π-разрешимые группы с некоторыми холловыми максимальными подгруппами изучены в [7].

***Следствие* 1.** *В разрешимой квази-k-примарной группе подгруппа Фраттини единична.*

Доказательство. Подгруппа Фраттини любой группы не может быть холловой [1] (4.33). Остается применить утверждение 2 теоремы 1.

***Следствие* 2.** *В разрешимой квази-k-примарной группе подгруппа Фиттинга является холловой и каждая ее силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой.*

Доказательство. По утверждению 2 теоремы 1 подгруппа Фиттинга холлова, а значит, каждая ее силовская подгруппа является силовской подгруппой самой группы. Кроме того, так как подгруппа Фиттинга нильпотентна, то каждая ее силовская подгруппа является характеристической и, следовательно, нормальной в группе. При этом по утверждения 2 теоремы 1 минимальная нормальная подгруппа разрешимой квази-k-примарной группы является силовской подгруппой.

***Следствие* 3.** *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Если G — разрешимая квази-k-примарная группа, то фактор-группа G/N является разрешимой квази-l-примарной группой для $l = k - |\pi(N)|$.*

Доказательство. Необходимо применить утверждение 2 теоремы 1 и лемму 2.

Если группа G имеет нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам, то говорят, что группа G имеет силовскую башню.

***Следствие* 4.** *Разрешимая квази-k-примарная группа имеет силовскую башню.*

Доказательство. Применим индукцию по k. Пусть G — разрешимая квази-k-примарная группа. Тогда по утверждениям 2 и 4 теоремы 1 группа G представима в виде $G = [P_1]M_1$, где P_1 — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G, а M_1 — квази-$(k-1)$-примарная и максимальная подгруппа. По индукции подгруппа M_1 имеет силовскую башню, поэтому группа G имеет силовскую башню.

Будем говорить, что натуральное число n свободно от квадратов, если p^2 не делит n для любого простого p. Сверхразрешимой называют группу, у которой все главные факторы имеют простые порядки.

***Следствие* 5.** *Порядок группы G свободен от квадратов тогда и только тогда, когда G — сверхразрешимая квази-k-примарная группа для $k = |\pi(G)| - 1$. В частности, сверхразрешимая квази-k-примарная группа метациклическая.*

Доказательство. Пусть порядок группы G свободен от квадратов и $k = |\pi(G)| - 1$. Тогда все силовские подгруппы в G циклические и по лемме 3 группа G сверхразрешима и метациклическая. Понятно, что $|\pi(X)| < |\pi(G)|$ для каждой собственной подгруппы X группы G, т. е. G квази-k-примарна.

Обратно, пусть G — сверхразрешимая квази-k-примарная группа. Применим индукцию по k. По утверждению 4 теоремы 1 группа G представима в виде $G = [N]M$, где N — минимальная нормальная и силовская подгруппа группы G, а M — квази-$(k-1)$-примарная и максимальная подгруппа. Согласно [1] (4.48) минимальная нормальная подгруппа сверхразрешимой группы имеет простой порядок, поэтому $|N| = p$, $p \in \pi(G)$. Подгруппа M сверхразрешима и квази-$(k-1)$-примарна. По индукции порядок M свободен от квадратов, поэтому порядок группы G свободен от квадратов. По лемме 3 группа G метациклическая.

***Следствие* 6.** *Производная длина разрешимой квази-k-примарной группы G не превышает*

$$\min\big\{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, 2, \ldots, t\}\big\},$$

где $|F(G)| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}$.

Доказательство. Пусть $d(G)$ и $r(G)$ — производная длина и ранг разрешимой квази-k-примарной группы G соответственно. По утверждению 4 теоремы 1 в группе G все силовские подгруппы элементарные абелевы и главный ряд группы G имеет длину, равную $|\pi(G)|$. Отсюда следует, что $d(G) \leq |\pi(G)|$. Разрешимым группам с абелевыми силовскими подгруппами посвящен § VI.14 [2]. Поэтому все утверждения этого параграфа, касающиеся A-групп (разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами), справедливы для разрешимой квази-k-примарной группы. В частности, $d(G) \leq 1+r(G)$ по [2] (VI.14.18) и $r(G) \leq u$ по [2] (VI.14.31), где u — максимум числа образующих силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга $F(G)$. Поскольку силовские подгруппы в группе G элементарные абелевы, то $u = \max\{a_i \mid i = 1, \ldots, t\}$. Отсюда следует, что

$$d(G) \leq \min\big\{|\pi(G)|, \max\{1 + a_i \mid i = 1, \ldots, t\}\big\}.$$

При $k = 2$ теорема 1 превращается в результат С. С. Левищенко:

Следствие **7** ([3], теорема 3.1)**.** *Разрешимая квазибипримарная группа G является полупрямым произведением $[P]M$ своей элементарной абелевой силовской p-подгруппы P и квазипримарной подгруппы M, являющейся максимальной подгруппой группы G.*

3. Разрешимые группы с нильпотентными широкими подгруппами. Напомним определение гиперцентра. Пусть G — неединичная группа, $Z_0(G) = 1$, $Z_1(G) = Z(G)$, $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G)), \ldots, Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G)), \ldots$. Подгруппа $Z_\infty(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i(G)$ называется гиперцентром группы G.

Очевидно, что $Z(G/Z_\infty(G)) = 1$.

Теорема 2. *Если в разрешимой группе G нильпотентна каждая максимальная подгруппа M, у которой $\pi(M) = \pi(G)$, то фактор-группа $G/Z_\infty(G)$ квази-k-примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$.*

Доказательство. Предположим, что фактор-группа $\overline{G} = G/Z_\infty(G)$ не квази-k-примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$. Тогда в $\overline{G}$ существует такая максимальная подгруппа $\overline{M} = M/Z_\infty(G)$, что $\pi(\overline{M}) = \pi(\overline{G})$. Подгруппа M максимальна в G и $\pi(M) = \pi(G)$. По условию M нильпотентна, поэтому $\overline{M}$ нильпотентна. Так как $\overline{M}$ — максимальная подгруппа разрешимой фактор-группы $\overline{G}$, то $|\overline{G} : \overline{M}| = p^\alpha$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и натурального α. Пусть $\overline{M}_p$ — силовская p-подгруппа из $\overline{M}$, а $\overline{G}_p$ — силовская p-подгруппа фактор-группы $\overline{G}$, содержащая $\overline{M}_p$. Тогда $\overline{M}_p$ — собственная подгруппа в $\overline{G}_p$, поэтому $\overline{M}_p$ нормальна в $\overline{G}$. Теперь неединичный элемент $\overline{x}$ из $\overline{M}_p \cap Z(\overline{G}_p)$ принадлежит центру фактор-группы $\overline{G}$. Это противоречит тому, что $Z(G/Z_\infty(G)) = 1$.

Теорема 2 доказана.

Следствие 8. *Если в группе G все широкие подгруппы нильпотентны, то $G/Z_\infty(G)$ квази-k-примарна для $k = |\pi(G/Z_\infty(G))| - 1$.*

Теорема 2 не допускает обращения. Примером является группа $G = S_3 \times Z_6$. Здесь S_3 — симметрическая группа степени 3, Z_6 — циклическая группа порядка 6. У этой группы $Z_\infty(G) = Z_6$, фактор-группа $G/Z_\infty(G) \simeq S_3$ квазипримарна, а широкая максимальная подгруппа $M = S_3 \times Z_2$ не нильпотентна.

Вполне естественно возникает следующая задача: описать разрешимые группы, у которых все широкие подгруппы сверхразрешимы.

Литература

1. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. – Минск: Вышэйш. шк., 2006. – 207 с.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Berlin etc., 1967. – 796 p.
3. *Левищенко С. С.* Конечные квазибипримарные группы // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 83 – 97.
4. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. – 1924. – **31**. – С. 366 – 372.
5. *Zhang Qinhai, Wang Lifang.* Finite non-abelian simple groups which contain a non-trivial semipermutable subgroup // Algebra Colloq. – 2005. – **12**. – P. 301 – 307.
6. *Коуровская* тетрадь: нерешенные вопросы теории групп. – 18-е изд. – Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 2014.
7. *Монахов В. С.* Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. – 2008. – **84**, № 3. – С. 390 – 394.

Получено 17.02.15