УДК 517.51

А. С. Романюк, В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ БИЛИНЕЙНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ И СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

We obtain the exact-order estimates for the best bilinear approximations of the Nikol‘ski–Besov classes $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ of periodic functions of several variables. We also find the orders for singular numbers of the integral operators with kernels from the classes $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$.

Встановлено точні за порядком оцінки найкращих білінійних наближень класів Нікольського – Бєсова $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. Знайдено порядки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$.

1. Введение. В работе основное внимание сосредоточено на исследовании приближения классов Никольского – Бесова $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ периодических функций с $2d$ переменными линейными комбинациями произведений функций с d переменными. Такого вида приближения называются билинейными. Установленный в этом направлении результат дополняет результаты, полученные в работах [1 – 8], в которых можно ознакомиться с подробной историей и соответствующей библиографией. Наряду с вопросом о наилучших билинейных приближениях функций из указанных классов мы исследуем связанный с ним вопрос об оценках сингулярных чисел интегральных операторов с ядрами из классов $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$. Определения рассматриваемых величин будут даны ниже, а сначала приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство и $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ для $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_m)$ из $\mathbb{R}^m$; при $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_m)$ через $L_{\mathbf{p}}(\pi_m)$, $\pi_m = \prod_{j=1}^{m}(0;2\pi]$, обозначаются множества функций $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$, 2π-периодических по каждой переменной, с конечными нормами

$$\|f\|_{\mathbf{p}} := \left((2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \left(\ldots (2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} \left((2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi} |f(\mathbf{z})|^{p_1}\, dz_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \ldots \right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dz_m \right)^{\frac{1}{p_m}}$$

при $1 \le p_j < \infty$, $j = \overline{1,m}$, и

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{z}} |f(\mathbf{z})|$$

при $p_j = \infty$, $j = \overline{1,m}$.

Заметим, что в случае $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p$ пространство $L_{\mathbf{p}}(\pi_m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\pi_m)$ со стандартной нормой $\|\cdot\|_p$ и $\|f\|_{\mathbf{p}} \equiv \|f\|_p$.

В последующем будем рассматривать функции $f \in L_{\mathbf{p}}(\pi_m)$, для которых выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\mathbf{z})dz_j = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Множество таких функций будем обозначать через $L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m)$.

Пусть $V_l(u),\ u\in\mathbb{R}$, — ядро Валле Пуссена порядка $2l-1$ вида

$$V_l(u)=1+2\sum_{k=1}^{l}\cos ku+2\sum_{k=l+1}^{2l-1}\left(1-\frac{k-l}{l}\right)\cos ku$$

(при $l=1$ вторая сумма полагается равной нулю).

Сопоставим каждому вектору $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_m),\ s_j\in\mathbb{N},\ j=\overline{1,m}$, полином

$$A_{\mathbf{s}}(\mathbf{z})=\prod_{j=1}^{m}(V_{2^{s_j}}(z_j)-V_{2^{s_j-1}}(z_j))$$

и для $f\in L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m),\ \mathbf{1}\le\mathbf{p}\le\infty$, положим

$$\mathbb{A}_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{z})=(f*A_{\mathbf{s}})(\mathbf{z}),$$

где $*$ — операция свертки. Здесь и далее для векторов $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_m)$ и $\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ неравенства типа $\mathbf{a}\le\mathbf{b}$ понимаются покомпонентно, т. е. $a_i\le b_i,\ i=\overline{1,m}$.

Будем говорить, что функция $f\in L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m)$ принадлежит классу $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ с $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $r_j>0,\ \mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m),\ 1\le p_j\le\infty,\ j=\overline{1,m}$ и $1\le\theta<\infty$, если выполнено неравенство

$$\left(\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}^m}2^{(\mathbf{s},\mathbf{r})\theta}\,\|\mathbb{A}_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{z})\|^{\theta}_{\mathbf{p}}\right)^{1/\theta}\le 1.$$

В случае $\mathbf{1}<\mathbf{p}<\infty$ можно записать эквивалентное определение классов $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$, заменив „блоки” $\mathbb{A}_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{z})$ на другие. С этой целью для векторов $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_m)$ и $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_m)$, $k_j\in\mathbb{Z},\ s_j\in\mathbb{N},\ j=\overline{1,m}$, положим

$$\rho(\mathbf{s})=\left\{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_m)\colon 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j},\ j=\overline{1,m}\right\}$$

и для $f\in L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m)$ обозначим

$$\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{z})=\sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\mathbf{z})},$$

где $\widehat{f}(\mathbf{k})=(2\pi)^{-m}\displaystyle\int_{\pi_m}f(\mathbf{t})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{t})}d\mathbf{t}$ — коэффициенты Фурье функции f.

Тогда принадлежность функции $f\in L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m),\ \mathbf{1}<\mathbf{p}<\infty$, классу $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ равносильна выполнению неравенства

$$\left(\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}^m}2^{(\mathbf{s},\mathbf{r})\theta}\,\|\delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{z})\|^{\theta}_{\mathbf{p}}\right)^{1/\theta}\le C$$

с некоторой абсолютной постоянной C.

Подробную информацию о классах $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$, а также историю их исследования можно найти в монографиях [9 – 12].

Теперь определим величины, которые будут изучаться в работе, и приведем краткие исторические сведения, связанные с ними.

Пусть $d\ge 1$ — натуральное число, $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_{2d}),\ 1\le q_j\le\infty,\ j=\overline{1,2d}$ и $\mathbf{q}(\mathbf{1})=$ $=(q_1,\ldots,q_d),\ \mathbf{q}(\mathbf{2})=(q_{d+1},\ldots,q_{2d})$. Для функции $f\in\mathbf{L}^0_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ с $2d$ переменными $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^d$, и $M\in\mathbb{N}$ величина

$$\tau_M(f)_{\mathbf{q}} := \inf_{u_i, v_i} \left\| f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{y}) \right\|_{\mathbf{q}},$$

где $u_i \in L_{\mathbf{q(1)}}(\pi_d),\ v_i \in L_{\mathbf{q(2)}}(\pi_d),\ i = \overline{1, M},$ называется наилучшим билинейным приближением порядка M в пространстве $L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$. При $M = 0$ полагаем $\tau_M(f)_{\mathbf{q}} = \|f\|_{\mathbf{q}}$.

Для множества функций $F \subset \mathbf{L}^0_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ через $\tau_M(F)_{\mathbf{q}}$ обозначим величину

$$\tau_M(F)_{\mathbf{q}} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{\mathbf{q}}. \tag{1}$$

Условимся в случае $q_j = q,\ j = \overline{1, 2d}$, писать $\tau_M(\cdot)_q$ вместо $\tau_M(\cdot)_{\mathbf{q}}$.

2. Исторические сведения и вспомогательные утверждения. По-видимому, первый результат о наилучших билинейных приближениях был получен Е. Шмидтом [13] еще в 1907 г. при исследовании интегральных уравнений. При этом выяснилось, что приближение функций $f(x, y)$ двух переменных, определенных на квадрате $[0; 1]^2 = [0; 1] \times [0; 1]$, билинейными формами в пространстве $L_2([0; 1]^2)$ тесно связано со свойствами интегральных операторов

$$(J_f\, g)(y) = \int_0^1 f(x, y) g(x) dx \tag{2}$$

с ядром $f(x, y)$. Точнее, в [13] было получено разложение (известное как разложение Е. Шмидта)

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(J_f) \varphi_j(x) \psi_j(y),$$

где $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность сингулярных чисел оператора J_f, т. е. $s_j(J_f) = \lambda_j(J_f^* J_f)$, J_f^* — оператор, сопряженный оператору J_f, $\{\lambda_j(T)\}_{j=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность собственных чисел оператора T; $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированные системы собственных функций операторов $J_f\, J_f^*$ и $J_f^*\, J_f$ соответственно.

Кроме того, Е. Шмидтом было доказано равенство

$$\left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^{M} s_j(J_f) \varphi_j(x) \psi_j(y) \right\|_2 = \inf_{u_j, v_j \in L_2([0,1])} \left\| f(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x) v_j(y) \right\|_2, \tag{3}$$

в котором проявляется связь между величинами $\tau_M(f)_2$ для функции f и сингулярными числами $s_j(J_f)$ оператора J_f. Впоследствии эта связь была использована для получения оценок сингулярных чисел интегральных операторов в работе [13], а также в более поздних работах [14 – 18], в которых можно ознакомиться с историей исследования сингулярных чисел интегральных операторов и соответствующей библиографией.

Теперь приведем несколько утверждений, которые будут использоваться при доказательстве полученных результатов.

Первым сформулируем упоминавшийся выше результат Е. Шмидта в несколько модифицированном и адаптированном к рассматриваемой ситуации виде (см., например, [19, с. 10]).

Теорема A. *Пусть функция* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L_{\mathbf{2}}(\pi_{2d})$, $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, *и* J_f *— соответствующий ей интегральный оператор вида* (2) *с интегрированием по* π_d. *Тогда*

$$\tau_M(f)_{\mathbf{2}} = \left(\sum_{m=M+1}^{\infty} s_m^2(J_f) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Важную роль в проводимых ниже рассуждениях будет играть обобщенная (на случай „векторных” норм) теорема Литтлвуда – Пэли (см., например, [10, с. 238] и приведенный там комментарий).

Теорема Б. *Пусть задано* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} < \infty$. *Существуют положительные постоянные* $C_1(\mathbf{p})$ *и* $C_2(\mathbf{p})$ *такие, что для каждой функции* $f \in L^0_{\mathbf{p}}(\pi_m)$ *справедливы оценки*

$$C_1(\mathbf{p})\|f\|_{\mathbf{p}} \le \left\| \left(\sum_{\mathbf{s}} |\delta_{\mathbf{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathbf{p}} \le C_2(\mathbf{p})\|f\|_{\mathbf{p}}.$$

Для множеств $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ и $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ через $T(E_1,\, E_2,\, 2d)$ обозначим множество тригонометрических полиномов t вида

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in E_1 \\ \mathbf{l} \in E_2}} \widehat{t}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) e^{i((\mathbf{k},\mathbf{x})+(\mathbf{l},\mathbf{y}))}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$Q_n = \bigcup_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} \rho^+(\mathbf{s}),$$

где $\rho^+(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\}$ для $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ и $\|\mathbf{s}\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$. Если $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, то через $|\Omega|$ будем обозначать количество его элементов. Заметим, что $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Лемма А [1]. *Пусть* $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $f \in T(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$ *и* $M \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда при* $2 \le q < \infty$ *справедлива оценка*

$$\tau_M(f)_q \le C(d) \min\left\{1,\, M^{-1}\right\} |Q_\mu|^{\frac{1}{2}} \, |Q_\nu|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Полученные далее результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом для двух неотрицательных последовательностей $(a_n)_{n=1}^\infty$ и $(b_n)_{n=1}^\infty$ соотношение (порядковое неравенство) $a_n \ll b_n$ означает, что существует постоянная $C > 0$, не зависящая от n, такая, что $a_n \le C b_n$. Соотношение $a_n \asymp b_n$ равносильно тому, что $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll a_n$. Отметим, что постоянные, которые будут содержаться в порядковых соотношениях и определениях функций, могут зависеть от определенных параметров. Эти параметры иногда будем указывать (как, например, в теореме Б); в других случаях они будут понятны из контекста.

3. Наилучшие билинейные приближения. В этом пункте установим порядковые по M значения величины (1) для класса $F = B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ при определенных значениях параметра θ и некоторых соотношениях между векторами $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{2d})$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ и $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_{2d})$. При этом изначально будем предполагать, что компоненты вектора $\mathbf{r}$ принимают значения $r_j = \rho_1$, $r_{d+j} = \rho_2$, $j = \overline{1, d}$; в таком случае класс $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ будем обозначать $B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{2} \leq \mathbf{p} \leq \infty$, $\mathbf{2} \leq \mathbf{q} < \infty$ *и* $2 \leq \theta < \infty$. *Тогда при* $\rho_i > \dfrac{1}{2}$ ($\rho_i > 0$ *при* $\mathbf{p} \geq \mathbf{q}$), $i = 1, 2$, *для класса* $B^{\rho_1, \rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$ *функций с* $2d$ *переменными имеет место соотношение*

$$\tau_M \left(B^{\rho_1, \rho_2}_{\mathbf{p},\theta} \right)_{\mathbf{q}} \asymp M^{-\rho_1 - \rho_2} \left(\log^{d-1} M \right)^{\rho_1 + \rho_2 + 1 - \frac{2}{\theta}}. \tag{4}$$

Доказательство. Установим сначала оценку сверху величины $\tau_M(B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta})_{\mathbf{q}}$ при $\mathbf{p} < \mathbf{q}$, которую достаточно, очевидно, получить для $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ и $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ с $q_j = q > 2$, $j = \overline{1, d}$. При этом будем принимать во внимание тот факт, что множество $B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta} \subset L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ принадлежит замыканию в $L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ множества всех тригонометрических полиномов.

Итак, по заданному достаточно большому M подберем $m \in \mathbb{N}$ из соотношения

$$2^{d+1} |Q_m| \leq M < C |Q_m|, \tag{5}$$

где C — произвольная фиксированная постоянная, $C > 2^{d+1}$. Для μ, $\nu \in \mathbb{N}$ положим

$$M_{(\mu,\nu)} = \left[C_1(\alpha) M \, 2^{\alpha(2m - \mu - \nu)} \right], \tag{6}$$

$C_1(\alpha) = (1 - 2^{-\alpha})^2$, а число $\alpha > 0$ будет уточнено ниже; через $[a]$ обозначается целая часть числа $a \in \mathbb{R}$. Введя обозначение $G = \big\{(\mu,\nu) \colon \mu > m, \ \nu > m\big\}$, отметим, что для чисел $M_{(\mu,\nu)}$ и M имеет место соотношение

$$\sum_{(\mu,\nu) \in G} M_{(\mu,\nu)} \leq C_1(\alpha) M \sum_{(\mu,\nu) \in G} 2^{\alpha(2m - \mu - \nu)} \leq C_1(\alpha) M \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-\alpha(k-1)} \leq M. \tag{7}$$

Обратим также внимание на следующий факт. Исходя из определения чисел $M_{(\mu,\nu)}$, нетрудно заметить, что существует $\lambda = \lambda(\alpha) > 1$ такое, что если положить $m_0 = [2\lambda m]$ и $G^+ = G \cap \{(\mu,\nu) \colon \mu + \nu \leq m_0\}$, $G^0 = G \cap \{(\mu,\nu) \colon \mu + \nu > m_0\}$, то

$$M_{(\mu,\nu)} \geq 1, \quad \text{если} \quad (\mu,\nu) \in G^+, \tag{8}$$

и

$$M_{(\mu,\nu)} = 0, \quad \text{если} \quad (\mu,\nu) \in G^0. \tag{9}$$

Далее, для векторов $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, s_j, $t_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, и функции $f \in L_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ положим

$$\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s}) \\ \mathbf{l} \in \rho(\mathbf{t})}} \widehat{f}(\mathbf{k}, \mathbf{l}) e^{i((\mathbf{k},\mathbf{x}) + (\mathbf{l},\mathbf{y}))}$$

и для натуральных чисел n определим следующие тройки функций:

$$f_1^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d_+} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \leq n} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f, \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$f_2^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\|\mathbf{t}\|_1 \leq n} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f, \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$f_3^n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\|\mathbf{t}\|_1 > n} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 > n} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f, \mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Легко видеть, что функции $f_j^n(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ j=1,2,$ могут быть представлены в виде

$$f_j^n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{2^d|Q_n|} u_i^j(\mathbf{x}) v_i^j(\mathbf{y}) \tag{10}$$

с некоторыми $u_i^j,\ v_i^j \in \mathbf{L_q}(\pi_d),\ j=\overline{1,2}$. Таким образом, принимая во внимание (5) и (10), можем записать

$$\tau_{2M}(f)_q \le \tau_M(f_3^m)_q. \tag{11}$$

Соотношение (11) является отправным при установлении оценок сверху для величин $\tau_M(B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta})_{\mathbf{q}}$.

Введем обозначение

$$f_{\mu,\nu}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu \\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Тогда из (11) с учетом соотношений (5), (7) и (10) будем иметь

$$\tau_{2M}(f)_q \le \sum_{(\mu,\nu)\in G} \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q. \tag{12}$$

Чтобы продолжить оценку правой части (12), нам понадобится оценка величины $\|f_{\mu,\nu}\|_2$, которую представим в виде

$$\|f_{\mu,\nu}\|_2 = \left\| \sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu \\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} \delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y}) \right\|_2 = \left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu \\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} \|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu \\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} 2^{2(\rho_1\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\|\mathbf{t}\|_1)} \|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_2^2 2^{-2(\rho_1\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\|\mathbf{t}\|_1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателем $\dfrac{\theta}{2}$ и принимая во внимание соотношение

$$\sum_{\|\mathbf{l}\|_1=n} 2^{-\beta\|\mathbf{l}\|_1} \asymp 2^{-\beta n} n^{d-1}, \beta>0,$$

где $\mathbf{l}=(l_1,\ldots,l_d)$, можем записать

$$\|f_{\mu,\nu}\|_2 \le \left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu \\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} 2^{(\rho_1\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\|\mathbf{t}\|_1)\theta} \|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1=\mu\\ \|\mathbf{t}\|_1=\nu}} 2^{-(\rho_1\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\|\mathbf{t}\|_1)\frac{2\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac12-\frac1\theta} \ll \|f\|_{B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{2},\theta}} 2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)}.$$

Теперь, применяя лемму А к оценке величины $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$, находим

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q \ll \min\left\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\right\} 2^{\frac12(\mu+\nu)}\,(\mu\,\nu)^{\frac{d-1}{2}}\,\|f_{\mu,\nu}\|_2 \ll$$

$$\ll \min\left\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\right\} 2^{\frac12(\mu+\nu)}\,(\mu\,\nu)^{\frac{d-1}{2}}\,2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)} =$$

$$= \min\left\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\right\} 2^{-\left(\rho_1-\frac12\right)\mu}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12\right)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)}. \qquad (13)$$

Далее, из (12), используя оценку (13) и учитывая при этом соотношения (8), (9), касающиеся чисел $M_{(\mu,\nu)}$, получаем

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \sum_{(\mu,\nu)\in G^+} M^{-1}_{(\mu,\nu)}\,2^{-\left(\rho_1-\frac12\right)\mu}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12\right)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)}+$$

$$+\sum_{(\mu,\nu)\in G^0} 2^{-\left(\rho_1-\frac12\right)\mu}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12\right)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)} \ll$$

$$\ll M^{-1}\,2^{-2\alpha m}\sum_{(\mu,\nu)\in G^+} 2^{-\left(\rho_1-\frac12-\alpha\right)\mu}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12-\alpha\right)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)}+$$

$$+\sum_{(\mu,\nu)\in G^0} 2^{-\left(\rho_1-\frac12\right)\mu}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12\right)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)} =: S_1+S_2. \qquad (14)$$

Дополним соотношение (14) оценками слагаемых S_1 и S_2. Выбирая $\alpha>0$ так, чтобы выполнялись неравенства $\rho_1-\dfrac12-\alpha>0$ и $\rho_2-\dfrac12-\alpha>0$ $\Bigl($это возможно, поскольку по условию теоремы $\rho_1>\dfrac12$ и $\rho_2>\dfrac12\Bigr)$, имеем

$$S_1 \ll M^{-1}\,2^{-\left(\rho_1-\frac12\right)m}\,2^{-\left(\rho_2-\frac12\right)m}\,m^{2(d-1)\left(1-\frac1\theta\right)} \asymp$$

$$\asymp 2^{-(\rho_1+\rho_2)m}\,m^{2(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\left(\log^{d-1}M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac2\theta}.$$

Далее, считая для определенности, что $\rho_1\le\rho_2$, и учитывая, что $\lambda>1$, получаем оценку слагаемого S_2 :

$$S_2 \ll 2^{-(\rho_1-\frac12)(2\lambda-1)m}\,2^{-(\rho_2-\frac12)m}\,m^{2(d-1)(1-\frac1\theta)} \ll$$

$$\ll 2^{(\lambda-2(\lambda-1)\rho_1)m}2^{-(\rho_1+\rho_2)m}m^{2(d-1)(1-\frac1\theta)} \asymp$$

$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2+\lambda-2(\lambda-1)\rho_1}(\log^{d-1}M)^{(2\lambda-1)\rho_1+\rho_2+\lambda+2-\frac2\theta} \ll$$

$$\ll M^{-\rho_1-\rho_2}\left(\log^{d-1}M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac2\theta}.$$

Таким образом,

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-\rho_1-\rho_2}\left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Последнее соотношение влечет искомую оценку величины $\tau_M(B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta})_{\mathbf{q}}$ в случае $\mathbf{p}<\mathbf{q}$.

Для завершения доказательства в (4) оценки сверху осталось рассмотреть случай $\mathbf{p}\geq\mathbf{q}$. Заметим, что при этом искомую оценку достаточно получить при $\mathbf{2}\leq\mathbf{p}=\mathbf{q}<\infty$, т.е. для величины $\tau_M(B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta})_{\mathbf{p}}$.

Итак, пусть $f\in B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$, $2\leq\theta<\infty$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$. Тогда, отправляясь от (11), в силу теоремы Б можем записать

$$\tau_{2M}(f)_{\mathbf{p}}\leq\tau_M(f_3^m)_{\mathbf{p}}\leq\left\|\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\right\|_{\mathbf{p}}\ll$$

$$\ll\left\|\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}|\,\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})|^2\right)^{\frac12}\right\|_{\mathbf{p}}=\left\|\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}|\,\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})|^2\right\|_{\frac{\mathbf{p}}{2}}^{\frac12}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}\|\,|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})|^2\,\|_{\frac{\mathbf{p}}{2}}\right)^{\frac12}=\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}\|\,\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}}^2\right)^{\frac12}=:J. \qquad (15)$$

Далее, при $2<\theta<\infty$, как и в предыдущем случае, применяя к последней сумме (15) неравенство Гельдера с показателем $\dfrac{\theta}{2}$, имеем

$$J\ll\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}2^{(\rho_1\,\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\,\|\mathbf{t}\|_1)\theta}\|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}}^{\theta}\right)^{\frac1\theta}\times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}2^{-(\rho_1\,\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\,\|\mathbf{t}\|_1)\frac{2\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac12-\frac1\theta}\ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m}\,m^{2(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)}\asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\left(\log^{d-1}M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

В случае $\theta=2$ из (15) получаем

$$J\leq 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m}\left(\sum_{\substack{\|\mathbf{s}\|_1>m\\ \|\mathbf{t}\|_1>m}}2^{2(\rho_1\,\|\mathbf{s}\|_1+\rho_2\,\|\mathbf{t}\|_1)}\,\|\delta_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|_{\mathbf{p}}^2\right)^{\frac12}\ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m}\, \|f\|_{B^{\rho_1,\,\rho_2}_{\mathbf{p},2}} \le 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2}.$$

Оценки сверху в теореме установлены.

Для доказательства в (4) оценки снизу нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Пусть, по-прежнему, $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_d)$ и $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_d)$, $s_j,\ t_j\in\mathbb{Z}_+,\ j=\overline{1,d}$. Рассмотрим полином $2d$ переменных вида

$$A_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})A_{\mathbf{t}}(\mathbf{y})$$

и для $f\in L^0_{\mathbf{q}}(\pi_{2d})$ положим

$$\mathbb{A}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\,\mathbf{x},\mathbf{y}) = (f * A_{\mathbf{s},\mathbf{t}})(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Для четных чисел n определим множества:

$$\Omega_n = \left\{\mathbf{s}\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n,\ s_j \text{ — четные натуральные числа},\ j=\overline{1,d}\right\},$$
$$Q^*_n = \bigcup_{\mathbf{s}\in\Omega_n}\rho^+(\mathbf{s}),$$

где

$$\rho^+(\mathbf{s}) = \left\{\mathbf{m}=(m_1,\ldots,m_d)\colon 2^{s_j-1}\le m_j < 2^{s_j},\ j=\overline{1,d}\right\}.$$

Из определенного ранее множества $T(Q^*_n,\,Q^*_n,\,2d)$ выделим подмножество тригонометрических полиномов $t(\mathbf{x},\mathbf{y})$ таких, что для $\mathbf{s},\mathbf{t}\in\Omega_n$

$$\left\|\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\rho^+(\mathbf{s})\\ \mathbf{l}\in\rho^+(\mathbf{t})}} \widehat{t}(\mathbf{k},\mathbf{l})\, e^{i((\mathbf{k},\mathbf{x})+(\mathbf{l},\mathbf{y}))}\right\|_\infty \le 1. \tag{16}$$

Обозначим это подмножество через $T\,H(Q^*_n\,\times Q^*_n\,)$.

Для фиксированных постоянных $C_1,\,C_2>0$, по заданному достаточно большому M подберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы выполнялось соотношение $C_1|Q^*_n|\le M\le C_2|Q^*_n|$. Тогда, как показано в [3], для некоторой функции $f\in T\,H(Q^*_n\,\times Q^*_n\,)$ справедлива оценка

$$\tau_M(f)_{\mathbf{2}} \ge C_1(d)|\Omega_n|. \tag{17}$$

Положим

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := C_2(d)2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, f(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{18}$$

Легко убедиться, что при соответствующем выборе положительной постоянной $C_2(d)$ функция $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ принадлежит классу $B^{\rho_1,\rho_2}_{\infty,\theta}$. Действительно, достаточно заметить, что в силу соотношения (16)

$$\left(\sum_{\substack{\mathbf{s}\in\Omega_n\\ \mathbf{t}\in\Omega_n}} 2^{((\mathbf{s},\mathbf{1})\rho_1+(\mathbf{t},\mathbf{1})\rho_2)\theta}\,\|\mathbb{A}_{\mathbf{s},\mathbf{t}}(f,\mathbf{x},\mathbf{y})\|^\theta_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\substack{\mathbf{s}\in\Omega_n \\ \mathbf{t}\in\Omega_n}} 2^{((\mathbf{s},\mathbf{1})\rho_1+(\mathbf{t},\mathbf{1})\rho_2)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp 2^{n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{\frac{2(d-1)}{\theta}},$$

и принять во внимание определение (18).

Таким образом, для функции $g \in B^{\rho_1,\rho_2}_{\infty,\theta}$ с учетом соотношений $|\Omega_n| \asymp n^{d-1}$ и $M \asymp 2^n n^{d-1}$, будем иметь

$$\tau_M(g)_{\mathbf{2}} \asymp 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, \tau_M(f)_{\mathbf{2}} \gg$$
$$\gg 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, |\Omega_n| \asymp 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{(d-1)\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} \asymp$$
$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2} \left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней теорема 1 доказаны.

4. Сингулярные числа интегральных операторов. В настоящем пункте, использовав теорему 1, установим точную по порядку оценку сингулярных чисел интегральных операторов с ядрами из классов $B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{2} \le \mathbf{p} \le \infty,\ 2 \le \theta < \infty$ *и* $\rho_i > 0,\ i = 1, 2$. *Тогда для класса* $B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$ *функций с* $2d$ *переменными имеет место порядковое соотношение*

$$\sup_{f\in B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}} s_M(J_f) \asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}} \left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}. \tag{19}$$

Доказательство. Установим сначала оценку сверху. Пусть $f \in B^{\rho_1,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}$. Тогда согласно теореме А можем записать

$$\tau_M(f)_{\mathbf{2}} \ge \left(\sum_{m=M+1}^{2M} s_m^2(J_f) \right)^{\frac{1}{2}} \ge M^{\frac{1}{2}} s_{2M}(J_f).$$

Отсюда имеем

$$s_{2M}(J_f) \le M^{-\frac{1}{2}} \tau_M(f)_{\mathbf{2}}.$$

Следовательно, воспользовавшись теоремой 1 при $\mathbf{q} = \mathbf{2}$, получим

$$s_{2M}(J_f) \ll M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}} \left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}},$$

и, очевидно, такая же по порядку оценка справедлива и для $s_M(J_f)$.

При доказательстве в (19) оценки снизу используем задействованную в доказательстве теоремы 1 функцию $f \in T\,H(Q_n^*,\, Q_n^*,\, 2d)$ с n, удовлетворяющим неравенству $C_1|Q_n^*| \le M \le \le C_2|Q_n^*|$ для некоторых фиксированных $C_1,\ C_2 > 0$.

Из теоремы А следует соотношение

$$\tau_M(f)_{\mathbf{2}} \le s_{M+1}(J_f)|Q_n^*|^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

сопоставляя которое с (17), имеем

$$s_{M+1}(J_f) \gg |Q_n^*|^{-\frac{1}{2}}\, |\Omega_n|. \qquad (21)$$

Теперь, учитывая, что определенная через функцию $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ соотношением (18) функция $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ принадлежит классу $B^{\rho_1,\rho_2}_{\infty,\theta}$, а $|\Omega_n| \asymp n^{d-1}$ и $|Q_n^*| \asymp 2^n n^{d-1}$, из (21) получаем оценку

$$\sup_{\varphi\in B^{\rho_1,\,\rho_2}_{\mathbf{p},\theta}} s_M(J_\varphi) \gg s_M(J_g) \gg 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, M^{-\frac{1}{2}}\, n^{d-1} \asymp$$

$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}} \left(\log^{d-1} M\right)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Темляков В. Н.* Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **181**. – С. 250 – 267.
2. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 191 – 214.
3. *Темляков В. Н.* Билинейная аппроксимация и близкие вопросы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1992. – **194**. – С. 229 – 248.
4. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
5. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 536 – 551.
6. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского – Бесова // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 5. – С. 685 – 697.
7. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 12. – С. 1681 – 1699.
8. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных // Мат. заметки. – 2013. – **94**, № 3. – С. 401 – 415.
9. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
10. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
11. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 224 с.
12. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2012. – **93.** – 352 с.
13. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. – 1907. – **63**, № 4. – S. 433 – 476.
14. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов. II // Вестн. Ленинград. гос. ун-та. – 1967. – **3**, № 13. – С. 21 – 28.
15. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 1. – С. 17 – 84.
16. *Smithies F.* The eigen-values and singular values of integral equations // Proc. London Math. Soc. (2). – 1937. – **43**. – P. 255 – 279.
17. *Cochran J. A.* Summability of singular values of L^2 kernels. Analogies with Fourier series // Enseign. Math. – 1976. – **22**, № 1-2. – P. 141 – 157.
18. *Пич А.* Собственные числа интегральных операторов // Докл. АН СССР. – 1979. – **247**, № 6. – С. 1324 – 1327.
19. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.

Получено 22.12.15