УДК 517.5

Г. М. Власик (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ ОЦІНКИ L_q-НОРМ УЗАГАЛЬНЕНИХ ПОХІДНИХ ЯДЕР ТИПУ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНИМ ВИБОРОМ ГАРМОНІК

We obtain the exact order estimates of the norms of generalized derivatives of the Dirichlet-type kernels with an arbitrary choice of harmonics in the space $L_q,\ 2 < q < \infty$.

Получены точные по порядку оценки норм обобщенных производных ядер типа Дирихле с произвольным выбором гармоник в пространстве $L_q,\ 2 < q < \infty$.

Вступ. У роботі досліджуються можливості тригонометричних поліномів із довільним вибором гармонік по відношенню до відомої проблеми Літтлвуда [1], а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Детальніше на цьому зупинимося нижче, а спочатку наведемо необхідні для подальшого викладу позначення та означення.

Нехай L_q — простір 2π-періодичних і сумовних у степені $q,\ 1 \leq q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), функцій f на відрізку $[-\pi, \pi]$. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де $\hat{f}(k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0,\ \tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргумента, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)}\, e^{i(kx+\beta\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [2, с. 25] (див. також [3, ч. I, с. 132]), назвемо (ψ, β)-похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Зауважимо, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (ψ, β)-похідна функції f збігається з її (r, β)-похідною (позначення f^r_β) у сенсі Вейля – Надя.

Через Ψ позначимо множину функцій $\psi(\tau),\ \tau \in \mathbb{N}$, що задовольняють такі умови:

1) $\psi(\tau)$ є додатними і незростаючими;

2) існує така стала $C > 0$, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\dfrac{1}{\tau^r}$, $\dfrac{\ln^\gamma(\tau+1)}{\tau^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\tau \in \mathbb{N}$, та ін.

Далі, для величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують додатні сталі C_1 та C_2 такі, що $C_1 A \le B \le C_2 A$. Якщо тільки $B \le C_2 A$ $(B \ge C_1 A)$, то пишемо $B \ll A$ $(B \gg A)$.

Тепер зупинимося коротко на історії питання, яке буде досліджуватися в роботі. У 1948 р. Дж. Літтлвуд висловив гіпотезу [1]:

для будь-якого набору цілих чисел $j_1, \ldots, j_m$ справджується нерівність

$$\left\| \sum_{n=1}^m e^{ij_n x} \right\|_1 \gg \ln m.$$

У зв'язку з цією гіпотезою зазначимо, що для ядра Діріхле (див., наприклад, [4, с. 25])

$$\|D_m\|_1 = \left\| \sum_{k=-m}^m e^{ikx} \right\|_1 \asymp \ln m.$$

Позитивний розв'язок гіпотези Літтлвуда незалежно і майже одночасно було одержано С. В. Конягіним [5] та Мак-Гі, Піно і Смітом [6] у 1981 р. Згодом В. М. Тихомиров у огляді [7] запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини вигляду

$$L_m(r,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^m e^{ij_n x} \right)^{(r)} \right\|_q, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{1}$$

де K_m — довільний набір різних цілих чисел $j_1, \ldots, j_m$ і похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля, тобто $\beta = r$.

Величину (1), наслідуючи В. Є. Майорова [8], далі будемо називати константою Лебега – Літтлвуда. Перші оцінки величини $L_m(r,q)$ були отримані В. Є. Майоровим [8]. Згодом Е. С. Белінським [9, 10] було доповнено результати з [8]. Зауважимо, що Е. С. Белінський у роботі [10] зазначив, що одночасно і незалежно від нього про оцінки величини $L_m(r,q)$ при $0 \le r < \dfrac{1}{q}$ і $2 < q < \infty$ було повідомлено С. В. Конягіним на 4-й Саратовській зимовій школі по теорії функцій і наближень у 1988 році. Згодом дослідження величини (1) було поширено і на багатовимірний випадок у роботах [11, 12].

Зазначимо, що раніше порядкові оцінки норм похідних ядра Діріхле D_m у просторі L_q, $1 < q < \infty$, як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках було отримано Е. М. Галєєвим [13].

Природно звернути увагу на порядкові оцінки норм ядра Діріхле та ядер типу Діріхле з довільним вибором фіксованої кількості гармонік. Із робіт [8, 10] випливає, що

$$L_m(0,1) \asymp \ln m,$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q \le 2,$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1/2}, \quad 2 < q < \infty.$$

Водночас відомо (див., наприклад, [4, с. 25]), що для ядра Діріхле

$$\|D_m\|_1 \asymp \ln m,$$
$$\|D_m\|_q \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q < \infty, \tag{2}$$
$$\|D_m\|_\infty \asymp m.$$

Метою даної роботи є встановлення точних за порядком оцінок величини

$$L_m(\psi, \beta, q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)_\beta^\psi \right\|_q$$

при $2 < q < \infty$, певних умовах на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, і $\beta \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що одержаний нижче результат доповнює оцінки цієї величини, які при інших умовах на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, і параметр q були встановлені в роботі [14]. Більш детально про це буде йти мова в коментарях.

1. Допоміжні твердження. У цьому пункті сформулюємо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати у подальшому.

Позначимо через $T(m)$ множину тригонометричних поліномів вигляду

$$T(m) = \left\{ t \colon t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Твердження A (див., наприклад, [3, ч. II, с. 115]). *Нехай $1 < q < \infty$, $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел. Тоді для довільного полінома $t \in T(m)$ справедливою є оцінка*

$$\left\| t_\beta^\psi \right\|_q \ll \psi^{-1}(m) \|t\|_q.$$

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{ k \in \mathbb{Z} \colon \left[2^{s-1}\right] \le |k| < 2^s \right\},$$

де $[a]$ — ціла частина числа a, і покладемо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема A [15]. *Нехай $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 < q < \infty$. Тоді для $f_\beta^\psi(x)$ справджується співвідношення*

$$\left\| f_\beta^\psi \right\|_q \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left| \psi^{-1}\left(2^s\right) \delta_s(f, x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

Теорема Б (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [4, с. 17]). *Нехай задано* $1 < q < \infty$. *Тоді існують додатні сталі* $C_3(q)$, $C_4(q)$ *такі, що для кожної функції* $f \in L_q$ *має місце оцінка*

$$C_3(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_4(q)\|f\|_q.$$

Лема А [12]. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\Theta_n = \{j_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{Z}$ *і*

$$T(\Theta_n, x) = \sum_{k=1}^n e^{ij_kx}.$$

Тоді для довільного $m \le n$ *існує тригонометричний поліном* $\tilde{T}(\Theta_m, x)$ *із кількістю гармонік не більше* m *і такий, що*

$$\|T(\Theta_n, x) - \tilde{T}(\Theta_m, x)\|_q \le C_5 \frac{n}{\sqrt{m}},$$

причому $\Theta_m \subset \Theta_n$, *всі коефіцієнти полінома* $\tilde{T}(\Theta_m, x)$ *однакові і не перевищують за модулем* $\dfrac{n}{m}$.

Теорема В (див., наприклад, [16, с. 159]). *Нехай* $t \in T(m)$, $m > 0$. *Тоді при* $1 \le q \le p \le \le \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \ll m^{1/q-1/p}\|t\|_q.$$

Це співвідношення є частковим випадком нерівності, яка була доведена в багатовимірному випадку С. М. Нікольським і відома як „нерівність різних метрик”. Зауважимо також, що в одновимірному випадку при $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [17].

Теорема Г (Марцинкевича, див., наприклад, [18, с. 346]). *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, *що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \le C_6$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) $\sum_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^\nu - 1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu| \le C_6$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Тоді якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q, \quad 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx} \in L_q$$

і існує стала $C_7(q)$ *така, що*

$$\|F\|_q \le C_7(q)C_6\|f\|_q.$$

2. Основні результати. Перш ніж перейти до формулювання і доведення основного результату, встановимо точну за порядком оцінку L_q-норми (ψ, β)-похідної ядра Діріхле D_m при $1 < q < \infty$.

Теорема 1. *Нехай $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, — додатна і незростаюча послідовність, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 < q < < \infty$. Тоді справджується оцінка*

$$\left\| (D_m)^{\psi}_{\beta} \right\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}. \tag{3}$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, то

$$\left\| (D_m)^{\psi}_{\beta} \right\|_q \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}. \tag{4}$$

Доведення. Доведемо в (3) оцінку зверху. Оскільки функція $D_m(x)$ — тригонометричний поліном із множини $T(m)$, то, скориставшись твердженням А, отримаємо

$$\left\| (D_m)^{\psi}_{\beta} \right\|_q \ll \psi^{-1}(m) \| D_m \|_q.$$

Звідси, згідно зі співвідношенням (2), будемо мати

$$\left\| (D_m)^{\psi}_{\beta} \right\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Тепер встановимо в (4) відповідну оцінку знизу. За заданим m виберемо $\mu \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалась умова $2^{\mu-1} \le m \le 2^{\mu}$. Тоді для будь-якого $s \le \mu$ можемо записати

$$\delta_s(x) = \sum_{l \in \rho(s)} e^{ilx} = \sum_{2^{s-1} \le |l| < 2^s} e^{ilx} = 2 \sum_{2^{s-1} \le l < 2^s} \cos lx =$$

$$= \frac{2 \sin 2^{s-2} x \cos 2^{-1} (3 \cdot 2^{s-1} - 1) x}{\sin 2^{-1} x}$$

і відповідно

$$\delta_s(f, x) = \sum_{l \in \rho(s)} \psi^{-1}(|l|) e^{ilx} \asymp \psi^{-1}(2^s) \sum_{l \in \rho(s)} e^{ilx}. \tag{5}$$

Нехай

$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \pi 2^{-n-1} < |x| \le \pi 2^{-n} \right\}, \quad n \ge 0.$$

Тоді, використавши співвідношення $\dfrac{2x}{\pi} \le \sin x \le x$ при $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ і врахувавши, що $l \in \rho(s)$, а $x \in \Delta_n$, $s < n$, для $\delta_s(x)$ будемо мати

$$\delta_s(x) = 2 \sum_{2^{s-1} \le l < 2^s} \cos lx = \frac{2 \sin 2^{s-2} x \, \cos 2^{-1} \left(3 \cdot 2^{s-1} - 1 \right) x}{\sin 2^{-1} x} \ge$$

$$\ge \frac{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 2^{s-2} x \cos 2^{-1} \left(3 \cdot 2^{s-1} - 1 \right) x}{2^{-1} x} =$$

$$= \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos 2^{-1} \left(3 \cdot 2^{s-1} - 1 \right) x \ge$$

$$\ge \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos 2^{-1} \left(3 \cdot 2^{s-1} - 1 \right) \pi 2^{-s} =$$

$$= \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi 2^{-s-1}\right) \geq \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos\frac{3\pi}{8}. \tag{6}$$

Використавши теореми А, Б та співвідношення (5), отримаємо

$$\left\|(D_m)_\beta^\psi\right\|_q = \left\|\left(\sum_{|k|\leq m} e^{ikx}\right)_\beta^\psi\right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\|\left(\sum_{s\leq\mu} \left|\psi^{-1}(2^s)\delta_s(x)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_q \asymp \left\|\left(\sum_{s\leq\mu} |\delta_s(f,x)|^2\right)^{1/2}\right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\|\sum_{s\leq\mu} \psi^{-1}(2^s)\delta_s(x)\right\|_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{s\leq\mu}\psi^{-1}(2^s)\delta_s(x)\right|^q dx\right)^{1/q} = I.$$

Далі, розбивши відрізок інтегрування на області Δ_n, взявши в сумі по s тільки доданок з $s = n$ та врахувавши (6), будемо мати

$$I \gg \left(\sum_{n\leq\mu} \psi^{-q}(2^n)\int_{\Delta_n}\left|\frac{2^{n+1}}{\pi}\cos\frac{3\pi}{8}\right|^q dx\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{n\leq\mu} \psi^{-q}(2^n)\frac{\pi}{2^{n+1}}\left|\frac{2^{n+1}}{\pi}\cos\frac{3\pi}{8}\right|^q\right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{n\leq\mu} \psi^{-q}(2^n)2^{n(q-1)}\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \psi^{-1}\left(2^\mu\right)2^{\mu(1-1/q)} \asymp \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Таким чином, оцінку знизу, а разом з нею і теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку $1 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $\beta = r$, $r > 1/q - 1$, відповідне твердження було встановлено у роботі [13].

Тепер сформулюємо і доведемо твердження, в якому встановлено точну за порядком оцінку величини $L_m(\psi, \beta, q)$, $2 < q < \infty$, і при цьому виявлено, що ця величина при певних обмеженнях на $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, відрізняється за порядком від L_q-норми (ψ, β)-похідної ядра Діріхле.

Теорема 2. *Нехай* $2 < q < \infty$, $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справджується оцінка*

$$L_m(\psi, \beta, q) \ll \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}. \tag{7}$$

Якщо ж, крім цього, існують ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ *такі, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$ *не спадає, а послідовність* $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$ *не зростає, то*

$$L_m(\psi, \beta, q) \asymp \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}. \tag{8}$$

Доведення. Для доведення в (7) оцінки зверху розглянемо поліном

$$\overline{D}_{2^s}(x) = \sum_{k=1}^{2^s} e^{ikx},$$

де $2^s > m$, число s буде уточнено у подальших міркуваннях. Згідно з лемою A, знайдеться тригонометричний поліном

$$t_m^*(x) = \sum_{n=1}^{m} a e^{ij_n x}, \quad |a| \leq \frac{2^s}{m},$$

який містить не більше ніж m гармонік і такий, що

$$\left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_q \leq C_8 \frac{2^s}{\sqrt{m}}. \tag{9}$$

Очевидно, можна вважати, що $C_8 > 1$. Тоді будуть справедливими співвідношення

$$\left| \frac{t_m^*(0)}{a} \right| = \frac{1}{|a|} \, |t_m^*(0)| \geq \frac{m}{2^s} \, \|t_m^*\|_\infty \geq \frac{m}{2^s} \left(\left\| \overline{D}_{2^s} \right\|_\infty - \left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_\infty \right). \tag{10}$$

Тому, використавши теорему B, оцінку (9) і врахувавши, що $2^s > m$, будемо мати

$$\left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_\infty \ll 2^{s/q} \left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_q \leq C_8 2^{s/q} \frac{2^s}{\sqrt{m}}. \tag{11}$$

Таким чином, підставивши (11) в (10), отримаємо

$$\left| \frac{t_m^*(0)}{a} \right| \geq \frac{m}{2^s} \left(\left\| \overline{D}_{2^s} \right\|_\infty - \left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_\infty \right) \geq \frac{m}{2^s} \left(2^s - C_8 2^{s/q} \frac{2^s}{\sqrt{m}} \right) =$$

$$= m \left(1 - C_8 \frac{2^{s/q}}{\sqrt{m}} \right) \geq \frac{m}{2},$$

якщо тільки $2^s \leq m^{q/2}(2C_8)^{-q}$. Тому будемо вважати, що

$$2^s = \left[m^{q/2}(2C_8)^{-q} \right].$$

Далі нам буде потрібна оцінка знизу величини $|a|$. Оскільки

$$|2^s - |a|m| = \left| \left\| \overline{D}_{2^s} \right\|_\infty - \|t_m^*\|_\infty \right| \leq \left\| \overline{D}_{2^s} - t_m^* \right\|_\infty,$$

то, скориставшись співвідношенням (11), отримаємо

$$2^s - |a|m \leq C_8 2^{s/q} \frac{2^s}{\sqrt{m}}.$$

Звідси, взявши до уваги умову на 2^s, будемо мати

$$|a| \geq \frac{2^s}{m} - C_8 2^{s/q} \frac{2^s}{\sqrt{m} \cdot m} \geq \frac{2^s}{m} - \frac{2^s}{2m} = \frac{2^s}{2m}.$$

Розглянемо тепер тригонометричний поліном

$$\bar{t}_m(x) = \frac{1}{a}\, t^*_m(x),$$

який, очевидно, має m гармонік, і всі його коефіцієнти дорівнюють 1. Скориставшись послідовно твердженням А, співвідношеннями (9), (2) і врахувавши, що $2^s > m$, можемо записати

$$\left\|(\bar{t}_m)^{\psi}_{\beta}\right\|_q = \left\|\left(\frac{1}{a} t^*_m\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_q = \frac{1}{|a|}\,\left\|(t^*_m)^{\psi}_{\beta}\right\|_q \ll$$

$$\ll \frac{m}{2^s}\,\psi^{-1}(2^s)\,\|t^*_m\|_q \le \frac{m}{2^s}\,\psi^{-1}(2^s)\left(\left\|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\right\|_q - \left\|\overline{D}_{2^s}\right\|_q\right) \le$$

$$\le \frac{m}{2^s}\,\psi^{-1}(2^s)\left(C_8 \frac{2^s}{\sqrt{m}} - 2^{s(1-1/q)}\right) \ll \psi^{-1}(2^s)\sqrt{m}. \qquad (12)$$

Далі, оскільки $\psi \in \Psi$ і $2^s = \left[C_9 m^{q/2}\right]$, де $C_9 = (2C_8)^{-q}$, то зі співвідношення (12) одержимо

$$\left\|(\bar{t}_m)^{\psi}_{\beta}\right\|_q \ll \psi^{-1}\left(\left[C_9 m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}.$$

Звідси, врахувавши, що $C_9 < 1$, отримаємо шукану оцінку зверху

$$L_m(\psi,\beta,q) \ll \psi^{-1}\left(\left[C_9 m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m} \le \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}.$$

Встановимо у (8) оцінку знизу. Як буде зрозуміло з подальших міркувань, можна вважати, що $K_m = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $0 < j_1 < \ldots < j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Далі, для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо поліном

$$\bar{t}_{m,s}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx}$$

і покажемо, що виконується співвідношення

$$\left\|(\bar{t}_{m,s})^{\psi}_{\beta}\right\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|\bar{t}_{m,s}\|_q, \quad 2 < q < \infty. \qquad (13)$$

З цією метою розглянемо послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$, яка задається формулою

$$\{\lambda_{l,s}\} = \left\{\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right\}, \quad l \in K_m \cap \rho(s),$$

і переконаємося, що $\{\lambda_{l,s}\}$ задовольняє умови 1 і 2 теореми Г.

Оскільки $\psi \in \Psi$ і за умовою l є додатними, то

$$|\lambda_{l,s}| = \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right| \le \frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} \le C_{10},$$

$$\sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}} - \frac{\psi(l+1)}{\psi(2^s)}\, e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} (\psi(l) - \psi(l+1)) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \left(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\right) \leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq C_{10}.$$

Таким чином, оператор $\Lambda_{l,s}$, який задається послідовністю $\{\lambda_{l,s}\}$ і діє як мультиплікатор, задовольняє умови теореми Г.

Тепер подіємо оператором $\Lambda_{l,s}$ на поліном

$$\bar{t}^*_{m,s}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{i\beta\frac{\pi}{2}} e^{ilx}.$$

У результаті одержимо

$$\Lambda_{l,s}\bar{t}^*_{m,s}(x) = \Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{i\beta\frac{\pi}{2}} e^{ilx} =$$

$$= \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} e^{-i\beta\frac{\pi}{2}} \psi^{-1}(l) e^{i\beta\frac{\pi}{2}} e^{ilx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx} = \frac{1}{\psi(2^s)} \bar{t}_{m,s}(x).$$

Звідси будемо мати

$$\left\|\Lambda_{l,s}\bar{t}^*_{m,s}\right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\|\bar{t}_{m,s}\right\|_q. \tag{14}$$

З іншого боку, згідно з теоремою Г,

$$\left\|\Lambda_{l,s}\bar{t}^*_{m,s}\right\|_q = \left\|\Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{i\beta\frac{\pi}{2}} e^{ilx}\right\|_q \leq$$

$$\leq C_{11} \left\| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{i\beta\frac{\pi}{2}} e^{ilx} \right\|_q = C_{11} \left\| \left(\bar{t}_{m,s}\right)^{\psi}_{\beta} \right\|_q. \tag{15}$$

Отже, співставивши (14) і (15), отримаємо потрібне співвідношення (13).

Далі, використавши теорему Б і нерівність

$$\left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_n |a_n|^q\right)^{1/q}, \quad 2 \leq q < \infty, \tag{16}$$

згідно з (13) одержимо

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} e^{ij_k x} \right)^{\psi}_{\beta} \right\|_q^q \geq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_k \in K_m} \psi^{-1}(j_k) e^{ij_k x} \right|^q dx \asymp$$

$$\asymp \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \left| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \right|^2 \right)^{q/2} dx \gg$$

$$\gg \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \right|^q dx \gg$$

$$\gg \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx} \right|^q dx \asymp \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q. \tag{17}$$

Щоб продовжити (17), розглянемо множини S_1, S_2 та будемо вважати, що $s \in S_1$, якщо $m_s > 2^{\frac{2s}{q}}$, а всі інші індекси s віднесемо до S_2. Відповідно останню суму в (17) запишемо у вигляді двох доданків

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q = \sum_{s \in S_1} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q + \sum_{s \in S_2} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q. \tag{18}$$

Для оцінки першої суми використаємо співвідношення, яке випливає із нерівності різних метрик (теорема B). А саме, оскільки

$$m_s = \left\|\bar{t}_{m,s}\right\|_\infty \leq 2^{s/q} \|\bar{t}_{m,s}\|_q,$$

то

$$\|\bar{t}_{m,s}\|_q \geq \frac{m_s}{2^{s/q}}. \tag{19}$$

Для оцінки другої суми у (18) скористаємося нерівністю

$$\left\|\bar{t}_{m,s}\right\|_q > \left\|\bar{t}_{m,s}\right\|_2 = \sqrt{m_s}, \quad q > 2. \tag{20}$$

Тоді, підставляючи (19) і (20) у (18), отримуємо

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \left\|\bar{t}_{m,s}\right\|_q^q \geq \sum_{s \in S_1} \psi^{-q}(2^s) \frac{m_s^q}{2^s} + \sum_{s \in S_2} \psi^{-q}(2^s) \sqrt{m_s^q}. \tag{21}$$

Для продовження міркувань розглянемо спочатку випадок, коли

$$\sum_{s \in S_1} m_s > \frac{m}{2},$$

і оцінимо належним чином знизу першу суму в правій частині співвідношення (21). З умови $m_s > 2^{\frac{2s}{q}}$ випливає, що

$$\max_{s \in S_1} s \leq \log_2 \left(\left[m^{q/2} \right] + 1 \right). \tag{22}$$

Тоді, використавши нерівність Гельдера, будемо мати

$$\frac{m}{2} \le \sum_{s\in S_1} m_s = \sum_{s\in S_1} \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q} m_s \psi(2^s)2^{s/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s)2^{-s} m_s^q\right)^{1/q} \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'}. \tag{23}$$

Тепер, врахувавши (17), (18) і (21), одержимо

$$L_m(\psi,\beta,q) \gg \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s)2^{-s} m_s^q\right)^{1/q},$$

і згідно з (23) можемо записати

$$\frac{m}{2} \le L_m(\psi,\beta,q) \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'}.$$

Звідси випливає оцінка

$$L_m(\psi,\beta,q) \ge \frac{m}{2} \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{-1/q'}. \tag{24}$$

З іншого боку, оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає, то, врахувавши умову (22), отримаємо

$$\left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'} = \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}2^{-sq'\varepsilon_1}2^{sq'\varepsilon_1}\right)^{1/q'} \le$$

$$\le \left(\psi^{q'}\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)^{q'/q-q'\varepsilon_1}\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)^{q'\varepsilon_1}\right)^{1/q'} =$$

$$= \left(\psi^{q'}\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)^{q'/q}\right)^{1/q'} =$$

$$= \psi\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right)^{1/q}. \tag{25}$$

Легко переконатися, що

$$\psi\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right) \asymp \psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right). \tag{26}$$

Дійсно, оскільки, з одного боку, ψ є додатними і незростаючими, то

$$\psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right) > \psi\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right), \tag{27}$$

а з іншого боку, врахувавши, що $\psi \in \Psi$, отримаємо

$$\psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right) \leq C_{12}\psi\left(2\left[m^{q/2}\right]\right). \tag{28}$$

Тому звідси безпосередньо випливає, що

$$\psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right) \leq C_{13}\psi\left(\left[m^{q/2}\right]+1\right). \tag{29}$$

Таким чином, співставивши (27) і (29), отримаємо співвідношення (26) і, відповідно, (25) набере вигляду

$$\left(\sum_{s\in S_1}\psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'} \ll \psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}.$$

Звідси маємо

$$\left(\sum_{s\in S_1}\psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{-1/q'} \gg \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)m^{-1/2} \tag{30}$$

і, підставляючи (30) у (24), одержуємо шукану оцінку:

$$L_m(\psi,\beta,q) \gg m\psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)m^{-1/2} = \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}.$$

Нехай тепер

$$\sum_{s\in S_2} m_s > \frac{m}{2}.$$

Оскільки в цьому випадку $m_s \leq 2^{\frac{2s}{q}}$, то виберемо s таким чином, щоб виконувалась умова

$$s < \log_2\left[m^{q/2}\right] - \frac{3}{2}\,q. \tag{31}$$

Тоді

$$\sum_{\substack{s\in S_2\\ s<\log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}\,q}} m_s \leq \sum_{\substack{s\in S_2\\ s<\log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}\,q}} 2^{\frac{2s}{q}} \leq \frac{m}{8}.$$

Відповідно

$$\sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq\log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}\,q}} m_s > \frac{3m}{8}.$$

Тепер, скориставшись нерівністю Гельдера з показником $\frac{q}{2}$, будемо мати

$$\frac{3m}{8} \ll \sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq\log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}\,q}} m_s = \sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq\log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}\,q}} \psi^{-2}(2^s)m_s\psi^2(2^s) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s) m_s^{q/2} \right)^{2/q} \left(\sum_{s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s) \right)^{\frac{q-2}{q}}. \qquad (32)$$

Далі, оскільки згідно з умовою теореми $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то, врахувавши (31), отримаємо

$$\left(\sum_{s\geq \log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s) \right)^{\frac{q-2}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{s\geq \log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s) 2^{s\varepsilon_2 \frac{2q}{q-2}} 2^{-s\varepsilon_2 \frac{2q}{q-2}} \right)^{\frac{q-2}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\psi^{\frac{2q}{q-2}}\left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right) \left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right)^{\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}} \sum_{s\geq \log_2\left[m^{q/2}\right]-\frac{3}{2}q} 2^{-s\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}} \right)^{\frac{q-2}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\psi^{\frac{2q}{q-2}}\left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right) \left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right)^{\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}} \left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right)^{-\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}} \right)^{\frac{q-2}{q}} =$$

$$= \psi^2\left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right). \qquad (33)$$

А оскільки $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, то, виконавши елементарні перетворення, будемо мати

$$\psi\left(2^{-\frac{3}{2}q}\left[m^{q/2}\right]\right) \leq C_{14}\psi\left(\left[m^{q/2}\right]\right). \qquad (34)$$

Тепер, врахувавши (17), (18) і (21), одержимо

$$L_m(\psi,\beta,q) \gg \left(\sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s)\sqrt{m_s^q} \right)^{1/q}. \qquad (35)$$

Таким чином, співставивши (32) – (35), можемо записати

$$\frac{3m}{8} \ll L_m^2(\psi,\beta,q)\,\psi^2\left(\left[m^{q/2}\right]\right),$$

звідки одержуємо шукану оцінку:

$$L_m(\psi,\beta,q) \gg \psi^{-1}\left(\left[m^{q/2}\right]\right)\sqrt{m}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 2. Якщо $2 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $\beta = r$, $0 \leq r < 1/q$, то відповідне твердження було встановлено у роботі [10].

Зазначимо, що співвідношення (8) доповнює точні за порядком оцінки величин $L_m(\psi, \beta, q)$, $1 < q < \infty$, які були одержані в роботі [14] за інших умов на послідовність $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$. Для зручності порівнянь наведемо відповідний результат до теореми 2.

Теорема Д [14]. *Нехай* $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, *— додатна і незростаюча послідовність,* $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $2 < q < \infty$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$L_m(\psi, \beta, q) \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi(\tau) \in \Psi$, $\tau \in \mathbb{N}$, *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$ *не зростає, то*

$$L_m(\psi, \beta, q) \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Отже, співставляючи теореми 1 і 2, бачимо, що при виконанні умов теореми 2 на послідовність $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, величина $L_m(\psi, \beta, q)$ і L_q-норма (ψ, β)-похідної ядра Діріхле відрізняються за порядком.

Література

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A new proof of a theorem of rearrangements // J. London Math. Soc. – 1948. – **23**, № 91. – P. 163 – 168.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч. I. – 427 с.; Ч. II. – 468 с.
4. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions. – New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. – 419 p.
5. *Конягин С. В.* О проблеме Литтлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**, № 2. – С. 243 – 265.
6. *McGehe O. C., Pigno L., Smith B.* Hardy inequality and L^1-norm of exponential sums // Ann. Math. – 1981. – **113**, № 3. – P. 613 – 618.
7. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Совр. пробл. математики. Фундам. направления. — М.: ВИНИТИ, 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
8. *Майоров В. Е.* Неравенства Бернштейна – Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 6. – С. 55 – 61.
9. *Белинский Э. С.* Приближение тригонометрическими полиномами заданной длины на классах функций с ограниченной смешанной производной и некоторые экстремальные задачи // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Саратов. зимней школы (25 января – 5 февраля 1988 г.) – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – Ч. 2. – С. 43 – 45.
10. *Белинский Э. С.* Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Мат. заметки. – 1991. – **49**, № 1. – С. 12 – 18.
11. *Galeev E. M.* Approximation of periodic functions of one and several variables // Constr. Theory Functions'87. – Sofia, 1988. – P. 138 – 144.
12. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. – 1991. – **2**. – С. 3 – 7.
13. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб. – 1982. – **117(159)**, № 1. – С. 32 – 43.
14. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – **13**, № 2. – С. 88 – 100.
15. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92 – 105.
16. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
17. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
18. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.

Одержано 28.03.17