УДК 517.98+515.164.17

Ю. В. Богданский, Е. В. Моравецкая

(Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ им. И. Сикорского”, Киев)

ТРАНЗИТИВНОСТЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР НА БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С РАВНОМЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ

We perform the analysis of transitivity of associated measures on the surfaces with finite codimension imbedded in a Banach manifold with uniform atlas.

Проведено аналіз транзитивності асоційованих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид з рівномірним атласом.

Работа является логическим продолжением работы [1]. Рассматривается банахово многообразие M с равномерным атласом. На вложенной в M поверхности конечной коразмерности S предложена схема построения поверхностной меры, ассоциированной с заданной на M борелевской мерой μ.

Различные подходы к построению поверхностных мер в линейных топологических пространствах предлагались в работах [2–6]. Конструкция, предложенная в работе [1], является принципиально иной. Оправданием предложенного подхода являются результаты, полученные в работах [7–9] для случая поверхностей коразмерности 1.

В настоящей статье исследован вопрос транзитивности предложенной конструкции.

1. Предварительные сведения (см. [7]). Пусть M — связное хаусдорфово банахово многообразие класса C^2 с модельным вещественным пространством E.

Атлас $\Omega = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\big\}$ на M называем *ограниченным*, если существует число $K > 0$ такое, что отображение склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для каждой пары карт атласа удовлетворяет условию $\big(x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\big) \implies \Big(\big\|F'_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K,\ \big\|F''_{\beta\alpha}(x)\big\| \le K\Big)$. Ограниченные атласы Ω_1 и Ω_2 называем *эквивалентными*, если $\Omega_1 \cup \Omega_2$ снова является ограниченным атласом. Если на M задан класс эквивалентных ограниченных атласов, то говорим, что на M задана *ограниченная структура* (класса C^2).

Пусть (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2) — два банаховых многообразия M_1 и M_2 класса C^2 с модельными пространствами E_1 и E_2 и ограниченными атласами Ω_1 и Ω_2 соответственно. Отображение $f\colon M_1 \to M_2$ класса C^2 назовем *ограниченным морфизмом*, если для него существует такое число $C > 0$, что для любой пары карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ и $(V, \psi) \in \Omega_2$ выполнено условие $\big(p \in U, f(p) \in V\big) \implies \Big(\big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(k)}\big(\varphi(p)\big)\big\| \le C,\ k = 1, 2\Big)$. Естественным образом определен *ограниченный изоморфизм* (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2).

Свойство отображения f быть ограниченным морфизмом не зависит от выбора представителей в классах эквивалентных ограниченных атласов исходных многообразий, и можно говорить о категории банаховых многообразий класса C^2 с ограниченной структурой.

Задание на M ограниченного атласа позволяет ввести на M метрику. Для кусочно-гладкой кривой $[t_1, t_2] \ni t \mapsto x(t) \in M$ рассматриваем всевозможные разбиения $\Delta\colon t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_m = t_2$ отрезка параметра, при которых каждая кривая $\Gamma_k = \big\{x(t) \mid \tau_{k-1} \le t \le \tau_k\big\}$

лежит в области определения U_k одной из карт (U_k, φ_k) исходного атласа. Каждому такому разбиению Δ сопоставляем число $l(\Gamma;\Delta) = \sum_{k=1}^{m} l(\Gamma_k)_{\varphi_k}$ $\Bigl($здесь $l(\Gamma_k)_\varphi$ — длина представления кривой Γ_k в карте φ: $\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \bigl\|(x_\varphi)'(\tau)\bigr\|\,d\tau;\ x_\varphi(\tau) = \varphi\bigl(x(\tau)\bigr)\Bigr)$. Ограниченность атласа приводит к корректному определению длины кривой Γ: $L(\Gamma) = \sup\limits_{\Delta}\bigl\{l(\Gamma;\Delta)\bigr\}$. Расстояние между точками вводим как точную нижнюю грань длин всевозможных кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки.

Полученная метрика согласована с исходной топологией. При переходе к эквивалентному ограниченному атласу метрика заменяется на эквивалентную (существуют такие $C_1, C_2 > 0$, что для любых $x, y \in M: C_1\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le C_2\rho_1(x,y)\bigr)$. Ограниченный морфизм $f: (M_1,\Omega_1) \to (M_2,\Omega_2)$ при фиксированных ограниченных атласах Ω_1 и Ω_2 является липшицевым отображением относительно метрик, порожденных этими атласами.

Фиксация ограниченного атласа позволяет ввести в касательном пространстве T_pM к многообразию M норму, эквивалентную норме модельного пространства. Для $\xi \in T_pM$ положим $|||\xi|||_p = \sup_\alpha \|\xi_{\varphi_\alpha}\|$, где $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ — полный набор карт, для которых $p \in U_\alpha$, а $\xi_\varphi \in E$ — представление касательного вектора ξ в карте φ. При этом имеет место свойство *равномерного топологического изоморфизма* пространств T_pM и модельного пространства E: $\|\xi_\varphi\| \le |||\xi|||_p \le K\|\xi_\varphi\|$, где K — постоянная из определения ограниченного атласа, а φ — карта в точке $p \in M$.

На многообразии с ограниченным атласом (M,Ω) корректно задание *ограниченного* тензорного поля T класса C^1. Предполагается существование числа $C > 0$, ограничивающего сверху норму главной части T_α каждого локального представления тензора T вместе с нормой ее производной: $\bigl((U_\alpha,\varphi_\alpha) \in \Omega;\ x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)\bigr) \Longrightarrow \Bigl(\bigl\|T_\alpha(x)\bigr\| \le C;\ \bigl\|T'_\alpha(x)\bigr\| \le C\Bigr)$. Свойство ограниченности тензорного поля инвариантно относительно перехода к эквивалентному ограниченному атласу. Такие тензорные поля в дальнейшем называем тензорными полями класса $C_b^1(M)$. Естественным образом определяем гладкие функции класса $C_b^p(M)$, $p = 0,1,2$, $C_b(M) = C_b^0(M)$. Кроме того, подобные обозначения будут применяться и для открытых подмножеств $U \subset M$, а также без указания области определения полей. Указанный класс полей также инвариантен относительно перехода к эквивалентному атласу.

Ограниченный атлас Ω называем *равномерным*, если существует такое число $r > 0$, что для любой точки $p \in M$ существует карта $(U,\varphi) \in \Omega$, для которой $\varphi(U)$ содержит шар в E с центром $\varphi(p)$ радиуса r [10, 11].

Метрика на M, порожденная равномерным атласом, превращает M в полное метрическое пространство. Если ограниченный атлас эквивалентен равномерному, то метрика, порожденная этим атласом, также является полной. Если среди эквивалентных атласов, задающих на M ограниченную структуру, есть равномерный атлас, то эту структуру будем называть *равномерной*. Структуры ограниченно изоморфных многообразий одновременно равномерны или нет.

В случае равномерного атласа поток $\Phi(t,x)$ векторного поля X класса $C_b^1(M)$ определен на $\mathbb{R}\times M$ [10, c. 96]. Следовательно, данное свойство имеет место на многообразии с равномерной структурой.

Примером банахова многообразия класса C^2, допускающего равномерный атлас, является поверхность уровня S гладкой функции F в гильбертовом пространстве. Если F принадлежит классу C_b^2 в некоторой окрестности S и $\inf\limits_S \|F'(\cdot)\| > 0$, то в качестве равномерного атласа на S можно предложить $\Omega = \{(U_x, \varphi_x) \mid x \in S\}$, где φ_x — ортогональная проекция окрестности в S точки x на касательное пространство T_xS.

Если (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2) — банаховы многообразия с ограниченными атласами и модельными пространствами E_1 и E_2, то на $M_1 \times M_2$ определен атлас $\Omega_1 \times \Omega_2 := \{(U \times V, \varphi \times \psi) \mid (U, \varphi) \in \Omega_1;\ (V, \psi) \in \Omega_2\}$. Получаем многообразие с ограниченным атласом $(M_1 \times M_2, \Omega_1 \times \Omega_2)$ и модельным пространством $E_1 \dotplus E_2$. Если V — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, то для многообразия с ограниченным атласом (M, Ω) ограниченную структуру на $M \times V$ условимся задавать атласом $\Omega \times id = \{(U \times V, \varphi \times id) \mid (U, \varphi) \in \Omega\}$.

2. Вложенные поверхности. В соответствии с определением 1 из [1] вложенную в M поверхность Σ коразмерности m определяем следующим образом.

Пусть N_1 — многообразие с ограниченной структурой, модельное пространство которого E_1 является подпространством в E коразмерности m (в дальнейшем E отождествляем с $E_1 \dotplus \mathbb{R}^m$); V_1 — открытая окрестность нуля $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ и $g_1 : N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм на открытое подмножество U в M. При этом $\Sigma = g_1\big(N_1 \times \{\vec{0}\}\big)$.

Желание не ограничиваться рассмотрением замкнутых поверхностей приводит к необходимости рассмотрения специального класса подмножеств Σ. В дальнейшем фиксируем на M ограниченный атлас Ω. Тем самым на M индуцируется внутренняя метрика ρ. Для $\varepsilon > 0$ множество $\Sigma_{-\varepsilon}$ определено формулой

$$\Sigma_{-\varepsilon} = \Sigma \bigcap \{x \mid \rho(x, M \setminus U) \geq \varepsilon\}. \tag{1}$$

$\Sigma_{-\varepsilon}$ замкнуто в M, $\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_{-1/n}$, существует $\alpha > 0$ такое, что для $\varepsilon \in (0, \alpha)$: $\Sigma_{-\varepsilon} \neq \varnothing$. В случае замкнутой поверхности на многообразии с равномерной структурой для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\Sigma_{-\varepsilon} = \Sigma$.

Поверхность Σ естественным образом наделяется структурой банахова многообразия с ограниченным атласом. Если Ω_1 — ограниченный атлас на N_1, то карта $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U} \to E_1$ атласа Ω_1 индуцирует на M карту

$$\varphi = (\widetilde{\varphi} \times id) \circ (g_1)^{-1} : g_1\big(\widetilde{U} \times V\big) \to \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times V \subset E,$$

согласованную с атласом Ω.

Ограничения карт на Σ $\left(\varphi\big|_\Sigma : g_1\left(\widetilde{U} \times \{\vec{0}\}\right) \to \widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) \times \{\vec{0}\} \subset E_1\right)$ образуют ограниченный атлас Ω_Σ на Σ (образ атласа Ω_1 при изоморфизме g_1).

Пусть теперь S — вложенная в Σ поверхность коразмерности n. Покажем, что S является вложенной в M поверхностью коразмерности $m + n$.

Обозначим через g_2 ограниченный изоморфизм, определяющий вложение S в Σ: $g_2 : N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$. Здесь V_2 — открытая окрестность нуля $\mathbb{R}^n$, U_1 открыто в Ω. Без потери общности считаем, что $E = E_1 \dotplus \mathbb{R}^m = E_2 \dotplus \mathbb{R}^{m+n}$, где E_2 — модельное пространство многообразия N_2.

Ограниченный изоморфизм

$$h : N_2 \times V_2 \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M, \tag{2}$$

определяющий вложение S в M, строим как композицию трех ограниченных изоморфизмов:

$$g_2 \times id\colon N_2 \times V_2 \times V_1 \to U_1 \times V_1 \subset \Sigma \times V_1,$$

$$\left(P_1 \circ \left(g_1\big|_{N_1 \times \{\vec{0}\}}\right)^{-1}\right) \times id\colon U_1 \times V_1 \to \widehat{U} \times V_1 \subset N_1 \times V_1$$

(здесь $P_1 : N_1 \times V_1 \to N_1$ — проекция на первый сомножитель; $\widehat{U}$ — открытое подмножество в N_1, содержащее образ $N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ при действии композиции указанных изоморфизмов) и, наконец,

$$g_1 : N_1 \times V_1 \to U \subset M.$$

При этом $h\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^{m+n}}\}\big) = g_2\big(N_2 \times \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\}\big) = S$ и $\widetilde{U} = h(N_2 \times V_2 \times V_1)$ открыто в M, $\widetilde{U} \subset U$.

Для $\varepsilon > 0$ в соответствии с формулой (1) определено $S_{-\varepsilon} = S \bigcap \big\{x \mid \rho(x, M \setminus \widetilde{U}) \geq \varepsilon\big\}$. Следствием вложений $S \subset \Sigma$ и $\widetilde{U} \subset U$ является вложение

$$S_{-\varepsilon} \subset \Sigma_{-\varepsilon}. \tag{3}$$

3. Ассоциированные формы поверхностей. Пусть Σ — вложенная в M поверхность коразмерности m, S — вложенная в Σ поверхность коразмерности n. Тогда, как показано в п. 2, S представляет собой вложенную в M поверхность коразмерности $m + n$.

Пусть α — ассоциированная m-форма вложения поверхности Σ в M. Согласно определению из работы [1], α — дифференциальная m-форма, определенная на U (или, возможно, на большем открытом подмножестве M) класса C_b^1 такая, что для любой точки $x \in \Sigma$ касательное пространство $T_x\Sigma$ является ассоциированным подпространством внешней формы $\alpha(x)$ в пространстве T_xM $\big($иными словами, $T_x\Sigma = \big\{Y \in T_xM \mid i_Y\alpha(x) = 0\big\}$, где i_Y — внутреннее умножение внешней формы на вектор $Y\big)$. При этом для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\big(\varepsilon \in (0, r)\big)$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ и карты $(W, \varphi) \in \Omega$ в точке x (т. е. $x \in W$) для представления α в этой карте имеет место неравенство $\big\|\alpha_\varphi\big(\varphi(x)\big)\big\| \geq \delta$.

Определение ассоциированной формы инвариантно относительно перехода к эквивалентному ограниченному атласу.

Пусть, далее, β — дифференциальная n-форма класса C_b^1 на $\widetilde{U}$ (см. (2)), ограничение которой $\widetilde{\beta}$ на $\Sigma \cap \widetilde{U}$ совпадает с ассоциированной n-формой вложения поверхности S в Σ.

В работе [1] доказано существование ассоциированной формы вложения Σ в M (а также вложения S в Σ). Поясним существование формы β. Если $\widetilde{\beta}$ — ассоциированная форма вложения S в Σ, то $g_2^*\widetilde{\beta}$ — ассоциированная форма вложения $N_2 \times \{\vec{0}\}$ в $N_2 \times V_2$. Обозначив через P канонический проектор $N_2 \times V_2 \times V_1$ на $N_2 \times V_2$, искомую форму β получим по формуле $\beta = \left(h^{-1}\right)^* P^* g_2^* \widetilde{\beta}$, где h определено формулой (2). Заметим также (смысл этого замечания прояснится в конце статьи), что если n-форма $\widetilde{\beta}$ замкнута, то и n-форма β тоже замкнута.

Лемма 1. *Определенная на $\widetilde{U}$ дифференциальная $(m + n)$-форма $\omega = \alpha \wedge \beta$ является ассоциированной формой вложения S в M.*

Доказательство. Необходимо проверить два факта:

а) для каждой точки $x \in S$ и вектора $Y \in T_xM$ выполнено условие $(Y \in T_xS) \iff \iff \big(i_Y\omega(x) = 0\big)$;

б) для заданного ограниченного атласа Ω на M существует такое $r > 0$, что для каждого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется $\delta > 0$, для которого при всех $x \in S_{-\varepsilon}$ и карты $(U, \varphi) \in \Omega$ в точке x выполнена оценка $\big\|\omega_\varphi\big(\varphi(x)\big)\big\| \geq \delta$.

Первое из условий сводится в карте к следующему. Пусть E_1 — подпространство в E коразмерности m; внешняя m-форма α на E такова, что для вектора $X \in E$ выполнено соотношение $(X \in E_1) \iff \big(i_X\alpha = 0\big)$; E_2 — подпространство в E_1 коразмерности n; β — внешняя n-форма в E, для которой $\widetilde{\beta} = \beta\big|_{E_1}$ имеет свойство: для $Y \in E_1$ выполнено соотношение $(Y \in E_2) \iff \big(i_Y\widetilde{\beta} = 0\big)$. Для $Y \in E$ необходимо проверить, что $(Y \in E_2) \iff$ $\iff \big(i_Y(\alpha \wedge \beta) = 0\big)$.

Воспользуемся равенством

$$i_Y(\alpha \wedge \beta) = (i_Y\alpha) \wedge \beta + (-1)^m \alpha \wedge i_Y\beta. \tag{4}$$

Пусть сначала $Y \notin E_1$, $E = E_1 \dotplus L_1 = E_2 \dotplus L_2 \dotplus L_1$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в L_2, $\{e_{n+1}, \ldots$ $\ldots, e_{n+m}\}$ — базис в L_1. Разложение в прямую сумму и базисы выберем таким образом, чтобы $Y = e_{n+m}$. В результате получим

$$i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1}) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!\, n!} \sum_{\sigma \in S_{m+n-1}} \eta(\sigma)\, \alpha(Y, e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m-1)})\beta(e_{\sigma(m)}, \ldots, e_{\sigma(m+n-1)}) +$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{(n-1)!\, m!} \sum_{\sigma \in S_{m+n-1}} \eta(\sigma)\, \alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)})\beta(Y, e_{\sigma(m+1)}, \ldots, e_{\sigma(m+n-1)}), \tag{5}$$

где $\eta(\sigma)$ — знак подстановки σ.

В каждом слагаемом последней суммы правой части равенства (5) среди векторов $e_{\sigma(1)}, \ldots$ $\ldots, e_{\sigma(m)}$ есть по крайней мере один вектор базиса $L_2 \subset E_1$. Поэтому $\alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}) = 0$ для всех $\sigma \in S_{m+n-1}$. В первой сумме правой части равенства (5) не равными нулю могут быть лишь те слагаемые, для которых выполнено соотношение $(1 \le k \le m-1) \Longrightarrow \big(n+1 \le$ $\le \sigma(k) \le m+n-1\big)$, причем эти слагаемые попарно равны. Отсюда получаем

$$\big|i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1})\big| = \big|\alpha(e_{m+n}, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m-1})\big|\big|\beta(e_1, \ldots, e_n)\big| \ne 0.$$

Пусть теперь $Y \in E_1 \setminus E_2$. В разложении $E = E_1 \dotplus L_1 = E_2 \dotplus L_2 \dotplus L_1$ базисы выберем следующим образом: $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — базис в L_1, $\{e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ — базис в L_2. Разложение в прямую сумму и базисы выбираем таким образом, чтобы $Y = e_{m+n}$.

Теперь $i_Y\alpha = 0$ и в равенстве (5) первая сумма в правой части равна нулю. Во второй сумме не равными нулю могут быть лишь те слагаемые, для которых выполнено соотношение $(1 \le k \le m) \Longrightarrow \big(1 \le \sigma(k) \le m\big)$, и все они равны между собой. Поэтому

$$\big|i_Y(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m-1})\big| = \big|\alpha(e_1, \ldots, e_m)\big|\big|\beta(e_{m+n}, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n-1})\big| \ne 0.$$

В случае, когда $Y \in E_2$, из (4) следует, что $i_Y(\alpha \wedge \beta) = 0$.

При проверке второго условия следует учесть, что, как доказано выше, при достаточно малом $r > 0$ для $\varepsilon \in (0, r)$ имеет место вложение $S_{-\varepsilon} \subset \Sigma_{-\varepsilon}$, поэтому также допустимо локальное исследование, приводящее, в прежних обозначениях, к оценке снизу нормы $\|\alpha \wedge \beta\|$, где α и $\widetilde{\beta}$ — внешние формы, определенные соответственно на E и E_1. При этом предполагается, что $\|\alpha\|_E \ge \delta > 0$, $\|\widetilde{\beta}\|_{E_1} \ge \delta > 0$. Покажем (и этого достаточно), что $\|\alpha \wedge \beta\|_E \ge \delta^2$.

Возьмем $\xi > 0$ и векторы $e_1, \ldots, e_m \in E$, для которых $\|e_1\| = \ldots = \|e_m\| = 1$ и $\left|\alpha(e_1, \ldots, e_m)\right| \geq \delta - \xi$; $e_{m+1}, \ldots, e_{m+n} \in E_1$, для которых $\|e_{m+1}\| = \ldots = \|e_{m+n}\| = 1$ и $\left|\widetilde{\beta}(e_{m+1}, \ldots, e_{m+n})\right| \geq \delta - \xi$. Тогда

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m}) = \frac{1}{m!\, n!} \sum_{\sigma \in S_{m+n}} \eta(\sigma)\, \alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}) \beta(e_{\sigma(m+1)}, \ldots, e_{\sigma(m+n)}) =$$

$$= \alpha(e_1, \ldots, e_m) \widetilde{\beta}(e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}) \tag{6}$$

(здесь учтено, что $i_Y \alpha = 0$ для $Y \in E_1$). Поэтому $\left|(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{n+m})\right| \geq (\delta - \xi)^2$, что и доказывает утверждение вследствие произвольности $\xi > 0$.

Лемма 1 доказана.

4. Трансверсальные наборы векторных полей. Пусть Σ — вложенная в M поверхность коразмерности m, $g_1 : N_1 \times V_1 \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложение Σ в M, и $\vec{Z} := \{Z_1, \ldots, Z_m\}$ — набор определенных на U (или, возможно, на большем открытом подмножестве M) векторных полей класса C^1_b. Согласно определению 3 работы [1], набор полей $\vec{Z}$ называем строго трансверсальным к Σ, если для некоторой (а значит, и для любой) ассоциированной m-формы ω поверхности Σ выполнено следующее условие: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in \Sigma_{-\varepsilon}$ имеет место неравенство $\left|\omega(\vec{Z})(x)\right| = \left|\omega(Z_1, \ldots, Z_m)(x)\right| \geq \delta$.

Пусть $\widetilde{\Sigma}$ — открытое подмножество в Σ. Тогда $\widetilde{\Sigma}$ также представляет собой вложенную в M поверхность с определяющим ее изоморфизмом $g_1 : \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset M$. При этом $\widetilde{N_1} \subset N_1$, $\widetilde{g_1}$ — ограничение g_1, $\widetilde{U}$ — открытое подмножество в U. Если m-форма ω ассоциирована с Σ, то она ассоциирована и с $\widetilde{\Sigma}$. Если набор векторных полей $\{Z_1, \ldots, Z_m\}$ строго трансверсален к Σ, то он строго трансверсален и к $\widetilde{\Sigma}$.

Лемма 2. *Пусть Σ — вложенная в M поверхность коразмерности m, S — поверхность, вложенная в Σ коразмерности n (относительно вложения в Σ). Пусть $g_1 : N_1 \times V_1 \to U \subset M$, $g_2 : N_2 \times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ — определяющие их ограниченные изоморфизмы, $\widetilde{g_1} : \widetilde{N_1} \times V_1 \to \widetilde{U} \subset \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложенную поверхность U_1. Пусть $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_{m+n}\}$ — набор определенных на $\widetilde{U}$ попарно коммутирующих векторных полей класса $C^1_b(\widetilde{U})$, строго трансверсальный к S, причем поля $X_1, \ldots, X_n$ касательны к поверхности U_1, а поднабор полей $\widetilde{\vec{X}} = \{X_{n+1}, \ldots, X_{m+n}\}$ строго трансверсален к U_1. Тогда набор $\vec{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ ограничений на U_1 векторных полей X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, представляет собой набор попарно коммутирующих полей класса $C^1_b(U_1)$, строго трансверсальный к S при ее вложении в Σ.*

Доказательство. Пусть β — дифференциальная n-форма на $\widetilde{U}$, ограничение которой $\widetilde{\beta}$ на $\Sigma \cap \widetilde{U}$ является ассоциированной n-формой поверхности S при ее вложении в Σ (см. п. 3).

Возьмем $\varepsilon > 0$. Согласно (3) $S_{-\varepsilon} \subset \Sigma_{-\varepsilon}$.

Если α — ассоциированная форма вложения Σ в M, то, согласно лемме 1, $\alpha \wedge \beta$ — ассоциированная форма вложения S в M. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in S_{-\varepsilon}$ выполнено неравенство

$$\left|(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_{m+n})(x)\right| \geq \delta.$$

Поскольку $\alpha(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m})(x) = 0$ для $x \in \Sigma$, если $i_k \leq n$ для некоторого k, то для $x \in S$ имеют место равенства

$$\big|(\alpha\wedge\beta)(X_1,\ldots,X_{m+n})(x)\big| = \big|\alpha(X_{n+1},\ldots,X_{m+n})(x)\big|\big|\beta(X_1,\ldots,X_n)(x)\big| =$$
$$= \big|\alpha(X_{n+1},\ldots,X_{m+n})(x)\big|\big|\widetilde{\beta}(Y_1,\ldots,Y_n)(x)\big|. \qquad (7)$$

А поскольку формы α и β ограничены на M, то из (7) следует неравенство

$$\inf_{x\in S_{-\varepsilon}}\big|\widetilde{\beta}(Y_1,\ldots,Y_n)(x)\big| > 0.$$

Коммутируемость полей Y_k следует из коммутируемости их потоков.

Лемма 2 доказана.

Простейший модельный пример выполнения условий леммы 2 строим по следующей схеме.

Пусть $g_1 : N_1\times V_1 \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий поверхность Σ. Если S — поверхность, вложенная в Σ, и $g_2 : N_2\times V_2 \to U_1 \subset \Sigma$ — соответствующий ограниченный изоморфизм, определяющий S, то существует строго трансверсальное к S (при вложении в Σ) семейство попарно коммутирующих векторных полей $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$, определенных на U_1 (см. [1]). Пусть $\{\widetilde{Y_1},\ldots,\widetilde{Y_n}\}$ — $\widetilde{g_1}$-связанные с $\{\widetilde{Y_1,\ldots,Y_n}\}$ векторные поля, определенные на $\widetilde{N_1}\times\{\vec{0}\}$. Определим векторные поля $\widetilde{X_1},\ldots,\widetilde{X_{n+m}}$ на $\widetilde{N_1}\times V_1$ по правилу $\widetilde{X_k}$ — P_1-связано с $\widetilde{Y_k}$, $k=1,\ldots,n$ (P_1 — проектор $\widetilde{N_1}\times V_1$ на первый сомножитель), $X_{n+k}=\dfrac{\partial}{\partial t_k}$, $k=1,2,\ldots,m$.

Тогда искомые векторные поля $X_1,\ldots,X_{n+m}$ получаем как $\widetilde{g_1}$-связанные с полями $\widetilde{X_1},\ldots$ $\ldots,\widetilde{X_{n+m}}$.

5. Согласованность поверхностных мер первого типа. Напомним определение поверхностной меры первого типа [1].

Пусть μ — конечная борелевская мера на M; Σ — вложенная в M поверхность коразмерности m; $g_1 : N_1\times V_1 \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложение Σ в M; $\vec{X}=\{X_1,\ldots,X_m\}$ — строго трансверсальный к Σ набор попарно коммутирующих векторных полей класса $C^1_b(U)$. Предполагается, что набор векторных полей $\vec{X}$ удовлетворяет следующему условию: отображение $\Phi\colon \Sigma\times\mathbb{R}^m \ni (x,\vec{t}) \mapsto \Phi^{\vec{X}}_{\vec{t}}x \in \Phi^{\vec{X}}_{\mathbb{R}^m}\Sigma$ определено и взаимно однозначно. В частности, данное условие предполагает полноту векторных полей X_k. Модельный пример набора векторных полей $\vec{X}$, удовлетворяющего данному требованию, приведен в примере 1 из [1]. Тройку $(\Sigma,\vec{X},\mu)$ называем согласованной, если для любой подстановки τ степени m определена мера $d_{X_{\tau(1)}}d_{X_{\tau(2)}}\ldots d_{X_{\tau(m)}}\mu$ (а значит, не зависящая от τ).

Пусть $\varepsilon>0$. Если B — борелевское множество в $\mathbb{R}^m$, A — борелевское в $\Sigma_{-\varepsilon}$, то на борелевской σ-алгебре подмножеств малой окрестности $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ для каждого $A\in\mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$ определена мера ω_A формулой $\omega_A(B)=\mu\Big(\Phi^{\vec{X}}_B A\Big)$.

В случае согласованной тройки $(\Sigma,\vec{X},\mu)$ определено

$$\sigma_{\vec{X}}(A) := \lim_{r\to 0+}\frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)},$$

где $B_r=\big\{\vec{t}\mid \|\vec{t}\|\le r\big\}$, λ_m — лебегова мера в $\mathbb{R}^m$, $\sigma_{\vec{X}}$ — мера на $\mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$, при этом

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1}d_{X_2}\ldots d_{X_m}\mu)(\widehat{A}), \qquad \text{где} \quad \widehat{A}=\Phi^{X_1}_{(-\infty,0]}\Phi^{X_2}_{(-\infty,0]}\ldots\Phi^{X_m}_{(-\infty,0]}A. \qquad (8)$$

Вследствие произвольности $\varepsilon>0$ и равенства $\Sigma=\cup_{n=1}^{\infty}\Sigma_{-1/n}$ получаем меру $\sigma_{\vec{X}}=\sigma_{\vec{X}}[\mu]$ на $\mathcal{B}(\Sigma)$.

Заметим, что если $\widetilde{\Sigma}$ — открытое подмножество в Σ, то из согласованности тройки $(\Sigma, \vec{X}, \mu)$ следует согласованность тройки $(\widetilde{\Sigma}, \vec{X}, \mu)$, и при этом сужение меры $\sigma_{\vec{X}}[\Sigma]$ на $\widetilde{\Sigma}$ совпадает с поверхностной мерой $\sigma_{\vec{X}}[\widetilde{\Sigma}]$, построенной для вложенной в M поверхности $\widetilde{\Sigma}$. Поэтому, не теряя общности, в дальнейшем будем предполагать, что множеством U_1 является вся поверхность Σ.

Теорема 1. *Пусть в условиях леммы* 2 *тройка* $(S, \vec{X}, \mu)$ *согласована. Тогда согласованы тройки* $(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu)$, $(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}})$, *и при этом*

$$\sigma_{\vec{X}} = \sigma_{\vec{Y}}\left[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right]. \tag{9}$$

Доказательство. Взаимная однозначность отображения $\Phi^{\widetilde{\vec{X}}}$ следует из соответствующего условия для набора $\vec{X}$. Поэтому в силу леммы 2 для проверки согласованности тройки $\left(\Sigma, \widetilde{\vec{X}}, \mu\right)$ следует убедиться лишь в существовании $d_{X_{\tau(n+1)}} d_{X_{\tau(n+2)}} \ldots d_{X_{\tau(n+m)}} \mu$ для любой подстановки τ множества $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Но этот факт следует из аналогичного условия вследствие согласованности тройки $\left(S, \vec{X}, \mu\right)$.

При этом для $A \in \mathcal{B}(\Sigma_{-\varepsilon})$ получим

$$\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}(A) = (d_{X_{n+1}} d_{X_{n+2}} \ldots d_{X_{n+m}} \mu)(\widehat{A}), \qquad \text{где} \quad \widehat{A} = \Phi^{\widetilde{\vec{X}}}_{\times(-\infty,0]} A \quad (\text{см. } (8)). \tag{10}$$

Перейдем к проверке согласованности тройки $\left(S, \vec{Y}, \sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right)$. Поскольку, согласно условию согласованности тройки $\left(S, \vec{X}, \mu\right)$, траектории $\Phi_t^{X_k}(\cdot)$ векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ определены при всех $t \in \mathbb{R}$, то это же свойство сохраняется и для полей $Y_1, \ldots, Y_n$.

В силу коммутируемости векторных полей семейства $\vec{X}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\widehat{\Phi_t^{Y_k} A} = \Phi_t^{X_k} \widehat{A} \qquad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{B}(\Sigma) \quad (\text{см. } (8)). \tag{11}$$

Поэтому из (10) следует существование $d_{Y_{\tau(1)}} d_{Y_{\tau(2)}} \ldots d_{Y_{\tau(n)}} \sigma_{\widetilde{\vec{X}}}$, так как для $A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ в силу (10), (11) выполнено равенство

$$\left(d_{Y_{\tau(1)}} \ldots d_{Y_{\tau(n)}} \sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right)(A) = \left(d_{X_{\tau(1)}} \ldots d_{X_{\tau(n)}} d_{X_{n+1}} \ldots d_{X_{n+m}} \mu\right)(\widehat{A}). \tag{12}$$

Перейдем к проверке равенства (9). Пусть $A \in \mathcal{B}(S)$. Тогда

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = (d_{X_1} \ldots d_{X_{n+m}} \mu)(\widehat{\widehat{A}}), \qquad \text{где} \quad \widehat{\widehat{A}} = \Phi^{X_1}_{(-\infty,0]} \Phi^{X_2}_{(-\infty,0]} \ldots \Phi^{X_{m+n}}_{(-\infty,0]} A. \tag{13}$$

Если $\widetilde{A} = \Phi^{X_1}_{(-\infty,0]} \Phi^{X_2}_{(-\infty,0]} \ldots \Phi^{X_n}_{(-\infty,0]} A \in \mathcal{B}(\Sigma)$, то $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{\widetilde{A}}$, и в силу (12), (13) получаем

$$\sigma_{\vec{X}}(A) = \left(d_{Y_1} \ldots d_{Y_n} \sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right)(\widetilde{A}) = \sigma_{\vec{Y}}\left[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right](A).$$

Теорема 1 доказана.

6. Согласованность поверхностных мер второго типа. Следующая конструкция предполагает неотрицательность меры μ и задание на M равномерного атласа.

Если α — ассоциированная m-форма вложенной в M поверхности Σ, а тройка $\left(\Sigma, \vec{X}, \mu\right)$ согласована, то мера μ_α на Σ вводится формулой $\mu_\alpha = \dfrac{1}{\left|\alpha(\vec{X})\right|}\, \sigma_{\vec{X}}$. Это определение корректно, так как инвариантно относительно перехода к другой согласованной тройке $\big(\Sigma, \vec{Z}, \mu\big)$ (см. [1], теорема 3).

Пусть S — поверхность, вложенная в Σ, коразмерность вложения в Σ равна n и β — дифференциальная n-форма класса C_b^1 на $\widetilde{U}$, ограничение которой $\widetilde{\beta}$ на Σ является ассоциированной формой вложения S в Σ. Согласно лемме 1, $(m+n)$-форма $\alpha \wedge \beta$ — ассоциированная форма вложения S в M.

Поскольку поверхность S вложена в многообразие M, имеющее равномерную структуру, то на ней также корректно определена мера $\mu_{\alpha\wedge\beta}$. Атлас на Σ, согласованный с вложением Σ в M, вообще говоря, равномерным не является. Тем не менее в силу вложения (3) применима лемма 5 из работы [1], в силу которой переход от меры ν на поверхности Σ к индуцированной вложением S в Σ мере $\nu_{\widetilde{\beta}}$ корректен $\left(\nu_{\widetilde{\beta}}\right.$ вводится формулой $\nu_{\widetilde{\beta}} = \dfrac{1}{\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|}\, \sigma_{\vec{Y}}[\nu]$ инвариантно относительно перехода к другой согласованной тройке $\left.\Big(S, \widetilde{\vec{Y}}, \nu\Big)\right)$.

Лемма 3. *Пусть тройка $\big(S, \vec{Z}, \mu\big)$ согласована, функция $\widehat{f}$ определена в области задания векторных полей семейства $\vec{Z}$ и принадлежит классу C_b^1, $\widehat{f}$ является первым интегралом полей Z_k набора $\vec{Z}$ и $\widehat{f}\,\big|_S = f$. Тогда тройка $\big(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu\big)$ согласована и имеет место равенство*

$$\sigma_{\vec{Z}}\big[\widehat{f}\cdot\mu\big] = f\cdot\sigma_{\vec{Z}}[\mu]. \tag{14}$$

Доказательство. Для проверки согласованности тройки $\big(S, \vec{Z}, \widehat{f}\cdot\mu\big)$ достаточно проверить существование меры $d_{X_{\tau(1)}} d_{X_{\tau(2)}} \ldots d_{X_{\tau(m)}}\big(\widehat{f}\cdot\mu\big)$ для любой подстановки τ степени m. Поскольку $\widehat{f}$ является первым интегралом каждого векторного поля X_k, то для каждого k имеет место равенство $d_{Z_k}\big(\widehat{f}\nu\big) = \widehat{f} d_{Z_k}\nu$ (если $d_{Z_k}\nu$ существует). Повторное применение данного равенства позволяет сделать вывод о том, что переход от меры μ к мере $\widehat{f}\cdot\mu$ сохранит согласование тройки.

Для получения формулы (14) зафиксируем $\varepsilon > 0$ и заметим, что в силу утверждения б) теоремы 1 из работы [1] существуют окрестности W и W_1 нуля в $\mathbb{R}^m$, для которых $\Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon/4} \supset \supset g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$ $\big($здесь $N_{-\varepsilon}\times\{\vec{0}\} := g^{-1}(S_{-\varepsilon})\big)$. Кроме того, значение меры $\sigma_{\vec{Z}}[\mu]$ на $S_{-\varepsilon}$ полностью определено значением меры μ и векторных полей в окрестности $S_{-\varepsilon}$ вида $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$.

Пусть h — кусочно-постоянная борелевская функция на $S_{-\varepsilon/4}$, $h = \sum_{k=1}^p c_k j_{A_k}$, где $A_k \in \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon/4})$, $S_{-\varepsilon/4} = \displaystyle\bigvee_{k=1}^p A_k$. Продолжая функцию h до функции, постоянной на траекториях векторных полей набора $\vec{Z}$, получаем корректно определенную в $g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$ борелевскую функцию $\widehat{h}$ и соответствующую меру $\widehat{h}\cdot\mu$.

Уменьшив, если необходимо, окрестность W нуля $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$, добьемся вложения $\Phi_W^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon} \subset \subset g(N_{-\varepsilon/2}\times W_1)$ (см. [1]). Если $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$, $B\in\mathcal{B}(W)$, то

$$\big(\widehat{h}\cdot\mu\big)\big(\Phi_B^{\vec{Z}} A\big) = \sum_{k=1}^p c_k \mu\Big(\Phi_B^{\vec{Z}}(A\cap A_k)\Big) = \sum_{k=1}^p c_k\, w_{A\cap A_k}(B),$$

$$\sigma_{\vec{Z}}\big[\,\widehat{h}\cdot\mu\big](A)=\sum_{k=1}^{p}c_k\,\sigma_{\vec{Z}}[\mu](A\cap A_k)=\int\limits_A h\,d\sigma_{\vec{Z}}.$$

Пусть теперь h_j и g_j — две последовательности простых борелевских функций на $S_{-\varepsilon/4}$, для которых при каждом j выполнены неравенства $0\le h_j\le f\le g_j$; при этом обе последовательности h_j и g_j равномерно на $S_{-\varepsilon/4}$ сходятся к f.

Зафиксируем $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ и $\delta>0$. Существуют $j\in\mathbb{N}$, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_A (g_j-h_j)\,d\sigma_{\vec{Z}}<\delta, \tag{15}$$

и $r_0>0$ такое, что при $r\in(0,r_0)$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{h_j}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big)-\int\limits_A h_j\,d\sigma_{\vec{Z}}\right|<\delta,\qquad \left|\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{g_j}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big)-\int\limits_A g_j\,d\sigma_{\vec{Z}}\right|<\delta. \tag{16}$$

В силу неотрицательности меры μ выполняются неравенства

$$\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{h_j}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big)\le\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{f}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big)\le\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{g_j}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big),$$

поэтому из (15), (16) следует, что при $r\in(0,r_0)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_A f\,d\sigma_{\vec{Z}}-\frac{1}{\lambda_m(B_r)}\,\big(\widehat{f}\cdot\mu\big)\Big(\Phi^{\vec{Z}}_{B_r}A\Big)\right|<3\,\delta,$$

что в силу произвольности $\delta>0$, $\varepsilon>0$ и $A\in\mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть m-форма α замкнута. Тогда $\mu_{\alpha\wedge\beta}=(\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}$.*

Доказательство. Выберем набор векторных полей $\vec{X}=\{X_1,X_2,\ldots,X_{m+n}\}$ в соответствии с условиями леммы 2 и теоремы 1.

Поскольку поля $X_1,X_2,\ldots,X_n$ касаются поверхности Σ, то $\big|(\alpha\wedge\beta)(\vec{X})\big|=\Big|\alpha(\widetilde{\vec{X}})\Big|\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|$ (здесь Y_k — ограничение поля X_k на Σ, $k=1,2,\ldots,n$). Поэтому в силу теоремы 1

$$\mu_{\alpha\wedge\beta}=\frac{1}{\big|(\alpha\wedge\beta)(\vec{X})\big|}\,\sigma_{\vec{X}}=\frac{1}{\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|}\,\frac{1}{\Big|\alpha(\widetilde{\vec{X}})\Big|}\,\sigma_{\vec{Y}}\,\big[\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\big]. \tag{17}$$

По условию теоремы дифференциальная форма α замкнута. Потому из попарной коммутируемости векторных полей $X_1,\ldots,X_{m+n}$ и того факта, что $X_1,\ldots,X_n$ касаются Σ, следует в U тождественное равенство (см., например, [12, с. 88])

$$X_k\alpha(X_{n+1},\ldots,X_{m+n})=0,\quad k=1,\ldots,n.$$

Применив лемму 3, из (17) получим

$$\mu_{\alpha\wedge\beta}=\frac{1}{\big|\widetilde{\beta}(\vec{Y})\big|}\sigma_{\vec{Y}}\left[\frac{1}{\big|\alpha(\vec{X})\big|}\,\sigma_{\widetilde{\vec{X}}}\right]=(\mu_\alpha)_{\widetilde{\beta}}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Условие замкнутости дифференциальной формы α не является обременительным. Любая m-форма ω на $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ является замкнутой, а потому замкнутой является форма $P_2^*\omega$, где P_2 — проекция $N_1 \times V_1$ на второй сомножитель. Поэтому „модельные ассоциированные формы α вида $(g^{-1})^*(P_2^*\omega)$ являются замкнутыми m-формами на U (здесь $\omega = h\,dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$, $\inf_{V_1} \left|h(\vec{t}\,)\right| > 0$).

По-видимому, для дальнейшего построения содержательной теории следует ограничиться рассмотрением замкнутых ассоциированных форм.

Литература

1. *Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В.* Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 8. – С. 1030 – 1048.
2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 231 с.
3. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 11. – С. 139 – 157.
4. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
5. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. carol. Math. et phys. – 1990. – **31**, № 2. – P. 9 – 23.
6. *Пугачев О. В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – **53**, № 1. – С. 178 – 188.
7. *Богданский Ю. В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса – Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299 – 1313.
8. *Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733 – 739.
9. *Богданский Ю. В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450 – 1460.
10. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
11. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Вища шк., 1989. – 295 с.
12. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. – М.: Мир, 1973. – 188 с.

Получено 04.02.17