УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n-ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ (ψ, β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В L_2. II

In the space L_2, we determine the exact values of some n-widths for the classes of functions such that the generalized moduli of continuity of their (ψ, β)-derivatives or their averages with weight do not exceed the values of the majorants Φ satisfying certain conditions. Specific examples of realization of the obtained results are also analyzed.

У просторі L_2 обчислено точні значення деяких n-поперечників класів функцій, у яких узагальнені модулі неперервності (ψ, β)-похідних або їх осереднення з вагою не перевищують значень мажорант Φ, що задовольняють низку умов. Також розглянуто конкретні приклади реалізації отриманих результатів.

Данная статья является продолжением работы [1], поэтому в ней продолжена нумерация теорем, следствий и пунктов, в каждом из которых использована двойная нумерация формул.

5. Точные значения n-поперечников некоторых классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в пространстве L_2. *5.1.* Прежде чем сформулировать дальнейшие результаты, приведем необходимые понятия и определения. Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в L_2, $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2, $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \subset L_2$ — подпространство коразмерности n, $V : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $V^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) = \sup\big\{\sup\{\varepsilon > 0 \colon \varepsilon\mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\big\},$$

$$d_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\big\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathcal{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\big\},$$

$$\delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\big\{\inf\{\sup\{\|f - Vf\| \colon f \in \mathcal{M}\} : VL_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\big\},$$

$$d^n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\big\{\sup\{\|f\| \colon f \in \mathcal{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\big\},$$

$$\Pi_n(\mathcal{M}; L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - V^{\perp}f\| \colon f \in \mathcal{M}\Big\} : V^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками. Поскольку L_2 — гильбертово пространство, указанные величины связаны соотношениями

$$b_n(\mathcal{M}; L_2) \le d^n(\mathcal{M}; L_2) \le d_n(\mathcal{M}; L_2) = \delta_n(\mathcal{M}; L_2) = \Pi_n(\mathcal{M}; L_2). \tag{5.1}$$

Пусть функция γ принадлежит классу G, а функция ξ является неотрицательной непрерывной и не эквивалентной нулю на отрезке $[0, t_*]$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le t_*$. Символом $\mathfrak{N}_{\gamma,p}(\xi, h)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, для которых

$$\int_0^h \omega_\gamma^p(f, t)\xi(t)dt \le \int_0^h \xi(t)dt.$$

Через $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,p}(\xi,h)$ обозначим класс функций $f\in L^{\psi}_{\beta,2}$, у которых (ψ,β)-производные f^{ψ}_{β} принадлежат множеству $\mathfrak{N}_{\gamma,p}(\xi,h)$.

Отметим, что в пространстве L_2 вопросы вычисления точных значений n-поперечников ряда классов (ψ,β)-дифференцируемых 2π-периодических функций, определенных с помощью некоторых характеристик гладкости, рассмотрены в работах [2, 3].

Теорема 3. *Пусть функция γ удовлетворяет свойству А из* [1] (*раздел* 3) *и почти всюду дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$, функция ψ является элементом множества $\mathfrak{M}$ и дифференцируема на множестве $[1,\infty)$ $\big(\psi'(1):=\psi'(1+0)\big)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, $0<h\le t_*/n$, ξ — неотрицательная и почти всюду дифференцируемая на отрезке $[0,h]$ функция $\big(\xi'(0):=\xi'(0+0)$, $\xi'(h):=\xi'(h-0)\big)$, которая не эквивалентна нулю. Если при некотором $\widetilde{p}$, удовлетворяющем неравенству* (4.4) *из* [1], *почти при всех $0\le t\le h$ и любых $1\le x<\infty$ выполнено соотношение* (4.5) *из* [1], *то справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}\big(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h);L_2\big)=\lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h);L_2)=$$

$$=E_{n-1}\big(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\big)=\psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^h\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/\widetilde{p}}, \tag{5.2}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников, рассмотренных выше,

$$E_{n-1}\big(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\big):=\sup\big\{E_{n-1}(f)\colon f\in L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\big\}.$$

Доказательство. Используя следствие 2, где $\tau:=h$, и формулу (3.11) из [1], определение класса $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)$, а также соотношение (5.1), получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h);L_2)\le\lambda_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h);L_2)\le d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h);L_2)\le$$

$$\le E_{n-1}(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h))\le\psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^h\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{5.3}$$

Для получения оценок снизу рассмотрим шар

$$\mathbb{B}_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathfrak{N}^{\top}_{2n+1}\colon\|T_n\|\le\psi(n)\left(\frac{\displaystyle\int_0^h\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right)^{1/\widetilde{p}}\right\}.$$

Для произвольного полинома n-го порядка T_n, используя формулу (2.6) из [1] и учитывая, что γ удовлетворяет свойству А, при $0<t\le t_*/n$ имеем

$$\omega_\gamma\big((T_n)^\psi_\beta, t\big) =$$

$$= \sup\left\{ \left(\sum_{j=1}^n \rho_j^2\big((T_n)^\psi_\beta\big)\gamma(jh) \right)^{1/2} : 0 < h \le t \right\} \le \gamma^{1/2}(nt) \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\psi^2(j)} \rho_j^2(T_n) \right\}^{1/2},$$

т. е.

$$\omega_\gamma\big((T_n)^\psi_\beta, t\big) \le \frac{\gamma^{1/2}(nt)}{\psi(n)} \|T_n\|. \tag{5.4}$$

Возводя обе части неравенства (5.4) в степень $\widetilde{p}$, умножая их на функцию $\xi(t)$ и затем интегрируя по переменной t в пределах от 0 до h, для любого полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ получаем

$$\int\limits_0^h \omega_\gamma^{\widetilde{p}}\big((T_n)^\psi_\beta, t\big)\xi(t)dt \le \frac{\|T_n\|^{\widetilde{p}}}{\psi^{\widetilde{p}}(n)} \int\limits_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt \le \int\limits_0^h \xi(t)dt.$$

Следовательно, $\mathbb{B}_{2n+1} \subset L^\psi_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi, h)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника и соотношение (5.1), имеем

$$\lambda_{2n}(L^\psi_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi, h); L_2) \ge b_{2n}(L^\psi_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi, h); L_2) \ge$$

$$\ge b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \ge \psi(n) \left\{ \frac{\displaystyle\int_0^h \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt} \right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{5.5}$$

Требуемые равенства (5.2) вытекают из сопоставления оценок сверху (5.3) и оценок снизу (5.5).

Теорема 3 доказана.

Отметим, например, что в случае, когда $\xi := \widehat{\xi}$, $\psi := \psi_{1,r}$, $r \in (0, \infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma := \gamma_{1,k}$, $0 < b \le \pi$, $0 < h \le \pi/n$ и выполнены ограничения (4.17) из [1], из формулы (5.2) получаем один из основных результатов М. Г. Есмаганбетова [4]:

$$\lambda_{2n}\big(L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma_{1,k};\widetilde{p}}(\widehat{\xi}, h); L_2\big) = \lambda_{2n-1}\big(L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma_{1,k};\widetilde{p}}(\widehat{\xi}, h); L_2\big) =$$

$$= E_{n-1}\big(L^{\psi_{1,r}}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma_{1,k};\widetilde{p}}(\widehat{\xi}, h)\big) = \frac{n^{-r}}{2^{k/2}} \left\{ \frac{\displaystyle\int_0^h \sin^q(bt/h)dt}{\displaystyle\int_0^h (1-\cos nt)^{k\widetilde{p}/2}\sin^q(bt/h)dt} \right\}^{1/\widetilde{p}}.$$

***Следствие* 4.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 3. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in L^\psi_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi, h)\big\} = \sup\big\{|b_n(f)| : f \in L^\psi_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi, h)\big\} =$$

$$= \psi(n) \left\{ \frac{\displaystyle\int_0^h \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt} \right\}^{1/\widetilde{p}}, \tag{5.6}$$

где $a_n(f)$ *и* $b_n(f)$ — *косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции* f.

Доказательство. Не уменьшая общности рассмотрим косинус-коэффициент Фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big(f(t) - S_{n-1}(f,t)\big)\cos nt dt,$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье функции f. Используя неравенство Коши – Буняковского, для произвольного элемента $f \in L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)$ получаем

$$|a_n(f)| \le \big\|f - S_{n-1}(f)\big\| = E_{n-1}(f) \le E_{n-1}\Big(L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\Big),$$

т. е. в силу формулы (5.2) имеем

$$\sup\Big\{|a_n(f)|: f \in L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\Big\} \le \psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^h \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{5.7}$$

Для установления оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(x) := \psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^h \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/\widetilde{p}} \cos nx,$$

которая принадлежит рассмотренному при доказательстве теоремы 3 шару

$$\mathbb{B}_{2n+1} \subset L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h).$$

Следовательно,

$$\sup\Big\{|a_n(f)|: f \in L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,\widetilde{p}}(\xi,h)\Big\} \ge \sup\big\{|a_n(f)|: f \in \mathbb{B}_{2n+1}\big\} \ge \big|a_n(f_0)\big| =$$

$$= \psi(n)\left\{\frac{\displaystyle\int_0^h \xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^h \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\right\}^{1/\widetilde{p}}. \tag{5.8}$$

Сопоставляя оценку сверху (5.7) и оценку снизу (5.8), получаем требуемое равенство (5.6) для косинус-коэффициента Фурье. Аналогичным образом получаем необходимое соотношение для синус-коэффициента Фурье.

Следствие 4 доказано.

5.2. Пусть $\Phi(t), t \ge 0$, — непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Всюду далее будем называть ее мажорантой. Символом $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$ обозначим класс функций $f \in$ $\in L^{\psi}_{\beta,2}$, для которых при любых $0 < t \le 2\pi$ выполнено неравенство $\omega_\gamma(f^{\psi}_{\beta},t) \le \Phi(t)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1 *из* [1], $\bar{t}_0 \in (0, \bar{t}]$ — *произвольная фиксированная точка, величина* $\bar{t}$ *определяется формулой* (3.4) *из* [1]. *Если для любых чисел* $0 < t \le 2\pi$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *мажоранта* Φ *удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi^2(t)}{\Phi^2(\bar{t}_0/n)} \ge \frac{\gamma_*(nt)}{\gamma(\bar{t}_0)}, \tag{5.9}$$

где функция γ_* *определяется формулой* (3.2) *из* [1], *то имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) = E_{n-1}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\right) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\sqrt{\gamma(\bar{t}_0)}}\,\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right). \tag{5.10}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из* n*-поперечников, рассмотренных ранее.*

Доказательство. Используя соотношение (5.1), определение класса $W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$ и формулу (3.5) из [1], в которой полагаем $\tau := \bar{t}_0$, получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) \le \lambda_{2n-1}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) \le d_{2n-1}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)\right) \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\gamma(\bar{t}_0)}}\,\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right). \tag{5.11}$$

Для получения оценок снизу рассмотрим шар

$$\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathfrak{N}^{\top}_{2n+1} : \|T_n\| \le \frac{\psi(n)}{\sqrt{\gamma(\bar{t}_0)}}\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right)\right\}.$$

Для произвольного полинома $T_n \in \widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}$ в силу формулы (5.4) и ограничения (5.9) при $0 < t \le 2\pi$ имеем

$$\omega_\gamma\left((T_n)^{\psi}_{\beta}, t\right) \le \frac{\sqrt{\gamma_*(nt)}}{\psi(n)}\|T_n\| \le \sqrt{\frac{\gamma_*(nt)}{\gamma(\bar{t}_0)}}\,\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right) \le \Phi(t).$$

Следовательно, $\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} \subset W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi)$. Используя формулу (5.1) и определение бернштейновского n-поперечника, находим

$$\lambda_{2n}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) \ge b_{2n}\left(W^{\psi}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\Phi);L_2\right) \ge b_{2n}\left(\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}, L_2\right) \ge$$

$$\ge \frac{\psi(n)}{\sqrt{\gamma(\bar{t}_0)}}\,\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right). \tag{5.12}$$

Требуемые равенства (5.10) получаем, сопоставляя оценку сверху (5.11) и оценку снизу (5.12).

Теорема 4 доказана.

Отметим, что в случае $\gamma := \gamma_{2,k}$ и $\bar{t}_0 := \pi/2$ ограничение (5.9) принимает вид

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k (1-\operatorname{sinc}(nt))_*^k, \quad 0 < t \leq 2\pi. \tag{5.13}$$

Как было показано в работе [5], мажоранта $\Phi_0(t) := t^{2k/(\pi-2)}$ удовлетворяет неравенству (5.13). Если, например, $\psi := \psi_{3,\sigma,\lambda}$, где $0 < \sigma, \lambda < \infty$ — константы, то при выполнении ограничения (5.13) из теоремы 4 имеем

$$\lambda_{2n}\left(W_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}(\widetilde{\omega}_k, \Phi); L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(W_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}(\widetilde{\omega}_k, \Phi); L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{\beta,2}^{\psi_{3,\sigma,\lambda}}(\widetilde{\omega}_k, \Phi)\right) = \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^k \exp\big(-\sigma n^\lambda\big)\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big).$$

***Следствие* 5.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 4. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\left\{|a_n(f)|: f \in W_{\beta,2}^{\psi}(\omega_\gamma, \Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)|: f \in W_{\beta,2}^{\psi}(\omega_\gamma, \Phi)\right\} = \frac{\psi(n)}{\sqrt{\gamma(\bar{t}_0)}}\Phi\left(\frac{\bar{t}_0}{n}\right).$$

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству следствия 4, поэтому мы его не приводим.

5.3. Пусть Φ — некоторая мажоранта, $0 < p \leq 2$, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in G$, ξ — неотрицательная суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Символом $\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,p}(\omega_\gamma, \xi; \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_{\beta,2}^{\psi}$, для (ψ,β)-производных которых при любом $0 < \tau \leq 2\pi$ выполняется неравенство

$$\int_0^\tau \omega_\gamma^p(f_\beta^\psi, t)\xi(t)dt \leq \Phi^p(\tau).$$

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия следствия* 2 *из* [1] *и величина* $0 < \widetilde{p} \leq 2$ *удовлетворяет требованиям* (4.4), (4.5) *из* [1], $0 < \mu \leq 1$ — *произвольное фиксированное число, мажоранта* Φ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^{\widetilde{p}}(\tau)}{\Phi^{\widetilde{p}}(\mu t_*/n)} \geq \frac{\displaystyle\int_0^\tau \gamma_*^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^{\mu t_*/n} \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}, \quad 0 < \tau \leq 2\pi, \tag{5.14}$$

точка t_* *и функция* γ_* *определяются формулами* (3.1) *и* (3.2) *из* [1] *соответственно*, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma, \xi; \Phi); L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma, \xi; \Phi); L_2\right) = E_{n-1}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma, \xi; \Phi)\right) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\left\{\displaystyle\int_0^{\mu t_*/n} \gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}\Phi\left(\frac{\mu t_*}{n}\right). \tag{5.15}$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из рассмотренных выше* n-*поперечников.*

Доказательство. Используя определение класса $\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma, \xi; \Phi)$, следствие 2 из [1], в котором полагаем $\tau := \mu t_*/n$, и соотношение (5.1), получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}\Big(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi);L_2\Big)\le\lambda_{2n-1}\Big(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi);L_2\Big)\le d_{2n-1}\Big(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi);L_2\Big)\le$$

$$\le E_{n-1}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi)\right)\le\frac{\psi(n)}{\left\{\int_0^{\mu t_*/n}\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}\Phi\left(\frac{\mu t_*}{n}\right). \qquad (5.16)$$

Для получения оценок снизу в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathfrak{N}_{2n+1}^{\top}$ рассмотрим шар

$$\widehat{\mathbb{B}}_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathfrak{N}_{2n+1}^{\top}:\|T_n\|\le\psi(n)\left(\int\limits_0^{\mu t_*/n}\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt\right)^{-1/\widetilde{p}}\Phi(\mu t_*/n)\right\}.$$

Используя неравенство (5.4), для произвольного полинома n-го порядка T_n при $0<t\le 2\pi$ записываем

$$\omega_\gamma\left((T_n)_\beta^\psi,t\right)\le\frac{\gamma_*^{1/2}(nt)\|T_n\|}{\psi(n)}.$$

Возводя обе части данного неравенства в степень $\widetilde{p}$, умножая их на функцию $\xi(t)$ и интегрируя по переменной t в пределах от 0 до τ, находим

$$\int\limits_0^\tau\omega_\gamma^{\widetilde{p}}\left((T_n)_\beta^\psi,t\right)\xi(t)dt\le\frac{\|T_n\|^{\widetilde{p}}}{\psi^{\widetilde{p}}(n)}\int\limits_0^\tau\gamma_*^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt,\quad 0<\tau\le 2\pi.$$

Для произвольного полинома $T_n\in\widehat{\mathbb{B}}_{2n+1}$ с учетом ограничения (5.14) получаем

$$\int\limits_0^\tau\omega_\gamma^{\widetilde{p}}\left((T_n)_\beta^\psi,t\right)\xi(t)dt\le\frac{\int_0^\tau\gamma_*^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}{\int_0^{\mu t_*/n}\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt}\Phi^{\widetilde{p}}\left(\frac{\mu t_*}{n}\right)\le\Phi^{\widetilde{p}}(\tau).$$

Следовательно, $\widehat{\mathbb{B}}_{2n+1}\subset\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi)$. Используя соотношение (5.1) и определение бернштейновского n-поперечника, имеем

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi);L_2\right)\ge b_{2n}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi,\widetilde{p}}(\omega_\gamma,\xi;\Phi);L_2\right)\ge b_{2n}\left(\widehat{\mathbb{B}}_{2n+1},L_2\right)\ge$$

$$\ge\frac{\psi(n)}{\left\{\int_0^{\mu t_*/n}\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}\Phi\left(\frac{\mu t_*}{n}\right). \qquad (5.17)$$

Требуемые равенства (5.15) получаем из соотношений (5.16), (5.17), что и завершает доказательство теоремы 5.

***Следствие* 6.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 5. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)|\colon f\in W^{\psi,\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\xi;\Phi)\right\}=\sup\left\{|b_n(f)|\colon f\in W^{\psi,\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_\gamma,\xi;\Phi)\right\}=$$

$$=\frac{\psi(n)}{\left\{\int_0^{\mu t_*/n}\gamma^{\widetilde{p}/2}(nt)\xi(t)dt\right\}^{1/\widetilde{p}}}\Phi\left(\frac{\mu t_*}{n}\right).$$

Доказательство данного следствия не приводится по тем же причинам, что и следствия 5.

6. Примеры реализации теоремы 5. ***6.1.*** Пусть

$$\gamma:=\gamma_{1,k}(x)=2^k(1-\cos x)^k=2^{2k}\sin^{2k}(x/2)$$

(в данном случае $t_*=\pi$), $\xi:=\widehat{\xi}(t)=\sin^q(bt/\tau)$, где $0<b\le\pi,\ 0<t\le\tau\le\pi/n,\ 0\le q<\infty$, $\psi:=\psi_{1,r}(x)=x^{-r},\ r=\beta\in\mathbb{N}$. Отметим, что в рассматриваемом случае ограничения (4.4), (4.5) из [1], содержащиеся в формулировке теоремы 5, примут вид (4.17) из [1], а условие (5.14) запишется так:

$$\Phi^{\widetilde{p}}\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\int\limits_0^\tau\left(\sin\frac{nt}{2}\right)_*^{k\widetilde{p}}\sin^q\left(\frac{bt}{\tau}\right)dt\le\Phi^{\widetilde{p}}(\tau)\int\limits_0^{\mu\pi/n}\sin^{k\widetilde{p}}\left(\frac{nt}{2}\right)\sin^q\left(\frac{btn}{\mu\pi}\right)dt,\qquad(6.1)$$

где $(\sin x)_*:=\{\sin x,$ если $0\le x\le\pi/2,$ и $1,$ если $x\ge\pi/2\}$, $\mu\in(0,1]$ — произвольным образом фиксированное число, n — любое натуральное число. Выполняя в интегралах из неравенства (6.1) замены переменных, записываем его в более общем виде, вводя для этого параметры $0<u\le\pi$ и $0<\theta\le1$:

$$\Phi^{\widetilde{p}}(\mu u)\int\limits_0^{\theta\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{k\widetilde{p}}\sin^q\left(\frac{bv}{\theta\pi}\right)dv\le\Phi^{\widetilde{p}}(\theta u)\int\limits_0^{\mu\pi}\sin^{k\widetilde{p}}\left(\frac{v}{2}\right)\sin^q\left(\frac{bv}{\mu\pi}\right)dv.\qquad(6.2)$$

Очевидно, что при $\theta:=\tau n/\pi$ и $u:=\pi/n$ из формулы (6.2) имеем условие (6.1). Тогда, в силу теоремы 5, при выполнении условий (4.17) из [1] и ограничения (6.2) получаем теорему 2 из работы [6]:

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi);L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi);L_2\right)=E_{n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi)\right)=$$

$$=2^{-k}n^{-r}\left\{\int\limits_0^{\mu\pi/n}\sin^{k\widetilde{p}}\left(\frac{nt}{2}\right)\sin^q\left(\frac{btn}{\mu\pi}\right)dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из рассмотренных ранее n-поперечников. В [6] также был приведен пример мажоранты $\widetilde{\Phi}(t):=t^{\xi}$, удовлетворяющей ограничению (6.2), где

$$\xi:=\mu\pi\sin^{k\widetilde{p}}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)\left\{\widetilde{p}\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{k\widetilde{p}}dv\right\}^{-1}.$$

6.2. Пусть, например, $\psi:=\psi_{4,r,\varepsilon}(x)=x^{-r}\ln^\varepsilon(x+e)$, где $0<\varepsilon<r<\infty,\ \beta\in\mathbb{R},\ \xi:=\widehat{\xi}$, $\gamma:=\gamma_{1,k}$. Тогда при выполнении условий (4.18) из [1] и (6.2) из теоремы 5 имеем

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}^{\psi_{4,r,\varepsilon};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi);L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{4,r,\varepsilon};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi);L_2\right)=E_{n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{4,r,\varepsilon};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\omega_k,\widehat{\xi};\Phi)\right)=$$

$$=2^{-k}n^{-r}\ln^{\varepsilon}(n+e)\left\{\int\limits_0^{\mu\pi/n}\sin^{k\widetilde{p}}\frac{nt}{2}\sin^{q}\left(\frac{btn}{\mu\pi}\right)dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных ранее n-поперечников.

6.3. Рассмотрим далее случай, когда $\psi:=\psi_{1,r},\ r=\beta\in\mathbb{N},\ \gamma:=\gamma_{2,k}(x)=(1-\operatorname{sinc}x)^{2k}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда для всех $\widetilde{p}\in(0,2]$, удовлетворяющих условию (4.12) из [1], ограничение (5.14) принимает вид

$$\frac{\Phi^{\widetilde{p}}(\tau)}{\Phi^{\widetilde{p}}(\mu t_*/n)}\geq\frac{\displaystyle\int_0^{\tau}(1-\operatorname{sinc}(nt))_*^{k\widetilde{p}}\xi(t)dt}{\displaystyle\int_0^{\mu t_*/n}(1-\operatorname{sinc}(nt))^{k\widetilde{p}}\xi(t)dt},\tag{6.3}$$

где $0<\tau\leq 2\pi,\ (1-\operatorname{sinc}t)_*:=\{1-\operatorname{sinc}t,$ если $0\leq t\leq t_*,$ и $1-\operatorname{sinc}t_*,$ если $t_*\leq t<\infty\}$, при этом $(1-\operatorname{sinc}0):=0$.

Полагая в формуле (6.3) $\mu:=\pi/t_*,\ \xi:=\xi_1(t)\equiv 1$, а также представляя мажоранту в виде

$$\Phi(t):=t^{1/\widetilde{p}}\Phi_0(t),$$

где Φ_0 — также мажоранта, имеем

$$\frac{\Phi_0^{\widetilde{p}}(\tau)}{\Phi_0^{\widetilde{p}}(\pi/n)}\geq\frac{\pi\displaystyle\int_0^{n\tau}(1-\operatorname{sinc}t)_*^{k\widetilde{p}}dt}{n\tau\displaystyle\int_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}t)^{k\widetilde{p}}dt}.\tag{6.4}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае соотношение (4.12) принимает вид

$$1/r\leq\widetilde{p}\leq 2.\tag{6.5}$$

Таким образом, при выполнении условий (6.4), (6.5) из формулы (5.15) получаем один из результатов работы [7]:

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k,\xi_1;\Phi);L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k,\xi_1;\Phi);L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(\mathcal{W}^{\psi_{1,r};\widetilde{p}}_{\beta,2}(\widetilde{\omega}_k,\xi_1;\Phi)\right)=n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}t)^{k\widetilde{p}}dt\right\}^{-1/\widetilde{p}}\Phi_0\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $n\in\mathbb{N}$ и $\lambda_n(\cdot)$ — любой из рассмотренных выше n-поперечников. Примером мажоранты, удовлетворяющей соотношению (6.4), является функция $\Phi_0(t):=t^{l/\widetilde{p}}$ [7], где

$$l:=\frac{\pi}{\displaystyle\int_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc}t)^{k\widetilde{p}}dt}-1.$$

Следовательно, $\Phi(t)=t^{(l+1)/\widetilde{p}}$.

6.4. Пусть теперь $\psi := \psi_{1,r},\ r = \beta \in \mathbb{N},\ \xi := \xi_2(t) = t,\ \gamma := \gamma_{2,k},\ \widetilde{p} := 1/k,\ k \in \mathbb{N},$ $\mu := \pi/t_*$. Тогда неравенство (6.3) принимает вид

$$\frac{\Phi^{1/k}(\tau)}{\Phi^{1/k}(\pi/n)} \geq \frac{2}{\pi^2-4}\int\limits_0^{n\tau}(1-\operatorname{sinc} t)_* t dt, \quad 0 < \tau \leq 2\pi. \tag{6.6}$$

Неравенства (4.12) из [1] в данном случае будут равносильны соотношению

$$r \geq 2k. \tag{6.7}$$

При этом если выполнены условия (6.6), (6.7), то для произвольного рассмотренного выше n-поперечника $\lambda_n(\cdot)$ имеем

$$\lambda_{2n}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi_{1,r};1/k}(\widetilde{\omega}_k, \xi_2; \Phi); L_2\right) = \lambda_{2n-1}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi_{1,r};1/k}(\widetilde{\omega}_k, \xi_2; \Phi); L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(\mathcal{W}_{\beta,2}^{\psi_{1,r};1/k}(\widetilde{\omega}_k, \xi_2; \Phi)\right) = n^{-r+2k}\left(\frac{2}{\pi^2-4}\right)^k \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{6.8}$$

Приведем далее пример мажоранты, для которой неравенство (6.6) будет выполнено. Для этого докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множество мажорант*, *удовлетворяющих условию* (6.6), *при выполнении которого справедливы равенства* (6.8), *не пусто.*

Доказательство. Покажем, что функция $\widetilde{\Phi}_0 := t^{ak}$, где

$$a := \frac{2\pi^2}{\pi^2-4}, \tag{6.9}$$

удовлетворяет условию (6.6). Несложно проверить, что $3 < a < 4$. Для функции $\widetilde{\Phi}_0$ условие (6.6) принимает вид

$$\left(\frac{n\tau}{\pi}\right)^a \geq \frac{2}{\pi^2-4}\int\limits_0^{n\tau} t(1-\operatorname{sinc} t)_* dt,$$

где $0 < \tau \leq 2\pi$, n — произвольное натуральное число. Полагая $z := n\tau/\pi$, из последнего неравенства получаем соотношение

$$z^a \geq \frac{2}{\pi^2-4}\int\limits_0^{z\pi} t(1-\operatorname{sinc} t)_* dt, \quad 0 \leq z < \infty, \tag{6.10}$$

справедливость которого требуется доказать. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$H(z) := z^a - \frac{2}{\pi^2-4}\int\limits_0^{z\pi} t(1-\operatorname{sinc} t)_* dt \tag{6.11}$$

и покажем, что $H(z) \geq 0$ для произвольного $z \in [0,\infty)$. Рассуждения проведем для трех случаев: 1) $0 \leq z \leq 1$, 2) $1 \leq z \leq t_*/\pi$, 3) $t_*/\pi \leq z < \infty$.

1. Пусть вначале $0 \le z \le 1$. Из формулы (6.11) в данном случае имеем

$$H(z) := z^a - \frac{2}{\pi^2 - 4}\left(\frac{(z\pi)^2}{2} + \cos z\pi - 1\right). \tag{6.12}$$

Из (6.12) получаем

$$H(z) = z^a - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\left(z^2 - \left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{z\pi}{2}\right)^2\right) = z^a\left(1 - z^{4-a}\left(\frac{\pi^4}{12(\pi^2-4)} + O(z^2)\right)\right). \tag{6.13}$$

В силу соотношения (6.13) и неравенства $3 < a < 4$ очевидно, что при $z \to 0+0$ функция H принимает положительные значения на некотором интервале $(0,\xi)$ бесконечно малой длины ξ. Для доказательства знакопостоянства H на $(0,1)$ рассуждения проведем методом от противного, полагая, что в интервале $(0,1)$ существует точка, в которой функция H меняет свой знак. Из равенства (6.12) получаем $H(0) = H(1) = 0$. Тогда, на основании теоремы Ролля, производная первого порядка

$$H'(z) = az^{a-1} - \frac{2\pi}{\pi^2 - 4}(z\pi - \sin z\pi) \tag{6.14}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Поскольку, как следует из формул (6.9) и (6.14), $H'(0) = H'(1) = 0$, то производная второго порядка

$$H''(z) = a\big((a-1)z^{a-2} + \cos z\pi - 1\big) \tag{6.15}$$

в силу тех же соображений должна иметь на $(0,1)$ не менее трех различных нулей. Как следует из (6.15), $H''(0) = 0$. Поэтому производная третьего порядка

$$H'''(z) = a((a-1)(a-2)z^{a-3} - \pi\sin z\pi) \tag{6.16}$$

должна иметь, исходя из теоремы Ролля, не менее трех различных нулей на интервале $(0,1)$. Учитывая, что $3 < a < 4$, из (6.16) имеем $H'''(0) = 0$, т. е. производная четвертого порядка

$$H^{\mathsf{IV}}(z) = a((a-1)(a-2)(a-3)z^{a-4} - \pi^2\cos z\pi) \tag{6.17}$$

на основании тех же соображений должна обращаться в нуль не менее чем в трех различных точках из $(0,1)$. Однако это не так, поскольку из чисто геометрических соображений, основанных на анализе формулы (6.17), очевидно, что производная H^{IV}, которая является разностью положительной выпуклой вниз монотонно убывающей функции и функции, монотонно убывающей, меняющей в точке $z = 1/2$ знак с плюса на минус, а выпуклость — с выпуклости вверх на выпуклость вниз, может иметь на интервале $(0,1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает выполнение неравенства (6.10) в случае 1.

2. Пусть теперь $1 \le z \le t_*/\pi$. Используя формулу (6.12), несложно проверить, что $H(t_*/\pi) > 0$, т. е. H — знакоположительная функция на некотором интервале $(t_*/\pi - \varepsilon; t_*/\pi)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое бесконечно малое число. Для доказательства знакопостоянства H в рассматриваемом случае также проведем рассуждения методом от противного, полагая, что существует точка $1 < y < t_*/\pi$, в которой H меняет свой знак. Учитывая, что $H(1) = 0$, в силу теоремы Ролля получаем, что производная H' должна иметь на $(1, t_*/\pi)$ не менее одного нуля. Поскольку $H'(1) = 0$, то в силу аналогичных соображений производная H'' должна иметь

на интервале $(1, t_*/\pi)$ также не менее одного нуля. Из (6.15) имеем $H''(1) = a(a-3) > 0$. Учитывая, что на отрезке $[1, t_*/\pi]$ функция H'' монотонно возрастает, получаем противоречие с указанным выше ее поведением, так как на множестве $[1, t_*/\pi]$ на основании формулы (6.15) H'' является знакоположительной. Следовательно, неравенство (6.10) имеет место и в рассматриваемом случае.

3. Пусть далее $t_*/\pi \le z < \infty$. Тогда из формулы (6.11) имеем

$$H(z) = \frac{2(1-\cos t_*)}{\pi^2 - 4} - \frac{t_*^2 \operatorname{sinc} t_*}{\pi^2 - 4} + z^2 \left(z^{a-2} - \frac{\pi^2(1 - \operatorname{sinc} t_*)}{\pi^2 - 4} \right). \tag{6.18}$$

Из (6.18) очевидно, что H — монотонно возрастающая функция на рассматриваемом множестве. Поскольку, как следует из случая 2, $H(t_*/\pi) > 0$, то функция H знакоположительна для всех $z \in [t_*/\pi, \infty)$. Значит, неравенство (6.10) выполняется и в этом случае.

Таким образом, мажоранта $\widetilde{\Phi}_0$ является примером функции, удовлетворяющей соотношению (6.6).

Утверждение 1 доказано.

7. Некоторые применения изложенного подхода. *7.1.* Напомним, что для произвольной функции $f \in L_2$ наряду с симметричным оператором сглаживания В. А. Стеклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \quad h > 0, \tag{7.1}$$

также рассматривают и несимметричные операторы (см., например, [8, с. 72])

$$S_h^+(f, x) := \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt, \quad h > 0, \tag{7.2}$$

и

$$S_h^-(f, x) := \frac{1}{h} \int\limits_{x-h}^{x} f(t)dt, \quad h > 0. \tag{7.3}$$

Используя формулы (7.2) и (7.3), записываем для $f \in L_2$ обобщенный оператор сглаживания

$$S_{h,\eta}(f, x) := (1-\eta) S_h^+(f, x) + \eta S_h^-(f, x), \tag{7.4}$$

где $0 \le \eta \le 1$, $h > 0$. Очевидно, что при $\eta := 1/2$ из (7.4) получаем соотношение (7.1), а при $\eta := 0$ или $\eta := 1$ — соотношение (7.2) или (7.3) соответственно. Для оператора (7.4) рассмотрим обобщенные конечные разности первого и высших порядков, полагая

$$\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^1(f, x) := S_{h,\eta}(f, x) - f(x) = (S_{h,\eta} - \mathbb{I})(f, x),$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в L_2,

$$\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^k(f, x) := \widetilde{\Delta}_{h,\eta}^1 \left(\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^{k-1}(f), x \right) = (S_{h,\eta} - \mathbb{I})^k (f, x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} S_{h,\eta;j}(f, x).$$

Здесь $S_{h,\eta;j}(f) := S_{h,\eta}(S_{h,\eta;j-1}(f)), j \in \mathbb{N}$, $S_{h,\eta;0}(f) := f$.

Под обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$ в данном случае понимаем величину

$$\widetilde{\omega}_{k,\eta}(f,t) := \sup\left\{\|\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^k(f)\| : 0 < h \le t\right\}. \tag{7.5}$$

Отметим, что при $\eta := 1/2$ из (7.5) получаем $\widetilde{\omega}_{k,1/2}(f) \equiv \widetilde{\omega}_k(f)$, где величина $\widetilde{\omega}_k(f)$ определена формулой (2.3) из [1]. Поскольку для $f \in L_2$

$$\|\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^1(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{(1-\operatorname{sinc}(jh))^2 + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)^2 \frac{4(1-\cos jh)^2}{(jh)^2}\right\}\rho_j^2(f),$$

применяя метод математической индукции и учитывая введенные в пункте 2 из [1] обозначения, записываем

$$\|\widetilde{\Delta}_{h,\eta}^k(f)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\gamma_{2,1}(jh) + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)^2 \frac{\gamma_{1,2}(jh)}{(jh)^2}\right\}^k \rho_j^2(f). \tag{7.6}$$

Полагая в данном случае $\gamma := \widetilde{\gamma}_{\eta,k}$, в силу формулы (7.6) получаем

$$\widetilde{\gamma}_{\eta,k}(x) := \left\{\gamma_{2,1}(x) + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)^2 \frac{\gamma_{1,2}(x)}{x^2}\right\}^k, \tag{7.7}$$

где параметр $\eta \in [0,1]$. Можно показать, что функция $\widetilde{\gamma}_{\eta,k}$ принадлежит классу G и удовлетворяет свойствам A и B из [1]. С учетом соотношений (7.5)–(7.7) для $f \in L_2$ имеем

$$\widetilde{\omega}_{k,\eta}(f,t) = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j^2(f)\widetilde{\gamma}_{\eta,k}(jh)\right)^{1/2} : 0 < h \le t\right\}. \tag{7.8}$$

Следовательно, обобщенный модуль непрерывности (7.5), в силу формулы (7.8), имеет такую же структуру, как и обобщенный модуль непрерывности (2.6) из [1].

Очевидно, что все теоремы и вытекающие из них следствия, полученные в пунктах 3–5, будут иметь место и для характеристик гладкости $\widetilde{\omega}_{k,\eta}$, где $0 \le \eta \le 1$, $k \in \mathbb{N}$.

7.2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ и величина наилучшего полиномиального приближения $E_m(f)$ при $m = 0$ является нормой функции f в L_2. Для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_{k,m}(f,t) := \sup\left\{E_m\big(\Delta_h^k(f,\cdot)\big) : 0 < h \le t\right\} =$$

$$= \sup\left\{E_m\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} f(\cdot + jh)\right) : 0 < h \le t\right\}, \quad t \ge 0, \tag{7.9}$$

которую, следуя В. В. Жуку [9], назовем $\mathcal{E}$-модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$. Случаи $k = 1$ и $k = 2$ в пространстве C были рассмотрены в указанной работе. Из соотношения (7.9) имеем $\mathcal{E}_{k,0}(f) = \omega_k(f)$. Также очевидно, что $\mathcal{E}_{k,m}(f,t) \le 2^k E_m(f)$ и $\mathcal{E}_{k,m}(f,t) \le \omega_k(f,t)$. Из формулы (7.9) получаем

$$\mathcal{E}_{k,m}(f,t) = \sup\left\{\sum_{j=m}^{\infty}\rho_j^2(f)\gamma_{1,k}(jh) : 0 < h \le t\right\}.$$

Из данного соотношения следует, что результаты, полученные ранее для функций $\gamma \in G$, имеющих свойство А, будут иметь место и для характеристики гладкости $\mathcal{E}_{k,m}(f)$ в случае, когда в неравенствах типа Джексона, содержащих величину $E_n(f)$, выполнено соотношение $n \geq m$, $n \in \mathbb{N}$.

7.3. Напомним, что модули непрерывности дробного порядка 2π-периодических функций впервые были рассмотрены П. Бутцером и Ю. Вестпхалем в работе [10], а также П. Бутцером, Х. Дикхоффом, И. Герличем и Р. Стенсом в работе [11]. В последующем указанные характеристики гладкости изучались Р. Таберским, К. Ивановым, Я. С. Бугровым, В. Г. Пономаренко, С. Г. Самко, А. Я. Якубовым и др. (см., например, [12 – 16]).

Для произвольного числа $\alpha > 0$ (необязательного целого) и любой функции $f \in L_2$ запишем разность дробного порядка α с шагом h в точке x :

$$\Delta_h^\alpha(f, x) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh),$$

где

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \binom{\alpha}{1} := \alpha, \qquad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha \ldots (\alpha - j + 1)}{j!}, \quad j = 2, 3, \ldots. \tag{7.10}$$

Отметим, что в случае $\alpha = m$, $m \in \mathbb{N}$, формула (7.10) принимает вид

$$\binom{m}{j} = \begin{cases} \dfrac{m!}{j!(m-j)!}, & \text{если} \quad j \leq m, \\ 0, & \text{если} \quad j > m. \end{cases}$$

Модулем непрерывности функции $f \in L_2$ дробного порядка $\alpha > 0$ называют величину (см., например, [13, 15])

$$\omega_\alpha(f, t) := \sup \big\{ \|\Delta_h^\alpha(f)\| : 0 < h \leq t \big\}, \quad t > 0. \tag{7.11}$$

Отметим, что свойства характеристики гладкости (7.11) были указаны в работе К. Иванова [13].

Из [17, с. 30] следует, что для произвольной функции $f \in L_2$ справедливы равенства

$$c_j\big(\Delta_h^\alpha(f)\big) = \Big(1 - e^{-ijh}\Big)^\alpha c_j(f), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$\rho_j\big(\Delta_h^\alpha(f)\big) = \big\{2(1 - \cos jh)\big\}^{\alpha/2} \rho_j(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Поскольку

$$\big\|\Delta_h^\alpha(f)\big\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j^2\big(\Delta_h^\alpha(f)\big) = 2^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \cos jh)^\alpha \rho_j^2(f),$$

то, в силу формулы (7.11), имеем

$$\omega_\alpha(f, t) = \sup \left\{ \left(2^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \cos jh)^\alpha \rho_j^2(f) \right)^{1/2} : 0 < h \leq t \right\}. \tag{7.12}$$

Полагая

$$\gamma(x) := \gamma_{1,\alpha}(x) = 2^{\alpha}(1-\cos x)^{\alpha}, \qquad (7.13)$$

характеристику гладкости (7.12) можно представить в виде (2.6) из [1]. Поскольку функция (7.13) принадлежит классу G и удовлетворяет свойству А, то все результаты, полученные в пунктах 3 – 5 данной статьи и касающиеся указанного случая, будут иметь место и для модулей непрерывности (7.11) дробного порядка $\alpha > 0$.

В подтверждение изложенного отметим, что, например, при $\psi := \psi_{1,r}$, где $r \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$, и $\beta \in \mathbb{R}$, анонсированная в тезисах М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова [18] теорема 1 является частным случаем теоремы 2 из [1], а приведенная далее теорема 2 непосредственно вытекает из следствия 2 работы [1]. Что же касается теоремы 3 из [18], то ее получаем непосредственно из доказанной выше теоремы 3 при минимальной модернизации ограничения для класса $L^{\psi}_{\beta,2}\mathfrak{N}_{\gamma,p}(\xi,h)$, состоящей в рассмотрении множества функций $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$, для которых

$$\int\limits_0^h \omega_{\gamma}^p(f_{\beta}^{\psi},t)\xi(t)dt \le \omega^p(h)\int\limits_0^h \xi(t)dt,$$

где $\gamma := \gamma_{1,\alpha}$, $\psi := \psi_{1,r}$, $r \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < h \le \pi/n$ — некоторое фиксированное значение, ω — заданный модуль непрерывности.

Литература

1. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. I // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 6. – С. 723 – 745.
2. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Праці Ін-ту математики НАН України: Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання. – 2003. – **46**. – С. 229 – 247.
3. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов периодических функций в пространстве L_2 // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 37 – 48.
4. *Есмаганбетов М. Г.* Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 6. – С. 816 – 820.
5. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве L_2 и поперечниках некоторых классов функций // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1025 – 1032.
6. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. – 2011. – **90**, № 5. – С. 761 – 772.
7. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2012. – **92**, № 4. – С. 497 – 514.
8. *Семесенко М. П.* Методы обработки и анализа измерений в научных исследованиях. – Киев; Донецк: Вища шк., 1983. – 240 с.
9. *Жук В. В.* Некоторые точные неравенства между равномерными наилучшими приближениями периодических функций // Докл. АН СССР. – 1971. – **201**, № 2. – С. 263 – 265.
10. *Butzer P. L., Westphal U.* An access to fractional differentiation via fractional difference quotiens // Lect. Notes Math. – 1975. – **457**. – P. 116 – 145.
11. *Butzer P. L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R. L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipshitz classes // Can. J. Math. – 1977. – **29**, № 4. – P. 781 – 793.
12. *Taberski R.* Defferences, moduli and derivatives of fractional order // Rocz. Pol. tow. mat. Ser. 1. – 1977. – **19**, № 2. – P. 389 – 400.

13. *Ivanov K. G.* On the rates of convergence of two moduli of functions // Pliska Stud. Math. Bulg. – 1983. – **5**. – P. 97 – 104.
14. *Бугров Я. С.* Дробные разностные операторы и классы функций // Теория приближения функций: Труды междунар. конф. по теории приближения функций, 1983. – М.: АН СССР, 1987. – С. 75 – 78.
15. *Пономаренко В. Г.* Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в L_p $1 < p < \infty$ // Труды Междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, 1-5 июня 1981). — София, 1983. – С. 128 – 133.
16. *Самко С. Г., Якубов А. Я.* Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 12. – С. 49 – 53.
17. *Butzer P. L., Westphal U.* An introduction to fractional calculus // Applications of Fractional Calculus in Physics. – Singapore etc.: World Sci., 2000. – P. 1 – 86.
18. *Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А.* Структурные характеристики и точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 // Теорія наближень та її застосування: Тези Міжнар. наук. конф. з нагоди 75-річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 8 – 11 жовтня 2015). – С. 87 – 89.

Получено 04.05.15