УДК 517.958

А. Р. Алиев (Азерб. гос. ун-т нефти и промышленности, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку),
Э. Х. Эйвазов (Бакин. гос. ун-т, Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

We prove the existence of wave operators for the multidimensional electromagnetic Schrödinger operator in divergent form by the Cook method. Moreover, under certain conditions on the coefficients of the given operator, we establish the isometry of its wave operators and determine the initial domains of these operators.

Методом Кука доведено існування хвильових операторів для багатовимірного електромагнітного оператора Шредінгера у дивергентній формі. Крім того, при певних умовах на коефіцієнти даного оператора встановлено ізометричність його хвильових операторів. При цьому знайдено початкові області цих операторів.

1. Введение. Рассмотрим в пространстве $L_2(R_n),\ n \geq 3$, электромагнитное выражение Шредингера в дивергентной форме

$$H(a;b;c) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j(x)\right) a_{jk}(x) \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k} + b_k(x)\right) + c(x), \tag{1}$$

где $i = \sqrt{-1},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n,\ a(x) = (a_{jk}(x))_{1\leq j,k\leq n}$ — матрица-функция, $b(x) = \big(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)\big)$ — магнитный потенциал, $c(x)$ — вещественный электрический потенциал.

Предположим, что коэффициенты $a_{jk}(x),\ b_j(x),\ j,k = 1,2,\ldots,n$, и $c(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

условию A:

a$_1$) $a(x) = \big(a_{jk}(x)\big)_{1\leq j,k\leq n}$ — симметрично вещественная матрица-функция,

a$_2$) для каждого $x \in R_n$ $a(x)$ — положительно определенная матрица (условие эллиптичности),

a$_3$) $a_{jk}(x) \in C^{(2)}(R_n),\ j,k = 1,2,\ldots,n,$

a$_4$) $\dfrac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_j} \in L_\infty(R_n),\ j,k = 1,2,\ldots,n,$

a$_5$) $\lim_{|x|\to+\infty}\left\{\sup_{\omega\in S_{n-1}} |a_{jk}(x) - \delta_{jk}|\right\} = 0,\ j,k = 1,2,\ldots,n,$ где S_{n-1} — единичная сфера в $R_n,\ x = |x|\,\omega,\ \delta_{jk}$ — символ Кронекера;

условию B:

b$_1$) $b_j(x),\ j = 1,2,\ldots,n,$ — вещественнозначные функции в R_n,

b$_2$) $b_j(x) \in C^{(1)}(R_n),\ j = 1,2,\ldots,n,$

b$_3$) $\dfrac{\partial b_k(x)}{\partial x_j} \in L_\infty(R_n),\ j,k = 1,2,\ldots,n;$

условию C:

$$c(x) \in \begin{cases} L_2(R_n) + L_\infty(R_n), & n = 3, \\ L_p(R_n) + L_\infty(R_n),\ p > \dfrac{n}{2}, & n \geq 4. \end{cases}$$

При условиях A – C выражение $H(a;b;c)$ корректно определено в $C_0^\infty(R_n)$ $\big($множестве всех комплекснозначных функций из $C^\infty(R_n)$ с компактным носителем в R_n $\big)$ и порождает неограниченный симметрический оператор в $L_2(R_n)$. Для физиков существенная самосопряженность этого оператора является начальной точкой любого дальнейшего исследования соответствующей квантовой системы, в которой этот оператор используется в качестве гамильтониана (см., например, [1, 2]).

Обозначим замыкание симметрического оператора $H_0(a;b;c)$ с областью определения $\mathrm{Dom}(H_0(a;b;c)) = C_0^\infty(R_n)$, порожденного эллиптическим дифференциальным выражением (1), через H. Будем называть его электромагнитным оператором Шредингера в дивергентной форме. Замыкание же оператора $-\Delta$ в $C_0^\infty(R_n)$ обозначим через H_0. Очевидно, что H_0 является самосопряженным абсолютно непрерывным оператором с областью определения $W_2^2(R_n)$ (пространство Соболева). В работе [3] доказаны самосопряженность оператора H и совпадение его области определения с $W_2^2(R_n)$. Отметим, что совпадение области определения этих операторов играет важную роль при исследовании задачи теории рассеяния.

Рассмотрим однопараметрические группы e^{-itH}, $e^{-itH_0} \equiv e^{it\Delta}$, порожденные операторами $-iH$, $-iH_0 \equiv i\Delta$ соответственно, и однопараметрическое семейство унитарных операторов $W(t) = e^{itH}e^{it\Delta}$, $-\infty < t < +\infty$. Нас интересует асимптотическое поведение семейства $\{W(t)\}$ при $t \to \pm\infty$, которое важно для физических приложений, поскольку $W(t)$ используется для описания движения квантово-механической системы в так называемом представлении взаимодействия. Сильные пределы $W_\pm$ семейства $\{W(t)\}$ при $t \to \pm\infty$, если они существуют, называются волновыми операторами, соответствующими паре (H, H_0), а $S = W_+^* W_-$ называется оператором рассеяния. Они являются основными величинами в теории рассеяния.

В настоящей работе для электромагнитного оператора Шредингера в дивергентной форме мы исследуем вопросы существования его волновых операторов.

2. Теорема о существовании волновых операторов и вспомогательные утверждения. Для доказательства существования волновых операторов будем использовать метод Кука, который заключается в следующем.

Предложение (метод Кука) (см. [4, с. 31], теорема XI.4 или [5, с. 659], теорема 3.7)**.** *Пусть A и B — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве E. Предположим, что существует множество*

$$D \subset \mathrm{Dom}(B) \cap P_{ac}(B)E,$$

которое плотно в $P_{ac}(B)E$ так, что для любого $\varphi \in D$ найдется T_0, удовлетворяющее условиям:

(a) $e^{-iBt}\varphi \in \mathrm{Dom}(A)$ *при* $|t| > T_0$,

(b) $\displaystyle\int_{T_0}^{+\infty} \Big[\|(B-A)e^{-iBt}\varphi\| + \|(B-A)e^{iBt}\varphi\|\Big]dt < +\infty.$

Тогда $W_\pm := W_\pm(A,B)$ существуют.

Здесь под обозначением $P_{ac}(B)E$ понимается абсолютно непрерывное подпространство оператора B, а $P_{ac}(B)$ — проектор на это подпространство оператора B.

Поскольку волновые операторы существуют лишь при довольно сильных ограничениях, на коэффициенты $a_{jk}(x),\ j,k = 1,2,\ldots,n,\ b_k(x),\ k = 1,2,\ldots,n,$ и $c(x)$, удовлетворяющие условиям A – C, необходимо накладывать еще дополнительные условия. Чтобы сформулировать эти условия, как и в [6], представим разность $H - H_0$ в виде

$$H - H_0 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \tag{2}$$

где операторы $A_1,\ A_2,\ A_3$ и A_4 порождаются выражениями

$$\ell_{A_1} := \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(x) D_j D_k, \qquad \alpha_{jk}(x) = a_{jk}(x) - \delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\ell_{A_2} := \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x) D_j, \qquad \beta_j(x) = \sum_{k=1}^{n} D_k a_{jk}(x) + 2\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x) b_k(x), \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

$$\ell_{A_3} := \gamma(x) = \sum_{j,k=1}^{n} D_j \left(a_{jk}(x) b_k(x)\right) + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) b_j(x) b_k(x)$$

и

$$\ell_{A_4} := c(x)$$

соответственно. Здесь $D_m := \dfrac{\partial}{\partial x_m}$.

Условие D:

для некоторого положительного числа h выполняются

d$_1$) $\displaystyle\int_{R_n} \left(1 + |x|\right)^{2-n+h} \left|\alpha_{jk}(x)\right|^2 dx < +\infty,\ j,k = 1,2,\ldots,n,$

d$_2$) $\displaystyle\int_{R_n} \left(1 + |x|\right)^{2-n+h} \left|\beta_j(x)\right|^2 dx < +\infty,\ j = 1,2,\ldots,n,$

d$_3$) $\displaystyle\int_{R_n} \left(1 + |x|\right)^{2-n+h} \left|\gamma(x)\right|^2 dx < +\infty,$

d$_4$) $c(x) \in L_p(R_n),\ p < n.$

Теорема. *Пусть выполняются условия* A – D. *Тогда* $W_\pm$ *существуют и являются частично изометрическими операторами с начальным пространством* $L_2(R_n)$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для любого положительного числа* σ *множество*

$$D = \left\{ e^{-\sigma|x-a|^2} \right\}_{a \in R_n}$$

всюду плотно в $L_2(R_n)$, *где* $|x - a|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2$.

Доказательство. Пусть существует функция $g(x)$ из $L_2(R_n)$ такая, что для любого $a \in R_n$

$$\int_{R_n} g(x) e^{-\sigma|x-a|^2} dx = 0.$$

Тогда по равенству Парсеваля имеем

$$\int\limits_{R_n} \tilde{g}(p) \left[\int\limits_{R_n} e^{-\sigma|x-a|^2} e^{i(p,x)} dx \right] dp = 0,$$

где $\tilde{g}(p)$ — преобразование Фурье функции $g(x)$, а $(p,x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$. Элементарные вычисления показывают, что для любого $a \in R_n$

$$\left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{n/2} \int\limits_{R_n} \left[\tilde{g}(p) e^{-\frac{|p|^2}{4\sigma}} \right] e^{i(p,a)} dp = 0,$$

где $|p|^2 = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2$. Отсюда следует, что $\tilde{g}(p) e^{-\frac{|p|^2}{4\sigma}} = 0$ почти всюду, следовательно, $g(x) = 0$ в $L_2(R_n)$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого положительного числа* s

$$\sup_{0 \le r < +\infty} \left\{ r^m e^{-\frac{r^2}{2s}} \right\} = \begin{cases} (sm)^{m/2} e^{-m/2}, & m > 0, \\ 1, & m = 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы тривиально. Отметим, что эта лемма ранее использовалась в работах [5, с. 662; 6].

Лемма 3. *Для любого положительного числа* σ *и любого натурального* n *справедливо*

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \frac{e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}}{(1+4t\sigma i)^{n/2}}, \tag{3}$$

где Γ *— эйлеров интеграл первого рода.*

Доказательство. Учитывая, что $e^{it\Delta}$ является интегральным оператором с ядром $\dfrac{e^{i\frac{|x-a|^2}{4t}}}{(4\pi i t)^{n/2}}$, имеем

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int\limits_{R_n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} e^{-\sigma|y-a|^2} dy = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int\limits_{R_n} e^{-\sigma|\eta|^2} e^{i\frac{|\eta-(x-a)|^2}{4t}} d\eta.$$

Направляя ось η_n в направлении вектора $x-a$ и переходя от переменных η к полярным координатам, получаем

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}} \sigma_{n-1}}{(4\pi i t)^{n/2}} \int\limits_0^{+\infty} \left\{ \int\limits_0^{\pi} e^{i\frac{r|x-a|}{2t}\cos\varphi_1} \sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 \right\} r^{n-1} e^{-\sigma r^2 + i\frac{r^2}{4t}} dr, \tag{4}$$

где σ_{n-1} — площадь поверхности единичной сферы в R_{n-1}. Переходя к новым переменным $k = \dfrac{r|x-a|}{2t}$, $\cos\varphi_1 = \xi$, приводим внутренний интеграл в (4) к виду

$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{r|x-a|}{2t}\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 = \int_{-1}^{1}(1-\xi)^{(n-1)/2-1}(1+\xi)^{(n-1)/2-1}e^{-ik\xi}d\xi.$$

Используя формулу (см. [7, с. 335], формула 3.387, 2)

$$\int_{-1}^{1}(1-\xi)^{\frac{n-1}{2}-1}(1+\xi)^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-ik\xi}d\xi = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{-k}\right)^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)J_{\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}}(-k),$$

где J_ν — функция Бесселя порядка ν, имеем

$$\int_0^{\pi} e^{-\frac{r|x-a|}{2t}\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 =$$

$$= (-1)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{n-2}\frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{\big(r|x-a|\big)^{\frac{n-2}{2}}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(-\frac{r|x-a|}{2t}\right). \tag{5}$$

Используя формулы (4) и (5), получаем

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) = \frac{\sigma_{n-1}(-1)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)t^{\frac{n-2}{2}}}{|x-a|^{\frac{n-2}{2}}(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}}e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)r^2}J_{\frac{n-2}{2}}\left(-\frac{r|x-a|}{2t}\right)dr. \tag{6}$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}}e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)r^2}J_{\frac{n-2}{2}}\left(-\frac{r|x-a|}{2t}\right)dr.$$

Обозначая $z = -\dfrac{r|x-a|}{2t}$, имеем

$$\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}}e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)r^2}J_{\frac{n-2}{2}}\left(-\frac{r|x-a|}{2t}\right)dr =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2t}{|x-a|}\right)^{\frac{n}{2}+1}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)\frac{4t^2}{|x-a|^2}z^2}z^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(z)\,dz. \tag{7}$$

Учитывая (7) в (6), находим

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1}\sqrt{\pi}(-1)^{n-1}2^{\frac{3n-2}{2}}t^n}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}|x-a|^n}e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)\left(\frac{2tz}{|x-a|}\right)^2} z^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(z)\,dz. \tag{8}$$

Обозначая $\alpha = \left(\sigma - i\dfrac{1}{4t}\right)\frac{4t^2}{|x-a|^2}$ и $\nu = \dfrac{n}{2} - 1$, имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)\frac{4t^2}{|x-a|^2}z^2} z^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(z)dz = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha z^2}z^{\nu+1}J_\nu(z)dz. \tag{9}$$

Используя формулу (см. [7, с. 731], формула 6.631, 4)

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}x^{\nu+1}J_\nu(\beta x)dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},$$

записываем равенство (9) в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)\frac{4t^2}{|x-a|^2}z^2} z^{n/2}J_{\frac{n}{2}-1}(z)dz = \frac{1}{\left[2\left(\sigma-i\dfrac{1}{4t}\right)\dfrac{4t^2}{|x-a|^2}\right]^{n/2}}e^{-\frac{|x-a|^2}{4\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)4t^2}}. \tag{10}$$

Согласно формуле (10) равенство (8) принимает вид

$$e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right) =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1}\sqrt{\pi}(-1)^{n-1}2^{\frac{3n-2}{2}}t^n}{(4\pi it)^{n/2}|x-a|^n}e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}\frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{16t^2\left(\sigma-i\frac{1}{4t}\right)}}}{\left[2\left(\sigma-i\dfrac{1}{4t}\right)\dfrac{4t^2}{|x-a|^2}\right]^{n/2}} = \frac{(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}}{2\pi^{(n-1)/2}}\frac{e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}}{(1+4t\sigma i)^{n/2}}. \tag{11}$$

Из формулы (11) и равенства $\sigma_{n-1} = \dfrac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left((n-1)/2\right)}$ получаем равенство (3).

Лемма 3 доказана.

3. Доказательство основного результата. ***Доказательство теоремы.*** Докажем существование W_+ (существование W_- доказывается аналогично). Так как в данном случае оператор $B := -\Delta \equiv H_0$ спектрально абсолютно непрерывен, т. е. $P_{ac}(-\Delta)E = L_2(R_n)$, и области определений операторов $A := H$ и $B := -\Delta$ совпадают с пространством $W_2^2(R_n)$ (см. [3]), из леммы 3 следует, что условие (a) метода Кука выполняется. Докажем, что и условие (b) метода Кука также имеет место. Из представления (2) следует, что для этого достаточно доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \left\| A_m e^{it\Delta} u(x) \right\|_{L_2(R_n)} dt < +\infty \quad \forall u(x) \in D, \quad m = 1, 2, 3, 4. \tag{12}$$

Рассмотрим отдельно каждый из четырех случаев.

1. *Случай* $m = 3$. Из леммы 3 получаем

$$\left| \gamma(x) e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right| \leq M \frac{|\gamma(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}} \frac{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}}}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n}{4}}}, \tag{13}$$

где h — число, содержащееся в условии D, $s = \dfrac{1+16t^2\sigma^2}{2\sigma}$, а M — положительное постоянное число. Отметим, что для обозначения абсолютной положительной постоянной необязательно использование одной и той же буквы, мы используем букву M.

Учитывая получаемое из леммы 2 неравенство

$$|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}} \leq s \left(\frac{n-2-h}{2} \right)^{\frac{n-2-h}{4}} e^{-\frac{n-2-h}{4}}$$

в неравенстве (13), имеем

$$\left| \gamma(x) e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right|^2 \leq M \frac{|\gamma(x)|}{|x-a|^{n-2-h}} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{1+\frac{h}{2}}}. \tag{14}$$

Замечая, что функция $\dfrac{|\gamma(x)|}{|x-a|^{n-2-h}}$ интегрируется и в окрестности точки $x = a$ (в силу условий A–C), и в окрестности бесконечно удаленной точки (в силу условия d_3)), из (14) получаем оценку

$$\left\| A_3 e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right\|_{L_2(R_n)} \leq M \left\{ \int_{R_n} \frac{|\gamma(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}} dx \right\}^{1/2} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\frac{h}{4}}}. \tag{15}$$

Из оценки (15) следует неравенство (12) при $m = 3$.

2. *Случай* $m = 2$. Замечая, что

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right\} = \frac{(-1)^{n-1} 2\sigma i}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2} \right)} \frac{x_j - a_j}{(1+4t\sigma i)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

используя лемму 2, получаем оценки

$$\left| \beta_j(x) D_j \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] \right| \leq \frac{M\,|\beta_j(x)|\,|x-a|^{\frac{n-h}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}}}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}} (1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n+2}{4}}} \leq$$

$$\leq \frac{M\,|\beta_j(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}} \frac{s^{\frac{n-h}{4}}}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n+2}{4}}} \leq \frac{M\,|\beta_j(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\frac{h}{4}}}.$$

Рассуждая, как и в случае 1, имеем

$$\left\| \beta_j(x) D_j \left[e^{it\Delta} (e^{-\sigma|x-a|^2}) \right] \right\|_{L_2(R_n)} \le$$

$$\le M \left\{ \int\limits_{R_n} \frac{|\beta_j(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}} dx \right\}^{1/2} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\frac{h}{4}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Из оценок (16) следует неравенство (12) при $m = 2$.

3. *Случай* $m = 1$. Легко можно убедиться, что

$$D_j^2 \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] = \frac{2\sigma(-1)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)(1+4t\sigma i)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}} -$$

$$- \frac{4\sigma^2(-1)^{n-1}(x_j - a_j)^2}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)(1+4t\sigma i)^{\frac{n+4}{2}}} e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

и

$$D_j D_k \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{4\sigma^2(-1)^{n-1}(x_j - a_j)(x_k - a_k)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)(1+4t\sigma i)^{\frac{n+4}{2}}} e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n, \quad j \ne k. \tag{18}$$

Тогда из представлений (18) получаем

$$\left| \alpha_{jk}(x) D_j D_k \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] \right| \le M \frac{|\alpha_{jk}(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}} \frac{|x-a|^{\frac{2+n-h}{2}}}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n+2}{4}}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}}.$$

Отсюда в силу леммы 3 имеем неравенство

$$\left| \alpha_{jk}(x) D_j D_k \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] \right| \le M \frac{|\alpha_{jk}(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n+4}{4}}} s^{\frac{2+n-h}{2}},$$

из которого следует, что

$$\left| \alpha_{jk}(x) D_j D_k \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] \right|^2 \le M \frac{|\alpha_{jk}(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{2+h}{2}}}.$$

Рассуждая, как и в случае 1, из условий A – D получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \alpha_{jk}(x) D_j D_k \left[e^{it\Delta} \left(e^{-\sigma|x-a|^2} \right) \right] \right\|_{L_2(R_n)} dt \le$$

$$\le M\left\{\int\limits_{R_n}\frac{|\alpha_{jk}(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}}dx\right\}^{1/2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\frac{h}{4}}},\qquad j,k=1,2,\ldots,n,\quad j\ne k.$$

Из представлений (17) имеем

$$\left|\alpha_{jj}(x)D_j^2\left[e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right]\right|\le\left|\alpha_{jj}(x)\frac{2\sigma(-1)^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)(1+4t\sigma i)^{\frac{n+4}{2}}}e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}\right|+$$

$$+\left|\alpha_{jj}(x)\frac{4\sigma^2(-1)^{n-1}(x_j-a_j)^2}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)(1+4t\sigma i)^{\frac{n+4}{2}}}e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}\right|\equiv J_j^{(1)}(x,t)+J_j^{(2)}(x,t),\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Действуя, как и при $j\ne k$, для $J_j^{(2)}(x,t),\ j=1,2,\ldots,n,$ устанавливаем неравенства

$$\int\limits_0^{+\infty}\left\|J_j^{(2)}(x,t)\right\|_{L_2(R_n)}dt\le$$

$$\le M\left\{\int\limits_{R_n}\frac{|\alpha_{jj}(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}}dx\right\}^{1/2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1}{2}+\frac{h}{4}}},\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Используя лемму 2, оцениваем $J_j^{(1)}(x,t),\ j=1,2,\ldots,n$:

$$\left|J_j^{(1)}(x,t)\right|\le M\frac{|\alpha_{jj}(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}}\frac{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n+2}{4}}}\le M\frac{|\alpha_{jj}(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-h}{2}}}\frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{4+h}{2}}}.$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\left\|J_j^{(1)}(x,t)\right\|_{L_2(R_n)}dt\le$$

$$\le M\left\{\int\limits_{R_n}\frac{|\alpha_{jj}(x)|^2}{|x-a|^{n-2-h}}dx\right\}^{1/2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+16t^2\sigma^2)^{1+\frac{h}{2}}},\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) следует неравенство (12) при $m=1$.

4. *Случай* $m=4$. Поскольку случай $n=3$ исследован в [5, с. 661, 662], считаем, что $n>3$. Пусть $\ell>1,\ \tau>1$ и $\dfrac{1}{\ell}+\dfrac{1}{\tau}=1$. Используя лемму 3 и неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\int\limits_{R_n}\left|c(x)e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right|^2dx\le$$

$$\leq M \left\{ \int\limits_{R_n} |c(x)|^{2\ell}\, dx \right\}^{1/\ell} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \int\limits_{R_n} e^{-\frac{2\sigma\tau}{1+16t^2\sigma^2}|x-a|^2} dx \right\}^{1/\tau}. \tag{21}$$

Учитывая равенство

$$\int\limits_{R_n} e^{-\frac{2\sigma\tau}{1+16t^2\sigma^2}|x-a|^2} dx = \left(\frac{\pi}{2\sigma\tau}\right)^{n/2} (1+16t^2\sigma^2)^{n/2},$$

из (21) имеем

$$\int\limits_{R_n} \left| c(x) e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right|^2 dx \leq M \left\{ \int\limits_{R_n} |c(x)|^{2\ell}\, dx \right\}^{1/\ell} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n}{2}\frac{\tau-1}{\tau}}}. \tag{22}$$

Выбирая в (22) $2\ell = p$ и учитывая, что $\dfrac{\tau-1}{\tau} = \dfrac{2}{p}$, из (22) получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| c(x) e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right\|_{L_2(R_n)} dt \leq M\, \|c(x)\|_{L_p(R_n)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n}{2p}}}.$$

Из условия же d_4) следует неравенство (12) при $m = 4$.

Таким образом, и условие (b) метода Кука выполняется. Поэтому первая часть теоремы о существовании волновых операторов $W_\pm$ доказана. Вторая часть теоремы следует из теоремы 3.2 монографии [5, с. 656].

Теорема доказана.

Замечание. Данная теорема для оператора Шредингера установлена Като [5, с. 661, 662] при $n = 3$, $p = 2$, Куком и Хаком [4, с. 65] (теорема XI.24) при $n = 3$, $2 \leq p < 3$, Браунеллом [8] для произвольного n и $p < n$, а для магнитного оператора Шредингера – Икэбе и Тайоси [6] при $n = 3$, $p = 2$. Отметим, что данная работа главным образом инициирована результатами последних двух авторов.

Литература

1. *Браверман М. Ш., Милатович О., Шубин М. А.* Существенная самосопряженность операторов типа Шредингера на многообразиях // Успехи мат. наук. – 2002. – **57**, № 4(346). – С. 3 – 58.
2. *Алиев А. Р., Эйвазов Э. Х.* О существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле // Теор. и мат. физика. – 2011. – **166**, № 2. – С. 266 – 271.
3. *Aliev A. R., Eyvazov E. H.* Description of the domain of definition of the electromagnetic Schrödinger operator in divergence form // Eurasian Math. J. – 2014. – **5**, № 4. – P. 134 – 138.
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: Т. 3. Теория рассеяния. – М.: Мир, 1982. – 443 с.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Ikebe T., Tayoshi T.* Wave and scattering operators for second-order elliptic operators in R^3 // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. Ser. A. – 1968/1969. – **4**. – P. 483 – 496.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – 4-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 1108 с.
8. *Brownell F. H.* A note on Cook's wave-matrix theorem // Pacif. J. Math. – 1962. – **12**, № 1. – P. 47 – 52.

Получено 23.02.16