УДК 517.5

С. Б. Гембарська (Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк),
П. В. Задерей (Київ. нац. ун-т технологій та дизайну)

ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛА ВІД МОДУЛЯ МІШАНОЇ ПОХІДНОЇ СУМИ ПОДВІЙНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ

For functions of two variables defined by trigonometric series with quasiconvex coefficients, we estimate their variations in the Hardy – Vitali sense.

Для функций двух переменных, заданных тригонометрическими рядами с квазивыпуклыми коэффициентами, получены оценки их вариаций в смысле Харди – Витали.

1. Постановка задачі. Формулювання основного результату. У статтях [1, 2] С. О. Теляковський досліджував ряди

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{1}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\,, \tag{2}$$

коефіцієнти яких прямують до нуля,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0\,, \tag{3}$$

і є квазіопуклими, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 a_k\right| < \infty, \tag{4}$$

де $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$.

Відомо, що умови (3) та (4) забезпечують рівномірну збіжність рядів (1) та (2) на відрізку $[\varepsilon,\pi]$ при будь-якому $\varepsilon>0$, а їх суми $f(x)$ і $g(x)$ відповідно є неперервно диференційовними на $(0,\pi]$.

Основна задача в [1] полягала у встановленні оцінок через коефіцієнти a_k інтегралів від модулів похідних $|f'|$ і $|g'|$ функцій f і g на відрізках, внутрішніх до $(0,\pi]$. Було доведено теореми, що містять оцінки інтегралів від $|f'|$ і $|g'|$, взятих по відрізках $A_{l,m} :=$ $:=\left[\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{l}\right]$, $l,m\in N$, $1\le l\le m$. Це дало змогу відслідковувати поведінку цих інтегралів при $m \to \infty$ і $l = 1$, а точніше, з'ясовувати як зростають інтеграли від $|f'|$ і $|g'|$ по відрізках $[\varepsilon, \pi]$ при $\varepsilon \to +0$, якщо ці функції неінтегровні на $[-\pi, \pi]$, і як спадають інтеграли по відрізках $[0, \varepsilon]$ при $\varepsilon \to +0$, якщо функції $|f'|$ і $|g'|$ інтегровні на $[-\pi, \pi]$. Властивість неперервності функцій f' і g' за умов (3) і (4) дозволила дати змістовні оцінки варіації функцій f і g на відрізках $A_{l,m}$, виходячи із одержаних оцінок інтегралів від $|f'|$ і $|g'|$ по цих відрізках.

Метою даної роботи є поширення результатів С. О. Теляковського із [1] на кратні (подвійні) тригонометричні ряди з огляду на те, що відповідні оцінки варіації функцій, що задаються такими рядами, є важливими для застосування як в теорії функцій, так і в теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Уточнимо постановку задачі. Нехай задано подвійний ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma_{k_2}} a_{k_1,k_2} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 , \tag{5}$$

де $\gamma_{k_2} = 1$ при $k_2 = 0$, $\gamma_{k_2} = 0$ при $k_2 \neq 0$, коефіцієнти якого задовольняють умову

$$a_k = a_{k_1,k_2} \to 0, \quad k_1 + k_2 \to \infty , \tag{6}$$

і є квазіопуклими, тобто

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 \left| \Delta^{2,2} a_{k_1,k_2} \right| < \infty , \tag{7}$$

де

$$\Delta^{1,0} a_{k_1,k_2} = a_{k_1,k_2} - a_{k_1+1,k_2}, \quad \Delta^{0,1} a_{k_1,k_2} = a_{k_1,k_2} - a_{k_1,k_2+1}, \quad \Delta^{1,1} a_{k_1,k_2} = \Delta^{1,0} \left(\Delta^{0,1} a_{k_1,k_2} \right),$$

$$\Delta^{2,0} a_{k_1,k_2} = \Delta^{1,0} a_{k_1,k_2} - \Delta^{1,0} a_{k_1+1,k_2} , \quad \Delta^{0,2} a_{k_1,k_2} = \Delta^{0,1} a_{k_1,k_2} - \Delta^{0,1} a_{k_1,k_2+1} ,$$

$$\Delta^{2,2} a_{k_1,k_2} = \Delta^{1,1} \left(\Delta^{1,1} a_{k_1,k_2} \right).$$

У статті [2] С. О. Теляковський показав, що при виконанні умов (6) і (7) ряд (5) збігається за Принсхеймом (див. [3]) на $(0, \pi] \times (0, \pi]$ до функції $h(x) = h(x_1, x_2)$, тобто

$$\lim_{\min(n_1,n_2) \to \infty} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma_{k_2}} a_{k_1,k_2} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 := h(x_1, x_2).$$

Збіжність цього ряду є рівномірною на $T_\varepsilon^2 := [\varepsilon_1, \pi] \times [\varepsilon_2, \pi]$ при будь-яких $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, а його сума є неперервно диференційовною на $(0, \pi] \times (0, \pi]$.

Отже, основна задача полягає в оцінюванні інтегралів від $\left|\dfrac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|$, взятих по множинах $P_{l,m} := \left[\dfrac{\pi}{m_1+1}, \dfrac{\pi}{l_1}\right] \times \left[\dfrac{\pi}{m_2+1}, \dfrac{\pi}{l_2}\right]$, $l_i, m_i \in N$, $1 \le l_i \le m_i$, $i = 1, 2$, у термінах символів O від виразів, що визначаються лише за допомогою коефіцієнтів a_k ряду (5) і параметрів l_i, m_i, $i = 1, 2$ (див. теорему 1 і наслідок 1). Похідною даної задачі є задача про відповідну оцінку варіації в сенсі Харді – Віталі функції h на множинах $P_{l,m}$ (див. наслідок 2).

Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти ряду* (5) *задовольняють умови* (6) *і* (7), *то має місце оцінка*

$$\iint\limits_{P_{l\,m}} \left|\frac{\partial^2 h(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| dx_1 dx_2 = O(\gamma_{l,m}), \tag{8}$$

де

$$\gamma_{l,m} := \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \frac{k_1+1}{l_1} \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2} \left|\Delta^{1,0} \alpha_{k_1,k_2}\right| + \sum_{k_1=l_1}^{\infty} \min(k_1+1-l_1, m_1+1-l_1) \times$$

$$\times \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2} \left|\Delta^{2,0} \alpha_{k_1,k_2}\right| + \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \frac{m_2+1-l_2}{m_2} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \frac{(k_1+1)}{l_1} \frac{k_2^2}{l_2^2} \left|\Delta^{1,1} \alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+ \sum_{k_1=l_1}^{\infty} \min(k_1+1-l_1, m_1+1-l_1) \sum_{k_2=0}^{l_2-1} \frac{k_2^2}{l_2^2} \frac{m_2+1-l_2}{m_2} \left|\Delta^{2,1} \alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+ \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \sum_{k_1=0}^{l_1-1} \frac{k_1+1}{l_1} \sum_{k_2=l_2}^{\infty} \min(k_2+1-l_2, m_2+1-l_2) \left|\Delta^{1,2} \alpha_{k_1,k_2}\right| +$$

$$+ \sum_{k_1=l_1}^{\infty} \min(k_1+1-l_1, m_1+1-l_1) \sum_{k_2=l_2}^{\infty} \min(k_2+1-l_2, m_2+1-l_2) \left|\Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2}\right|,$$

$$u_{k_2} := \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2} \operatorname{ctg} \frac{x_2}{2}\, dx_2 = \ln \frac{\sin \dfrac{\pi}{2k_2}}{\sin \dfrac{\pi}{2(k_2+1)}},$$

$$l_i, m_i \in N, \quad 1 \le l_i \le m_i, \quad i = 1, 2.$$

2. Допоміжні твердження. Базовою в доведенні теореми 1 є теорема 2 (див. нижче) про зображення функції $\dfrac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}$ у вигляді спеціального функціонального ряду з коефіцієнтами, що визначаються на основі послідовності $\alpha_{k_1,k_2} := k_1 k_2 a_{k_1,k_2}$, $k_i \in N$, $i = 1,2$.

Нам будуть потрібні деякі властивості цих послідовностей.

Лема 1 [7]. *Якщо числа* a_{k_1,k_2} *задовольняють умову*

$$\Delta^{1,1} a_{k_1,k_2} \to 0, \quad k_1 + k_2 \to \infty, \tag{9}$$

то наступні співвідношення є еквівалентними:

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} k_1 k_2 \left|\Delta^{2,2} a_{k_1,k_2}\right| < \infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty} \left|\Delta^{2,2} \alpha_{k_1,k_2}\right| < \infty. \tag{11}$$

Лема 2 [7]. *Якщо послідовність* $\{a_{k_1,k_2}\}$ *задовольняє умови* $a_{k_1,k_2} \to 0$ *при* $k_1 + k_2 \to \infty$ *і квазіопукла по кожній змінній, тобто*

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 \left|\Delta^{2,2} a_{k_1,k_2}\right| < \infty,$$

то

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \Delta^{1,1}\alpha_{n_1,n_2} = 0,$$

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \left|\Delta^{1,2}\alpha_{n_1,k_2}\right| = 0,$$

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,n_2}\right| = 0.$$

Тепер нехай $D_j(x) = \dfrac{1}{2} + \sum_{l=1}^{j} \cos lx$ — ядро Діріхле і

$$F_k(x) := \sum_{j=1}^{k} D_j(x) = \frac{\sin^2 (k+1)\dfrac{x}{2}}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}},$$

$$\varphi_k(x) := -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \tilde{D}_k(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \sum_{l=1}^{k}\sin lx = -\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\psi_k(x) := \sum_{k=0}^{m}\varphi_k(x) = -\frac{\sin(m+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Теорема 2. *Якщо коефіцієнти ряду* (5) *задовольняють умови* (6) *і* (7), *то для мішаної похідної від суми цього ряду має місце зображення*

$$\frac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2), \qquad x_i \in T_\varepsilon^2, \quad i=1,2. \tag{12}$$

Доведення. При вказаних умовах ряд (5) збігається рівномірно в довільному прямокутнику T_ε^2, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ [2]. Тому послідовність $(C,1)$-середніх цього ряду

$$\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2) := \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}2^{-\gamma_{k_2}}\left(1-\frac{k_1}{n_1+1}\right)\left(1-\frac{k_2}{n_2+1}\right)a_{k_1,k_2}\sin k_1x_1\cos k_2x_2,$$

де $\gamma_{k_2}=1$ при $k_2=0$, $\gamma_{k_2}=0$ при $k_2\neq 0$, також збігається рівномірно до функції $h(x_1,x_2)$ на T_ε^2 [8]. Отже, для доведення теореми достатньо показати, що послідовність $\dfrac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}$ збігається рівномірно на T_ε^2 до функції, що міститься у правій частині (12).

Позначимо

$$\beta_{k_1,k_2} = \left(1-\frac{k_1}{n_1+1}\right)\left(1-\frac{k_2}{n_2+1}\right)\alpha_{k_1,k_2}, \qquad k_i = \overline{0,n_i+1}, \quad i=1,2.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\beta_{k_1,k_2}\cos k_1x_1\sin k_2x_2.$$

Застосовуючи двічі перетворення Абеля по кожній змінній до цього виразу, знаходимо

$$\frac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) - \sum_{k_1=0}^{n_1-1}\Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2) -$$

$$-\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2}F_{n_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-\frac{n_1n_2}{(n_1+1)(n_2+1)}a_{n_1,n_2}F_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2).$$

Враховуючи значення $\Delta^{2,2}\beta_{k_1,k_2}$, $\Delta^{2,1}\beta_{k_1,n_2}$, $\Delta^{1,2}\beta_{n_1,k_2}$ [5], записуємо вираз для $\dfrac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}$:

$$\frac{\partial^2\sigma_{n_1,n_2}(h,x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)+R_{n_1,n_2}(x_1,x_2), \tag{13}$$

де

$$R_{n_1,n_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_1\,\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)+$$

$$+\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\,\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{1}{n_1+1}\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_1k_2\,\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)+$$

$$+\frac{2}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_1\,\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2+1}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)+$$

$$+\frac{2}{n_1+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\,\Delta^{1,2}\alpha_{k_1+1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{4}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{k_1+1,k_2+1}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{1}{n_2+1}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,n_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)+$$

$$+\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}k_1\,\Delta^{2,0}\,\alpha_{k_1,n_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)-$$

$$-\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\Delta^{1,0}\,\alpha_{k_1+1,n_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)-$$

$$-\frac{1}{n_1+1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{0,2}\,\alpha_{n_1,k_2}F_{n_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)+$$

$$+\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}k_2\,\Delta^{0,2}\,\alpha_{n_1,k_2}F_{n_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{2}{(n_1+1)(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\Delta^{0,1}\,\alpha_{n_1,k_2+1}F_{n_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)-$$

$$-\frac{n_1n_2}{(n_1+1)(n_2+1)}a_{n_1,n_2}F_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2).$$

Оскільки умова (10) еквівалентна умові (11) (див. лему 1), то ряд

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\Delta^{2,2}\,\alpha_{k_1,k_2}F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)$$

збігається рівномірно на T_ε^2. Для доведення (12) достатньо показати, що при $n_1+n_2\to\infty$ всі функції $R_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$ прямують до нуля рівномірно на T_ε^2. Враховуючи, що для функцій $F_{k_1}(x_1)$, $\psi_{k_2}(x_2)$ на T_ε^2 справджуються оцінки

$$\left|F_{k_1}(x_1)\right|\le\frac{C}{x_1^2},\qquad\left|\psi_{k_2}(x_2)\right|\le\frac{C}{x_2^2},$$

одержуємо, що $\left|R_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\right|\to 0$ при $n_1+n_2\to\infty$.

На підставі викладеного вище із (13) випливає (12).

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 1.** Спочатку виконаємо певні перетворення правої частини рівності (12). Неважко показати, що для довільних $k_j\in N$, $j=1,2$, справджуються рівності

$$\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,2}\,\alpha_{i_1,i_2}F_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2)\;=$$

$$= \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2} D_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) - \sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{1,1}\alpha_{k_1,i_2} F_{k_1-1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) -$$

$$- \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \Delta^{1,1}\alpha_{i_1,k_2} D_{i_1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2) + \Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2} F_{k_1-1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2),$$

$$\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2} F_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2} D_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) - \sum_{i_2=k_2}^{\infty} \Delta^{1,2}\alpha_{k_1,i_2} F_{k_1-1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2),$$

$$\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2} F_{i_1}(x_1)\psi_{i_2}(x_2) =$$

$$= \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2} F_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) - \sum_{i_1=k_1}^{\infty} \Delta^{2,1}\alpha_{i_1,k_2} F_{i_1}(x_1)\psi_{k_2-1}(x_2),$$

а отже,

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2} F_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2} D_{i_1}(x_1)\varphi_{i_2}(x_2) +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2} D_{i_1}(x_1)\big(\psi_{i_2}(x_2) - \psi_{k_2-1}(x_2)\big) +$$

$$+ \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2} \varphi_{i_2}(x_2)\big(F_{i_1}(x_1) - F_{k_1-1}(x_1)\big) +$$

$$+ \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\big(F_{i_1}(x_1) - F_{k_1-1}(x_1)\big)\big(\psi_{i_2}(x_2) - \psi_{k_2-1}(x_2)\big). \qquad (14)$$

Із (12) і (14), використовуючи означення φ_i, отримуємо

$$\frac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2} = -\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2} D_{i_1}(x_1)\left(-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} + \tilde{D}_{i_2}(x_2)\right) -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}D_{i_1}(x_1)\Big(\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\Big)-$$

$$-\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}+\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right)\Big(F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\Big)-$$

$$-\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\Big(F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\Big)\Big(\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}D_{i_1}(x_1)-\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}D_{i_1}(x_1)\tilde{D}_{i_2}(x_2)-$$

$$-\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}D_{i_1}(x_1)\Big(\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\Big)-$$

$$-\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\Big(F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\Big)\tilde{D}_{i_2}(x_2)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\Big(F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\Big)-$$

$$-\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\Big(F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\Big)\Big(\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\Big).$$

Тепер перейдемо до оцінювання інтеграла $\sigma := \iint_{P_{l\,m}}\left|\dfrac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|dx_1\,dx_2$. Спочатку запишемо його у вигляді

$$\sigma = \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\iint_{P_{k_1\,k_2}}\left|\frac{\partial^2 h\big(x_1,x_2\big)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|dx_1\,dx_2 =: \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}I_{k_1,k_2},$$

де

$$P_{k_1,k_2} = \left\{(x_1,x_2): \frac{\pi}{k_i+1}\le x_i\le\frac{\pi}{k_i},\ \ i=1,2\right\}.$$

Тоді

$$I_{k_1,k_2} \le \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \left|\Delta^{1,0}\alpha_{i_1,k_2}\right| \left|D_{i_1}(x_1)\right| dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \left|\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\right| \left|D_{i_1}(x_1)\right| \left|\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \left|\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\right| \left|D_{i_1}(x_1)\right| \left|\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \left|\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\right| \left|F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\right| \left|\tilde{D}_{i_2}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} \sum_{i_1=k_1}^{\infty} \left|\Delta^{2,0}\alpha_{i_1,k_2}\right| \left|F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\right| dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \iint\limits_{P_{k_1 k_2}} \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \left|\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\right| \left|F_{i_1}(x_1)-F_{k_1-1}(x_1)\right| \left|\psi_{i_2}(x_2)-\psi_{k_2-1}(x_2)\right| dx_1\, dx_2 .$$

Застосовуючи до інтегралів від ядер $D_{i_j}(x_j)$, $F_{i_j}(x_j)$, $\tilde{D}_{i_j}(x_j)$ і $\psi_{i_j}(x_j)$, $j = 1,2$, оцінки

$$\left|D_i(x)\right| < i+1, \qquad 0 \le \left|F_i(x)\right| \le \frac{C}{x^2}, \qquad \left|\tilde{D}_i(x)\right| = \left|\sum_{s=1}^{i}\sin sx\right| \le i^2 x, \qquad 0 \le \left|\psi_i(x)\right| \le \frac{C}{x^2},$$

одержуємо

$$I_{k_1,k_2} \le \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \left|\Delta^{1,0}\alpha_{i_1,k_2}\right| (i_1+1) \int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1} \int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2} \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \left|\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\right| (i_1+1)\, i_2^2 \int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1} \int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2} x_2\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty} \left|\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\right| (i_1+1) \int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1} \int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2} \frac{C}{x_2^2}\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ \sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1} \left|\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\right| i_2^2 \int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1} \frac{C}{x_1^2}\, dx_1 \int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2} x_2\, dx_2 +$$

$$+\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|\int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1}\frac{C}{x_1^2}\,dx_1\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2}\,dx_2+$$

$$+\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|\int\limits_{\pi/(k_1+1)}^{\pi/k_1}\frac{C}{x_1^2}\,dx_1\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}\frac{C}{x_2^2}\,dx_2.$$

Отже,

$$\sigma := \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}I_{k_1,k_2} \le \sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|(i_1+1)\frac{C}{k_1(k_1+1)}u_{k_2}+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|(i_1+1)i_2^2\frac{C}{k_1(k_1+1)}\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}x_2\,dx_2+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}\left|\Delta^{1,2}\alpha_{i_1,i_2}\right|(i_1+1)\frac{C}{k_1(k_1+1)}+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2-1}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{i_1,i_2}\right|i_2^2C\int\limits_{\pi/(k_2+1)}^{\pi/k_2}x_2\,dx_2+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{i_1,k_2}\right|Cu_{k_2}+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\sum_{i_1=k_1}^{\infty}\sum_{i_2=k_2}^{\infty}C\left|\Delta^{2,2}\alpha_{i_1,i_2}\right| := \sum_{s=1}^{6}\sigma_{l,m}^{s}. \tag{15}$$

Оцінимо величини $\sigma_{l,m}^{s}$, $s=\overline{1,6}$:

$$\sigma_{l,m}^{1} \le C\left(\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{k_1+1}{l_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min(k_1+1-l_1,\,m_1+1-l_1)\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_2}\right), \tag{16}$$

$$\sigma_{l,m}^{2} \le C\left(\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{(k_1+1)}{l_1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\right|+\right.$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\,\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right|+$$

$$+\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1+1}{l_1}\,\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|+$$

$$\left.+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right), \qquad (17)$$

$$\sigma_{l,m}^3 \le C\left(\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1+1}{l_1}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_2,k_2}\right|\right), \qquad (18)$$

$$\sigma_{l,m}^4 \le C\left(\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\right), \qquad (19)$$

$$\sigma_{l,m}^5 \le C\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{m_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|u_{k_2}, \qquad (20)$$

$$\sigma_{l,m}^6 \le C\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,\, m_1+1-l_1\right)\times$$

$$\times\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,\, m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|. \qquad (21)$$

Об’єднуючи співвідношення (15) – (21), отримуємо

$$\sigma = \int_{\pi/(m_1+1)}^{\pi/l_1}\int_{\pi/(m_2+1)}^{\pi/l_2}\left|\frac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1\,\partial x_2}\right|dx_1\,dx_2 = O\left(\gamma_{l,m}\right).$$

Теорему доведено.

Наведемо наслідки з оцінки (8), залишкові члени яких містять лише другі різниці послідовності $\left\{\alpha_{k_1,k_2}\right\}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай числа* a_{k_1,k_2} *задовольняють умови* (6) *і* (7). *Тоді справджується оцінка*

$$\iint\limits_{P_{l\,m}} \left| \frac{\partial^2 h(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right| dx_1\, dx_2 =$$

$$= O\Bigg(\frac{m_1+1-l_1}{m_1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \min\left(\frac{(k_1+1)^2}{l_1}, (k_1+1), m_1 \right) \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2} \left| \Delta^{2,0}\, \alpha_{k_1,k_2} \right| +$$

$$+ \frac{m_1+1-l_1}{m_1} \frac{m_2+1-l_2}{m_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \min\left(\frac{(k_1+1)^2}{l_1}, (k_1+1), m_1 \right) \times$$

$$\times \sum_{k_2=0}^{\infty} \min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2}, k_2, m_2 \right) \left| \Delta^{2,2}\, \alpha_{k_1,k_2} \right| \Bigg).$$

Оскільки в умовах теореми 1 функція $h(x_1,x_2)$ на $T_\varepsilon^2 := [\varepsilon_1,\pi]\times[\varepsilon_2,\pi]$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2 > 0$ має неперервні похідні, то теорему 1 можна переформулювати в термінах оцінки варіації по Харді – Віталі функції $h(x_1,x_2)$ на множині $P_{l,m} = \left[\frac{\pi}{m_1+1}, \frac{\pi}{l_1} \right] \times \left[\frac{\pi}{m_2+1}, \frac{\pi}{l_2} \right]$, $l_i, m_i \in N$, $1 \le l_i \le m_i$, $i = 1,2$.

Означення. *Функція* $f(x,y)$, *визначена на прямокутнику* $\Pi_{a,b} = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, *називається функцією обмеженої варіації в сенсі Харді – Віталі, якщо вона є функцією обмеженої варіації на відповідних відрізках* $[a_i,b_i]$ *по кожній із змінних при фіксованих значеннях іншої змінної і для довільних* $l,m \in N$ *і* $(x_i,y_k)\in\Pi_{a,b}$, $i = \overline{1,l}$, $k = \overline{1,m}$,

$$V_{l,m}\left(f,\Pi_{a,b}\right) := \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} \left| f(x_{i+1},y_{k+1}) - f(x_{i+1},y_k) - f(x_i,y_{k+1}) + f(x_i,y_k) \right| < \infty.$$

Величина $V\left(f,\Pi_{a,b}\right) = \sup_{l,m} V_{l,m}\left(f,\Pi_{a,b}\right)$ *називається варіацією* (*в сенсі Харді – Віталі*) *функції* f *на прямокутнику* $\Pi_{a,b}$.

***Наслідок* 2.** *Нехай послідовність* $\{\alpha_{k_1,k_2}\}$ *квазіопукла і така, що* $\alpha_{k_1,k_2} \to 0$, $k_1 + k_2 \to \infty$. *Тоді для варіації по Харді – Віталі функції* $h(x_1,x_2)$ *на* $P_{l,m}$ *справджується оцінка*

$$V\left(h,P_{l,m}\right) = O\left(\frac{m_1+1-l_1}{m_1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \min\left(\frac{(k_1+1)^2}{l_1}, (k_1+1), m_1 \right) \sum_{k_2=l_2}^{m_2} u_{k_2} \left| \Delta^{2,0}\, \alpha_{k_1,k_2} \right| + \right.$$

$$+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\min\left(\frac{(k_1+1)^2}{l_1},(k_1+1),m_1\right)\times$$

$$\times\sum_{k_2=0}^{\infty}\min\left(\frac{k_2^3}{l_2^2},k_2,m_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|\Bigg)$$

з абсолютними сталими в залишкових членах.

Література

1. *Теляковский С. А.* Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1995. – **186**. – С. 111 – 122.
2. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63**. – С. 426 – 444.
3. *Жижиашвили Л. В.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1969. – 102 с.
4. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**. – С. 28 – 84.
5. *Гембарская С. Б.* Оценки вариации функций, заданных двойными тригонометрическими рядами по косинусам // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 733 – 749.
6. *Гембарська С. Б., Задерей П. В.* Про абсолютну збіжність степеневих рядів // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 594 – 602.
7. *Гембарская С. Б., Задерей П. В.* Оценки вариации по Харди – Витали функций, заданных кратными тригонометрическими рядами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Праці Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 56 – 71.
8. *Подкорытов А. Н.* Средние Фейера в двумерном случае // Вести Ленингр. ун-та. – 1978. – № 13. – С. 32 – 39.

Одержано 27.10.15