УДК 517.9

О. Є. Гентош (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЛІ-АЛГЕБРАЇЧНА СТРУКТУРА ІНТЕГРОВНИХ ЗА ЛАКСОМ $(2|1+1)$-ВИМІРНИХ СУПЕРСИМЕТРИЧНИХ МАТРИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

By using a specially constructed Backlund transformation, we obtain the Hamiltonian representation for the hierarchy of Lax-type flows on the dual space to the Lie algebra of matrix superintegral-differential operators with one anticommutative variable, coupled with suitable evolutions of eigenfunctions and adjoint eigenfunctions of the associated spectral problems. We also propose the Hamiltonian description of the corresponding set of the hierarchies of additional homogeneous symmetries (squared eigenfunction symmetries). The connection between these hierarchies and the Lax-integrable $(2|1+1)$-dimensional supersymmetric matrix nonlinear dynamical systems and their triple Lax-type linearizations is analyzed.

С помощью специально сконструированного преобразования Бэклунда получено гамильтоновое представление для иерархии потоков типа Лакса на сопряженном пространстве к алгебре Ли матричных суперинтегро-дифференциальных операторов с одной антикоммутативной переменной, дополненной соответствующими эволюциями собственных функций ассоциированных спектральных задач. Предложено также гамильтоновое описание соответствующего множества иерархий дополнительных однородных симметрий. Изучается связь этих иерархий с интегрируемыми по Лаксу $(2|1+1)$-измеримыми суперсимметричными матричными нелинейными динамическими системами и их тройной линеаризацией типа Лакса.

1. Вступ. Добре відомою є Лі-алгебраїчна інтерпретація інтегровних за Лаксом [1 – 6] нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах однієї комутативної змінної як гамільтонових потоків типу Лакса на спряжених просторах до алгебр Лі інтегро-диференціальних операторів [7] та їх суперузагальнень як гамільтонових потоків на спряжених просторах до алгебр Лі суперінтегро-диференціальних операторів з однією і двома антикомутативними змінними [8 – 10]. Такі потоки породжуються $\mathcal{R}$-деформованою дужкою Лі – Пуассона [4, 5, 11 – 13] та відповідними функціоналами Казимира. Однак у випадку функціональних многовидів двох комутативних змінних єдиного Лі-алгебраїчного підходу до опису інтегровних динамічних систем не існує. У роботах [12 – 16] розглядались кілька Лі-алгебраїчних підходів, які дозволили описати окремі класи інтегровних $(2+1)$-вимірних динамічних систем. У межах одного з таких підходів [12, 14, 15] інтегровні за Лаксом динамічні системи виникають з умови сумісності двох потоків типу Лакса на коприєднаній орбіті оператора загального виду. Інший підхід [13, 16] пов'язаний із застосуванням техніки центрального розширення до алгебри Лі інтегро-диференціальних операторів з однією комутативною змінною.

У роботах [17, 19] запропоновано вводити у динамічні системи ще одну комутативну змінну із збереженням їх інтегровності за Лаксом за допомогою додаткових однорідних симетрій ієрархії потоків типу Лакса на розширенні спряженого простору до операторної алгебри Лі (розширеному фазовому просторі). У роботах [20 – 23] автором статті показано, що ці симетрії є гамільтоновими потоками на розширених фазових просторах, а також встановлено, що їх гамільтонове зображення задає пуассонова структура, яка породжує гамільтонове зображення для ієрархії динамічних систем, утворених потоками типу Лакса та відповідними еволюціями власних функцій асоційованих спектральних задач. Проблема існування гамільтонового зображення для таких ієрархій розглядалась у статтях [20 – 23, 25].

У даній статті досліджується гамільтонова структура ієрархій додаткових однорідних симетрій для алгебри Лі матричних суперінтегро-диференціальних операторів з однією антикомутативною змінною, за допомогою яких можна описати деякий клас $(2|1+1)$-вимірних суперсиметричних матричних нелінійних динамічних систем із потрійною лінеаризацією типу Лакса.

У п. 2 наведено загальну Лі-алгебраїчну схему побудови ієрархії потоків типу Лакса на спряженому просторі алгебри Лі матричних суперінтегро-диференціальних операторів з однією антикомутативною змінною.

У п. 3 за допомогою знайденого перетворення Беклунда на розширеному фазовому просторі отримано гамільтонове зображення для ієрархії динамічних систем, утворених потоками типу Лакса та відповідними еволюціями власних функцій.

У п. 4 показано, що додаткові однорідні симетрії цієї ієрархії також є гамільтоновими потоками, які породжуються знайденою на розширенні спряженого простору дужкою Пуассона та відповідними натуральними степенями власних значень асоційованої спектральної задачі.

У п. 5 додаткові однорідні симетрії використано для отримання $(2|1+1)$-вимірних суперсиметричних матричних нелінійних динамічних систем, що *a priori* мають трилінійне зображення Лакса.

2. Загальна Лі-алгебраїчна схема. У статті [24] розглядалась алгебра Лі суперінтегро-диференціальних операторів із функціональними коефіцієнтами, наділена інваріантним скалярним добутком. Нижче буде побудовано матричний аналог такої алгебри Лі у випадку однієї антикомутативної змінної, на якій буде введено інваріантний скалярний добуток.

Позначимо через g лінійний простір матричних суперінтегро-диференціальних операторів з однією антикомутативною змінною:

$$A := c_q\partial^q + \sum_{p<2q} A_p D_\theta^p \;=\; \sum_{\ell\leq q,\; r=0,1} a_{\ell,r}\partial^\ell D_\theta^r \in \mathrm{g},$$

$$a_{q,0} = c_q, \quad a_{q,1} = 0, \quad a_{\ell,0} = A_{2\ell}, \quad a_{\ell,1} = A_{2\ell+1}, \quad \ell < q,$$

де $A_r \in C^\infty(\mathbb{S}\times\Lambda_1; gl(m|n))$, $gl(m|n))$ — напівпроста супералгебра Лі квадратних суперматриць, діагональні блоки яких мають розміри $m\times m$ та $n\times n$, починаючи з верхнього лівого кута, $A_p = A_p(x,\theta) := A_p^0(x) + \theta A_p^1(x)$, $p\in\mathbb{Z}$, суперматриці A_p парні (елементи діагональних блоків комутують) для парних p і непарні (елементи діагональних блоків антикомутують) для непарних p, $c_q \in gl(m|n)$ — стала парна суперматриця, $q\in\mathbb{N}$, $\partial = \partial/\partial x$, $x\in\mathbb{S}\simeq\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta\in\Lambda_1$, $\Lambda := \Lambda_0\oplus\Lambda_1$ — алгебра Грассмана над полем $\mathbb{C}\supset\Lambda_0$, $D_\theta := \partial/\partial\theta + \theta\partial/\partial x$ — суперпохідна, для якої $D_\theta^2 = \partial/\partial x$. Для будь-яких гладких матричнозначних функцій $a = a(x,\theta) := a^0(x) + \theta a^1(x)$ та $b = b(x,\theta) := b^0(x) + \theta b^1(x)$ мають місце співвідношення

$$(D_\theta ab) = (D_\theta a)b + (-1)^{\varrho(a)} IaI(D_\theta b),$$

$\varrho(.)$ — функція парності, $I := \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{m},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{n})$.

Введемо на просторі g комутатор у вигляді

$$[A,B] = A\circ B - B\circ A, \quad A,B\in\mathrm{g}, \tag{1}$$

де множення операторів $A,\ B$ визначається правилом

$$A\circ B=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+,\nu=0,1}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\left(A\frac{\partial_{\mathrm{r}}^\nu}{\partial\eta^\nu}\right)\right)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\nu B}{\partial\theta^\nu}\right),$$

$\xi:=\dfrac{\partial}{\partial x},\ \eta:=\dfrac{\partial}{\partial\theta},\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ та $\dfrac{\partial_{\mathrm{r}}}{\partial\theta}$ — оператори лівої та правої похідних за змінною θ.

Розглянемо на алгебрі Лі g білінійну форму

$$(A,B)=\int\limits_0^{2\pi}dx\int d\theta\,\mathrm{sSp}\,\mathrm{res}\,(A\circ B),\quad A,B\in\mathrm{g},\tag{2}$$

де символ res позначає коефіцієнт при операторі D_θ^{-1}, sSp — суперслід суперматриці.

Лема 1. *Білінійна форма* (2) *задає на алгебрі Лі* g *скалярний добуток, інваріантний відносно комутатора* (1), *тобто для будь-яких* $A,\ B,\ C\in\mathrm{g}$ *виконується рівність*

$$(A,[B,C])=([A,B],C).\tag{3}$$

Доведення. Щоб довести симетричність білінійної форми (2), обчислимо суперсліди коефіцієнтів при операторі D_θ^{-1} у добутках

$$a_{\ell,r_1}\partial^\ell D_\theta^{r_1}\circ b_{\kappa,r_2}\partial^\kappa D_\theta^{r_2}=a_{\ell,r_1}\partial^\ell\circ(D_\theta^{r_1}b_{\kappa,r_2})\partial^\kappa D_\theta^{r_2}+r_1(-1)^{r_2}a_{\ell,r_1}\partial^\ell\circ(Ib_{\kappa,r_2}I)\partial^\kappa D_\theta^{r_1}D_\theta^{r_2}=$$
$$=\sum_{\varsigma\geq0}(C_\varsigma^\ell a_{\ell,r_1}(\partial^\varsigma D_\theta^{r_1}b_{\kappa,r_2})\partial^\kappa D_\theta^{r_2}+r_1(-1)^{r_2}a_{\ell,r_1}(I\partial^\varsigma b_{\kappa,r_2}I)\partial^\kappa D_\theta^{r_1}D_\theta^{r_2})$$

та

$$b_{\kappa,r_2}\partial^k D_\theta^{r_2}\circ a_{\ell,r_1}\partial^\ell D_\theta^{r_1}=b_{\kappa,r_2}\partial^k\circ(D_\theta^{r_2}a_{\ell,r_1})\partial^\ell D_\theta^{r_1}+r_2(-1)^{r_1}b_{\kappa,r_2}\partial^\kappa\circ(Ia_{\ell,r_1}I)\partial^\ell D_\theta^{r_2}D_\theta^{r_1}=$$
$$=\sum_{\varsigma\geq0}(C_\varsigma^\ell a_{\ell,r_1}(\partial^\varsigma D_\theta^{r_1}b_{\kappa,r_2})\partial^\kappa D_\theta^{r_2}+r_1(-1)^{r_2}a_{\ell,r_1}(I\partial^\varsigma b_{\kappa,r_2}I)\partial^\kappa D_\theta^{r_1}D_\theta^{r_2}),$$

де $\ell,\kappa\in\mathbb{Z},\ r_1=0,1,\ r_2=0,1,$ а також

$$C_\varsigma^\ell=\begin{cases}\dbinom{\ell}{\varsigma}, & \ell\geq\varsigma\geq0,\\ 0, \quad \varsigma\geq\ell\geq0 \ \text{ або } \ \varsigma<0, & \\ \dbinom{|\ell|+\varsigma-1}{\varsigma}(-1)^\varsigma, & \ell<0,\quad \varsigma\geq0,\end{cases}$$

$$\binom{\ell}{\varsigma}=\frac{\ell(\ell-1)\ldots(\ell-\varsigma+1)}{1\cdot2\ldots\varsigma}.$$

Тоді

$$(a_{\ell,r_1}\partial^\ell D_\theta^{r_1},b_{\kappa,r_2}\partial^\kappa D_\theta^{r_2})=\sum_{\ell+\kappa+1\geq0}C_{\ell+\kappa+1}^\ell\int\limits_0^{2\pi}dx\int d\theta\,\mathrm{sSp}\,(a_{\ell,0}(\partial^{\ell+\kappa+1}b_{\kappa,1})+$$

$$+a_{\ell,1}(\partial^{\ell+\kappa+1}D_\theta b_{\kappa,1}) + a_{\ell,1}(\partial^{\ell+\kappa+1}Ib_{\kappa,0}I)),$$

$$(b_{\kappa,r_2}\partial^\kappa D_\theta^{r_2}, a_{\ell,r_1}\partial^\ell D_\theta^{r_1}) = \sum_{\ell+\kappa+1\geq 0} C^\kappa_{\ell+\kappa+1}\int\limits_0^{2\pi} dx \int d\theta \,\mathrm{sSp}\,(b_{\kappa,0}(\partial^{\ell+\kappa+1}a_{\ell,1})+$$

$$+b_{\kappa,1}(\partial^{\ell+\kappa+1}D_\theta a_{\ell,1}) + b_{\kappa,1}(\partial^{\ell+\kappa+1}Ia_{\ell,0}I)) =$$

$$= \sum_{\ell+\kappa+1\geq 0}(-1)^{\ell+\kappa+1}C^\kappa_{\ell+\kappa+1}\int\limits_0^{2\pi} dx \int d\theta \,\mathrm{sSp}\,((\partial^{\ell+\kappa+1}b_{\kappa,0})a_{\ell,1}+$$

$$+(\partial^{\ell+\kappa+1}D_\theta Ib_{\kappa,1}I)a_{\ell,1} + (\partial^{\ell+\kappa+1}b_{\kappa,1})(Ia_{\ell,0}I)) =$$

$$= (a_{\ell,r_1}\partial^\ell D_\theta^{r_1}, b_{\kappa,r_2}\partial^\kappa D_\theta^{r_2}),$$

де $C^\ell_{\ell+\kappa+1} = (-1)^{\ell+\kappa+1}C^\kappa_{\ell+\kappa+1}$. Отже, для будь-яких $A,\ B \in \mathrm{g}$

$$(A,B) = (B,A).$$

Для комутаторів у вигляді (1) рівність (3) є наслідком асоціативності операції множення (див. [13]).

Лему 1 доведено.

Алгебра Лі g розкладається у пряму суму двох підалгебр Лі $\mathrm{g}_+ \subset \mathrm{g}$ та $\mathrm{g}_- \subset \mathrm{g}$:

$$\mathrm{g}_+ := \left\{ A := c_q\partial^q + \sum_{\ell_1=0}^{2q-1} A_\ell D_\theta^{\ell_1} : \ell_1 = \overline{0, 2q-1} \right\},$$

$$\mathrm{g}_- := \left\{ A := \sum_{\ell_2=0}^{\infty} A_{\ell_2} D_\theta^{-(\ell_2+1)} : \ell_2 \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

тобто $\mathrm{g} = \mathrm{g}_+ \oplus \mathrm{g}_-$. Скалярний добуток (2) дозволяє ототожнити такі простори:

$$\mathrm{g}^* \simeq \mathrm{g}, \quad \mathrm{g}_+^* \simeq \mathrm{g}_-, \quad \mathrm{g}_-^* \simeq \mathrm{g}_+.$$

На основі загального підходу [4, 5, 11 – 13] до побудови нового комутатора на алгебрі Лі за допомогою її ендоморфізму як лінійного простору введемо на g ще один комутатор

$$[A,B]_{\mathcal{R}} := [\mathcal{R}A, B] + [A, \mathcal{R}B], \quad A, B \in \mathrm{g},$$

де ендоморфізм $R\colon \mathrm{g} \to \mathrm{g}$ має вигляд

$$\mathcal{R} := (P_+ - P_-)/2, \quad P_\pm \mathrm{g} := \mathrm{g}_\pm, \quad P_\pm \mathrm{g}_\mp = 0,$$

і задовольняє рівняння Янга – Бакстера

$$\mathcal{R}[A,B]_{\mathcal{R}} - [\mathcal{R}A, \mathcal{R}B] = \frac{1}{4}[A,B], \quad A, B \in \mathrm{g}.$$

Цей комутатор породжує на спряженому відносно скалярного добутку (2) просторі g^* дужку Лі – Пуассона

$$\{\gamma,\nu\}_{\mathcal{R}}(l) = (l, [\nabla\gamma(l), \nabla\nu(l)]_{\mathcal{R}}) := (\nabla\gamma(l), \mathcal{L}\nabla\nu(l)), \tag{4}$$

де $\gamma, \nu \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^*)$ — деякі гладкі за Фреше функціонали на g^*, $\mathcal{L}\colon \mathcal{T}^*(\mathrm{g}^*) \to \mathcal{T}(\mathrm{g}^*)$ — оператор Пуассона, який відповідає дужці Пуассона (4), ∇ — оператор градієнта відносно скалярного добутку (2), $l \in \mathrm{g}^*$. Градієнт гладкого функціонала $\gamma \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^*)$ у точці $l \in \mathrm{g}^*$ знаходимо за правилом

$$\delta\gamma(l) := (\nabla\gamma(l), \delta l).$$

Будь-який функціонал Казимира $\gamma \in \mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$ як інваріант коприєднаної дії відповідної групи Лі задовольняє у точці $l \in \mathrm{g}^*$ рівність

$$[l, \nabla\gamma(l)] = 0. \tag{5}$$

Дужка Лі – Пуассона (4) та функціонал Казимира $\gamma \in \mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$ задають на g^* гамільтоновий потік типу Лакса:

$$\frac{dl}{dt} := [\mathcal{R}\nabla\gamma(l), l] = [(\nabla\gamma(l))_+, l],$$

де $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр, нижній символ + позначає проекцію відповідного оператора на підалгебру Лі g_+. Неважко перевірити, що функціонали

$$\gamma_j(l) = \frac{q}{j+q}\left(l^{\frac{1}{q}}, l^{\frac{j}{q}}\right), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

є розв'язками рівняння (5). Функціонали Казимира (6) перебувають в інволюції відносно дужки Лі – Пуассона (4), тобто

$$\{\gamma_j, \gamma_k\}_{\mathcal{R}} = 0$$

для будь-яких $j, k \in \mathbb{N}$, а тому породжують за допомогою дужки Лі – Пуассона (4) ієрархію комутуючих гамільтонових потоків типу Лакса на g^*:

$$\frac{dl}{dt_j} := [\mathcal{R}\nabla\gamma_j(l), l] = [(\nabla\gamma_j(l))_+, l], \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Відповідні твердження про властивості функціоналів Казимира для алгебри Лі з інваріантним скалярним добутком, на якій можна ввести новий комутатор за допомогою деякого її ендоморфізму $\mathcal{R}$ як лінійного простору, містяться у роботі [11].

Кожне рівняння з ієрархії (6) будемо розглядати як умову сумісності спектрального співвідношення

$$lF = \lambda F, \tag{8}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр, та еволюційного рівняння

$$\frac{dF}{dt_j} = (\nabla\gamma_j(l))_+ F, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де $F \in W_0 := L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n)$ або $F \in W_1 := L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_1^m \times \Lambda_0^n)$. Можливість такого вибору власної функції пов'язана з тим, що оператор $l \in \mathrm{g}^*$ діє на $(m+n)$-вимірних векторфункціях від комутуючої $x \in \mathbb{S}$ і антикомутуючої $\theta \in \Lambda_1$ незалежних змінних, які утворюють $\mathbb{Z}_2$-градуйований лінійний простір $W_0 \oplus W_1$.

Будемо називати парними вектор-функції, що належать простору W_0, і непарними вектор-функції, що належать простору W_1. Це означає, що $\varrho(F) = 1$, якщо $F \in W_0$, та $\varrho(F) = 0$, якщо $F \in W_1$.

Розглянемо на просторі $W_0 \oplus W_1$ білінійну форму

$$\langle G, F \rangle = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta \, (G^\top F), \tag{10}$$

де верхній індекс $\top$ є символом звичайного транспонування. Функції у співвідношенні (10) будемо вибирати таким чином, щоб ця білінійна форма була парною, тобто $G \in W_1$, якщо $F \in W_0$, і $G \in W_0$, якщо $F \in W_1$.

Тоді еволюція відповідної власної функції спряженої до (8) спектральної задачі

$$I^{\varrho(F)} l^* I^{\varrho(F)} F^* = \lambda F^* \tag{11}$$

набирає вигляду

$$\frac{dF^*}{dt_j} = -I^{\varrho(F)} (\nabla \gamma_j(l))_+^* I^{\varrho(F)} F^*. \tag{12}$$

У формулах (11), (12) $F^* \in W_1$, якщо $F \in W_0$, і $F^* \in W_0$, якщо $F \in W_1$. Тут оператор $A^* \in \mathrm{g}$ задовольняє співвідношення

$$\langle A^* G, F \rangle = \langle G, AF \rangle,$$

де $F \in W_0$ і $G \in W_1$, для будь-якого матричного суперінтегро-диференціального оператора $A \in \mathrm{g}$.

Далі будемо вважати, що суперінтегро-диференціальний оператор $l \in \mathrm{g}^*$ у спектральній задачі (8) має $N \in \mathbb{N}$ різних власних значень $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, N}$. Для кожного $j \in \mathbb{N}$ дослідимо гамільтонову структуру рівняння типу Лакса (7), доповненого $2N$ еволюційними рівняннями (9):

$$\begin{aligned} \frac{dF_i}{dt_j} &= (\nabla \gamma_j(l))_+ F_i, \\ \frac{d\Phi_i}{dt_j} &= (\nabla \gamma_j(l))_+ \Phi_i \end{aligned} \tag{13}$$

для відповідних власних векторів $F_i \in W_0$ і $\Phi_i \in W_1$, $i = \overline{1, N}$, спектральної задачі (8) та $2N$ еволюційними рівняннями (12):

$$\begin{aligned} \frac{dF_i^*}{dt_j} &= -(\nabla \gamma_j(l))_+^* F_i^*, \\ \frac{d\Phi_i^*}{dt_j} &= -I(\nabla \gamma_j(l))_+^* I \Phi_i^* \end{aligned} \tag{14}$$

для відповідних власних векторів $F_i^* \in W_1$ і $\Phi_i^* \in W_0$, $i = \overline{1, N}$, спряженої спектральної задачі (11), як динамічної системи на розширеному фазовому просторі $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$.

3. Дужка Пуассона на розширеному фазовому просторі. Для більш компактного опису введемо позначення для градієнта будь-якого гладкого за Фреше функціонала $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$:

$$\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}}) := \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{F}}}, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*}, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*}, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}}\right)^\top,$$

де $\tilde{\mathbf{F}} := (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_N)^\top$, $\tilde{\mathbf{\Phi}} := (\tilde{\Phi}_1, \ldots, \tilde{\Phi}_N)^\top$, $\tilde{\mathbf{F}}^* := (\tilde{F}_1^*, \ldots, \tilde{F}_N^*)^\top$, $\tilde{\mathbf{\Phi}} := (\tilde{\Phi}_1^*, \ldots, \tilde{\Phi}_N^*)^\top$, а також

$$\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{F}}} := \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{F}_1}, \ldots, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{F}_N}\right)^\top, \quad \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}} := \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\Phi}_1}, \ldots, \frac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\Phi}_N}\right)^\top,$$
$$\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*} := \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{F}_1^*}, \ldots, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{F}_N^*}\right)^\top, \quad \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*} := \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\Phi}_1^*}, \ldots, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{\Phi}_N^*}\right)^\top,$$

у точці $(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})^\top \in \mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$. Цей градієнт знаходимо за допомогою співвідношення

$$\delta\tilde{\gamma}(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \mathbf{\Phi}) := (\langle(\delta l, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{\Phi}^*, \delta\mathbf{F}^*, \delta\mathbf{\Phi})^\top, \nabla\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})\rangle) =$$
$$= \left(\delta l, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}\right) + \sum_{i=1}^N \left\langle \delta\tilde{F}_i, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{F}_i}\right\rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \delta\tilde{\Phi}_i^*, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\Phi}_i^*}\right\rangle +$$
$$+ \sum_{i=1}^N \left\langle \delta\tilde{F}_i^*, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{F}_i^*}\right\rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \delta\tilde{\Phi}_i, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\Phi}_i}\right\rangle,$$

де $\left(\delta l, \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}\right) = \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}, \delta l\right)$.

Оператор Пуассона $\mathcal{L}\colon \mathcal{T}^*(\mathrm{g}^*) \to \mathcal{T}(\mathrm{g}^*)$, який відповідає дужці Лі – Пуассона (4), у точці $\tilde{l} \in \mathrm{g}^*$ діє за правилом

$$\frac{\delta\tilde{\gamma}^1}{\delta\tilde{l}} \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \left[\tilde{l}, \left(\frac{\delta\tilde{\gamma}^1}{\delta\tilde{l}}\right)_+\right] - \left[\tilde{l}, \frac{\delta\tilde{\gamma}^1}{\delta\tilde{l}}\right]_+ \tag{15}$$

для будь-якого гладкого за Фреше функціонала $\tilde{\gamma}^1 \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^*)$.

На просторі $W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ власних функцій введемо непарну суперсимплектичну структуру [26, 27]

$$\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^N (dF_i \wedge dF_i^* + d\Phi_i \wedge d\Phi_i^*), \tag{16}$$

де $(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*)^\top \in W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$, $\mathbf{F} := (F_1, \ldots, F_N)^\top$, $\mathbf{F}^* := (F_1^*, \ldots, F_N^*)^\top$, $\mathbf{\Phi} := (\Phi_1, \ldots \ldots, \Phi_N)^\top$, $\mathbf{\Phi} := (\Phi_1^*, \ldots, \Phi_N^*)^\top$, символ $\wedge$ позначає зовнішнє диференціювання в алгебрі Грассмана диференціальних форм на $W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$. Із суперсимплектичною структурою (16) пов'язана дужка Пуассона $\{.,.\}_J$ (див. [26]), якій відповідає оператор Пуассона $J\colon \mathcal{T}^*(W_0^{2N} \oplus \oplus W_1^{2N}) \to \mathcal{T}(W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$, що у точці $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})^\top \in W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ діє за правилом

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{F}}} \\ \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*} \\ \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*} \\ \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}} \end{pmatrix} \overset{J}{\mapsto} \begin{pmatrix} -\dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*} \\ \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}} \\ \dfrac{\delta\tilde{\gamma}^2}{\delta\tilde{\mathbf{F}}} \\ -\dfrac{\delta\gamma^2}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де $\tilde{\gamma}^2 \in \mathcal{D}(W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ — деякий гладкий за Фреше функціонал.

Пряма сума операторів $\mathcal{L} \oplus J : \mathcal{T}^*(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}) \to \mathcal{T}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ на просторі функціоналів $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ таких, що

$$\tilde{\gamma}(\tilde{l}, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*) := \tilde{\gamma}^1(\tilde{l}) + \tilde{\gamma}^2(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*), \tag{18}$$

задає дужку Пуассона

$$\{.,.\}_{\mathcal{L}\oplus J} := \{.,.\}_{\mathcal{R}} + \{.,.\}_J. \tag{19}$$

Справді, для будь-яких $\tilde{\gamma}, \tilde{\nu} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ у вигляді (18)

$$\{\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}\}_{\mathcal{L}\oplus J} = \{\tilde{\gamma}^1, \tilde{\nu}^1\}_{\mathcal{R}} + \{\tilde{\gamma}^2, \tilde{\nu}^2\}_J = -\{\tilde{\nu}^1, \tilde{\gamma}^1\}_{\mathcal{R}} - \{\tilde{\nu}^2, \tilde{\gamma}^2\}_J = -\{\tilde{\nu}, \tilde{\gamma}\}_{\mathcal{L}\oplus J},$$

тобто виконується умова кососиметричності. Тотожність Якобі також має місце для будь-яких $\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ у вигляді (18), оскільки

$$\begin{gathered} \{\{\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}\}_{\mathcal{L}\oplus J}, \tilde{\varepsilon}\}_{\mathcal{L}\oplus J} = \{\{\tilde{\gamma}^1, \tilde{\nu}^1\}_{\mathcal{R}}, \tilde{\varepsilon}^1\}_{\mathcal{R}} + \{\{\tilde{\gamma}^2, \tilde{\nu}^2\}_J, \tilde{\varepsilon}^2\}_J = \\ = -\{\{\tilde{\varepsilon}^1, \tilde{\gamma}^1\}_{\mathcal{R}}, \tilde{\nu}^1\}_{\mathcal{R}} - \{\{\tilde{\nu}^1, \tilde{\varepsilon}^1\}_{\mathcal{R}}, \tilde{\gamma}^1\}_{\mathcal{R}} - \{\{\tilde{\varepsilon}^2, \tilde{\gamma}^2\}_J, \tilde{\nu}^2\}_J - \{\{\tilde{\nu}^2, \tilde{\varepsilon}^2\}_J, \tilde{\gamma}^2\}_J = \\ = -\{\{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\gamma}\}_{\mathcal{L}\oplus J}, \tilde{\nu}\}_{\mathcal{L}\oplus J} - \{\{\tilde{\nu}, \tilde{\varepsilon}\}_{\mathcal{L}\oplus J}, \tilde{\gamma}\}_{\mathcal{L}\oplus J}. \end{gathered}$$

Щоб отримати гамільтонове зображення

$$\frac{d}{dt_j}(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})^\top = -\Theta\nabla\check{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}), \tag{20}$$

де $\Theta : \mathcal{T}^*(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}) \to \mathcal{T}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ — деякий оператор Пуассона на просторі гладких за Фреше функціоналів, заданих на $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$, $\check{\gamma}_j \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$, динамічної системи (7), (13) та (14) для кожного $j \in \mathbb{N}$, використаємо підхід, запропонований у роботах [5, 20–23, 25].

Зауважимо, що функціонал $\check{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})$ у рівнянні (20), який не залежить явно від власних функцій $\mathbf{F}$, $\mathbf{\Phi}^*$, $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{\Phi}$, збігається з функціоналом Казимира $\gamma_j \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^*)$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Побудуємо на розширеному фазовому просторі $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ перетворення Беклунда

$$\begin{pmatrix} \tilde{l} \\ \tilde{\mathbf{F}} \\ \tilde{\mathbf{\Phi}}^* \\ \tilde{\mathbf{F}}^* \\ \tilde{\mathbf{\Phi}} \end{pmatrix} \overset{B}{\mapsto} \begin{pmatrix} l = l(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}}) \\ \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{\Phi}^* = \tilde{\mathbf{\Phi}}^* \\ \mathbf{F}^* = \tilde{\mathbf{F}}^* \\ \mathbf{\Phi} = \tilde{\mathbf{\Phi}} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

при якому траєкторії гамільтонового векторного поля

$$\frac{d\tilde{l}}{dt_j} = \left[\left(\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}\right)_+, \tilde{l}\right] - \left[\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}, \tilde{l}\right]_+,$$
$$\frac{d\tilde{\mathbf{F}}}{dt_j} = \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{\Phi}}^*}{dt_j} = -\frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}}, \tag{22}$$
$$\frac{d\tilde{\mathbf{F}}^*}{dt_j} = -\frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\mathbf{F}}}, \quad \frac{d\tilde{\mathbf{\Phi}}}{dt_j} = \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*},$$

породженого дужкою Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{L}\oplus J}$ та функціоналом

$$\tilde{\gamma}_j(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{F}^*}, \tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{\Phi}^*}) := \gamma_j(l)\Big|_{\substack{l=l(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{F}^*}, \tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{\Phi}^*}) \\ \tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{F}}^*=\mathbf{F}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}}=\mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*=\mathbf{\Phi}^*}},$$

відображаються на траєкторії відповідного векторного поля (7), (13) та (14). У цьому випадку функціонал $\tilde{\gamma}_j^2 \in \mathcal{D}(W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ у розкладі (18) має вигляд

$$\tilde{\gamma}_j^2 = \sum_{i=1}^{N}(\langle(\nabla\gamma_j(l))_+ F_i, F_i^*\rangle + \langle(\nabla\gamma_j(l))_+ \Phi_i, \Phi_i^*\rangle).$$

Знайдемо варіацію функціонала $\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*)$, $j \in \mathbb{N}$, при додатковому обмеженні $\delta\tilde{l} = 0$ з урахуванням перетворення Беклунда (21):

$$\delta\tilde{\gamma}_j(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})\Big|_{\delta\tilde{l}=0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\left\langle\delta\tilde{F}_i, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{F}_i}\right\rangle + \left\langle\delta\tilde{F}_i^*, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{F}_i^*}\right\rangle\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(\left\langle\delta\tilde{\Phi}_i, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\Phi}_i}\right\rangle + \left\langle\delta\tilde{\Phi}_i^*, \frac{\delta\tilde{\gamma}_j}{\delta\tilde{\Phi}_i^*}\right\rangle\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\left\langle\delta\tilde{F}_i, -\frac{d\tilde{F}_i^*}{dt_j}\right\rangle + \left\langle\delta\tilde{F}_i^*, \frac{d\tilde{F}_i}{dt_j}\right\rangle +\right.$$
$$\left. + \left\langle\delta\tilde{\Phi}_i, -\frac{d\tilde{\Phi}_i^*}{dt_j}\right\rangle + \left\langle\delta\tilde{\Phi}_i^*, \frac{d\tilde{\Phi}_i}{dt_j}\right\rangle\right)\Bigg|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{F}}^*=\mathbf{F}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}}=\mathbf{\Phi}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*=\mathbf{\Phi}^*} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big(\langle\delta F_i, (\nabla\gamma_j(l))_+^* F_i^*\rangle + \langle\delta F_i^*, (\nabla\gamma_j(l))_+ F_i\rangle +$$
$$+ \langle\delta\Phi_i^*, (\nabla\gamma_j(l))_+ \Phi_i\rangle + \langle\delta\Phi_i, I(\nabla\gamma_j(l))_+^* I\Phi_i^*\rangle\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big(\langle(\nabla\gamma_j(l))_+(\delta F_i), F_i^*\rangle + \langle(\nabla\gamma_j(l))_+ F_i, \delta F_i^*\rangle +$$

$$+\langle(\nabla\gamma_j(l))_+(\delta\Phi_i),\Phi_i^*\rangle+\langle(\nabla\gamma_j(l))_+\Phi_i,\delta\Phi_i^*\rangle\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^N\Big((\nabla\gamma_j(l),\delta(F_iD_\theta^{-1}\otimes F_i^*))+(\nabla\gamma_j(l),\delta(\Phi_iD_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*))\Big)=$$

$$=\left(\nabla\gamma_j(l),\delta\sum_{i=1}^N(F_iD_\theta^{-1}\otimes F_i^*+\Phi_iD_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*)\right):=(\nabla\gamma_j(l),\delta l),$$

де $\gamma_j\in\mathcal{I}(\mathrm{g}^*),\ j\in\mathbb{N}$. Таким чином, у випадку, коли

$$\delta l|_{\delta\tilde{l}=0}=\sum_{i=1}^N\delta(F_iD_\theta^{-1}\otimes F_i^*+\Phi_iD_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*),\tag{23}$$

траєкторії гамільтонового векторного поля (22) для кожного $j\in\mathbb{N}$ при перетворенні Беклунда (21) відображаються на траєкторії векторного поля (20), гамільтоніаном якого є функціонал Казимира $\gamma_j\in\mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$.

Із співвідношення (23) випливає, що

$$l=\mathcal{K}(\tilde{l})+\sum_{i=1}^N(F_iD_\theta^{-1}\otimes F_i^*+\Phi_iD_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*),$$

де $\mathcal{K}$ — деякий гладкий за Фреше оператор на g^*. Якщо $\mathcal{K}(\tilde{l})=\tilde{l}$ для будь-якого $\tilde{l}\in\mathrm{g}^*$, то перетворення Беклунда (21) набирає вигляду

$$\begin{pmatrix}\tilde{l}\\ \tilde{\mathbf{F}}\\ \tilde{\mathbf{\Phi}}^*\\ \tilde{\mathbf{F}}^*\\ \tilde{\mathbf{\Phi}}\end{pmatrix}\stackrel{B}{\to}\begin{pmatrix}l=\tilde{l}+\sum_{i=1}^N(\tilde{F}_iD_\theta^{-1}\otimes\tilde{F}_i^*+\tilde{\Phi}_iD_\theta^{-1}\otimes\tilde{\Phi}_i^*)\\ \mathbf{F}=\tilde{\mathbf{F}}\\ \mathbf{\Phi}^*=\tilde{\mathbf{\Phi}}^*\\ \mathbf{F}^*=\tilde{\mathbf{F}}^*\\ \mathbf{\Phi}=\tilde{\mathbf{\Phi}}\end{pmatrix}.\tag{24}$$

Отже, має місце таке твердження.

Теорема 1. *Для будь-якого $j\in\mathbb{N}$ динамічна система* (20) *на $\mathrm{g}^*\oplus W_0^{2N}\oplus W_1^{2N}$ еквівалентна системі еволюційних рівнянь* (22), *де $\tilde{\gamma}_j:=\gamma_j|_{l=l(\tilde{l},\tilde{\mathbf{F}},\tilde{\mathbf{\Phi}}^*,\tilde{\mathbf{F}}^*,\tilde{\mathbf{\Phi}})}$ і $\gamma_j\in\mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$ є функціоналом Казимира у точці $l\in\mathrm{g}^*$, відносно перетворення Беклунда* (24).

Доведення. Перетворення Беклунда (24) отримано як таке, що відображає траєкторії системи еволюційних рівнянь (22) на траєкторії динамічної системи (20) із гамільтоніаном $\gamma_j\in\mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$ для кожного $j\in\mathbb{N}$.

Лема 2. *При перетворенні Беклунда* (24) *оператор Пуассона Θ задовольняє співвідношення*

$$\Theta=B'(\mathcal{L}\oplus J)B'^*,\tag{25}$$

де $B':\mathcal{T}(\mathrm{g}^*\oplus W_0^{2N}\oplus W_1^{2N})\to\mathcal{T}(\mathrm{g}^*\oplus W_0^{2N}\oplus W_1^{2N})$ — похідна Фреше перетворення Беклунда (24), *а $B'^*:\mathcal{T}^*(\mathrm{g}^*\oplus W_0^{2N}\oplus W_1^{2N})\to\mathcal{T}^*(\mathrm{g}^*\oplus W_1^{2N}\oplus W_1^{2N})$ — спряжений до неї оператор.*

Доведення. Знайдемо варіацію функціонала $\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}),\ j \in \mathbb{N}$, з урахуванням перетворення Беклунда B:

$$\begin{gathered}\delta\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}) = \\ = (\langle(\delta l, \delta\mathbf{F}, \delta\mathbf{\Phi}^*, \delta\mathbf{F}^*, \delta\mathbf{\Phi})^\top, \nabla\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})\rangle) = \\ = (\langle B'(\delta\tilde{l}, \delta\tilde{\mathbf{F}}, \delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \delta\tilde{\mathbf{F}}^*, \delta\mathbf{\Phi})^\top, \nabla\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})\rangle) = \\ = (\langle(\delta\tilde{l}, \delta\tilde{\mathbf{F}}, \delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \delta\tilde{\mathbf{F}}^*, \delta\mathbf{\Phi})^\top, B'^*\nabla\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})\rangle).\end{gathered}$$

При перетворенні Беклунда B

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt_j}(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})^\top = B'\frac{d}{dt_j}(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})^\top = \\ = -(B'(\mathcal{L} \oplus J)B'^*)\nabla\tilde{\gamma}_j(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})\end{gathered} \tag{26}$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$. Таким чином, має місце співвідношення (25).

Лему 2 доведено.

Теорема 2. *Ієрархія динамічних систем* (7), (13) *та* (14) *є гамільтоновою відносно пуассонової структури* Θ *у вигляді*

$$\nabla\gamma(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}) \overset{\Theta}{\mapsto} \begin{pmatrix} \left[l, \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+\right] - \left[l, \dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right]_+ + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^N \left(F_i D_\theta^{-1} \otimes \frac{\delta\gamma}{\delta F_i} - \frac{\delta\gamma}{\delta F_i^*} D_\theta^{-1} \otimes F_i^* + \right. \\ \left. + \Phi_i D_\theta^{-1} \otimes \dfrac{\delta\gamma}{\delta\Phi_i} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta\Phi_i^*} D_\theta^{-1} \otimes \Phi_i^*\right) \\ -\dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*} - \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+ \mathbf{F} \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}} + I\left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+^* I\mathbf{\Phi}^* \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{F}}} + \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+^* \mathbf{F}^* \\ -\dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*} - \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

де $\gamma \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$, *та функціоналів Казимира* $\tilde{\gamma}_j := \gamma_j \in \mathcal{I}(\mathrm{g}^*),\ j \in \mathbb{N}$.

Доведення. Пуассонову структуру Θ на $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ у вигляді (27) отримуємо за допомогою співвідношення (25) з урахуванням явного вигляду похідної Фреше B' перетворення Беклунда (24) та відповідного спряженого оператора B'^*:

$$\begin{pmatrix} h \\ \\ d \\ g \\ \chi \\ \rho \end{pmatrix} \overset{B'}{\mapsto} \begin{pmatrix} h + \sum_{i=1}^{N} \left(F_i D_\theta^{-1} \otimes \chi_i + d_i D_\theta^{-1} \otimes F_i^* \right) + \\ + \sum_{i=1}^{N} \left(\rho_i D_\theta^{-1} \otimes \Phi_i^* + \Phi_i D_\theta^{-1} \otimes g_i \right) \\ d \\ g \\ \chi \\ \rho \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{d} \\ \bar{g} \\ \bar{\chi} \\ \bar{\rho} \end{pmatrix} \overset{B'^*}{\mapsto} \begin{pmatrix} \bar{h} \\ \bar{d} + (\bar{h}_+^* \mathbf{F}^*) \\ \bar{g} + (\bar{h}_+ \mathbf{\Phi}) \\ \bar{\chi} + (\bar{h}_+ \mathbf{F}) \\ \bar{\rho} + (I \bar{h}_+^* I \mathbf{\Phi}^*) \end{pmatrix},$$

де $(h, d, g, \chi, \rho)^\top \in \mathcal{T}_{(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}})}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ і $(\bar{h}, \bar{d}, \bar{g}, \bar{\chi}, \bar{\rho})^\top \in \mathcal{T}^*_{(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus$ $\oplus\, W_1^{2N})$.

Теорему 2 доведено.

За допомогою зображення (20) на розширеному фазовому просторі $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ можна отримати нову ієрархію гамільтонових динамічних систем, породжених інволютивними відносно деформованої дужки Лі – Пуассона (4) функціоналами Казимира $\gamma_j \in \mathcal{I}(\mathrm{g}^*)$, $j = \overline{1, N}$, у вигляді (6). На орбітах коприєднаної дії алгебри Лі g вона редукується до зображень Лакса для деяких $(1|1+1)$-вимірних суперсиметричних матричних нелінійних динамічних систем [8, 10].

4. Ієрархії додаткових однорідних симетрій. Ієрархія динамічних систем (7), (13) та (14) має ще одну множину інваріантів, а саме, натуральні степені власних значень λ_i, $i = \overline{1, N}$, які можна розглядати як гладкі за Фреше функціонали на $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ відповідно до зображення

$$\lambda_k^s = \langle l^s F_k, F_k^* \rangle + \langle l^s \Phi_k, \Phi_k^* \rangle, \tag{28}$$

де $s \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, N}$, при умові нормування

$$\langle F_k, F_k^* \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_k^* \rangle = 1.$$

Гладкі за Фреше функціонали $\mu_k \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$, $k = \overline{1, N}$,

$$\mu_k := \langle F_k, F_k^* \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_k^* \rangle,$$

інваріантні відносно динамічних систем (7), (13) та (14).

Для будь-яких $k = \overline{1, N}$ та $s \in \mathbb{N}$ знайдемо варіацію функціонала $\lambda_k^s \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ з урахуванням перетворення Беклунда (24):

$$\delta \lambda_k^s = \sum_{p=0}^{s-1} \left(\langle l^{s-1-p} (\delta l) l^p F_k, F_k^* \rangle + \langle l^{s-1-p} (\delta l) l^p \Phi_k, \Phi_k^* \rangle \right) +$$

$$+\langle l^s(\delta F_k), F_k^*\rangle + \langle l^s(\delta\Phi_k), \Phi_k^*\rangle + \langle l^s F_k, \delta F_k^*\rangle + \langle l^s\Phi_k, \delta\Phi_k^*\rangle =$$

$$= \sum_{p=0}^{s-1}\Big(\langle(\delta l)l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle + \langle(\delta l)l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle\Big) +$$

$$+\langle\delta F_k, l^{s*}F_k^*\rangle + \langle\delta\Phi_k, Il^{s*}I\Phi_k^*\rangle + \langle\delta F_k^*, l^s F_k\rangle + \langle\delta\Phi_k^*, l^s\Phi_k\rangle =$$

$$= \sum_{p=0}^{s-1}\Big(\langle(\delta\tilde{l})l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle + \langle(\delta\tilde{l})l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=0}^{s-1}(\langle(\delta F_i)D_\theta^{-1}\otimes F_i^*(l^p F_k), l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle + \langle(\delta\Phi_i)D_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*(l^p F_k), l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle +$$

$$+\langle(\delta F_i)D_\theta^{-1}\otimes F_i^*(l^p\Phi_k), Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle + \langle(\delta\Phi_i)D_\theta^{-1}\otimes\Phi_i^*(l^p\Phi_k), Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{p=0}^{s-1}(\langle F_i D_\theta^{-1}\otimes(\delta F_i^*)l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle + \langle\Phi_i D_\theta^{-1}\otimes(\delta\Phi_i^*)l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle +$$

$$+\langle F_i D_\theta^{-1}\otimes(\delta F_i^*)l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle) + \langle\Phi_i D_\theta^{-1}\otimes(\delta\Phi_i^*)l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle) +$$

$$+\langle\delta F_k, l^{s*}F_k^*\rangle + \langle\delta\Phi_k, Il^{s*}I\Phi_k^*\rangle + \langle\delta F_k^*, l^s F_k\rangle + \langle\delta\Phi_k^*, l^s\Phi_k\rangle =$$

$$= \sum_{p=0}^{s-1}\Big(\langle(\delta\tilde{l})l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle + \langle(\delta\tilde{l})l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle\Big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\Big(\langle(\delta F_i, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* F_i^*\rangle + \langle\delta\Phi_i^*, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i\rangle +$$

$$+\langle\delta F_i^*, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)F_i\rangle + \langle\delta\Phi_i, I(-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* I\Phi_i^*\rangle\Big),$$

де

$$M_k^s = \sum_{p=0}^{s-1}((l^p F_k)D_\theta^{-1}\otimes(l^{(s-1-p)*}F_k^*) + (l^p\Phi_k)D_\theta^{-1}\otimes(Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*)),$$

$$M_k^{s*} = -\sum_{p=0}^{s-1}((l^{(s-1-p)*}F_k^*)D_\theta^{-1}\otimes(l^p F_k) + (l^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*)D_\theta^{-1}\otimes(l^p\Phi_k)I),$$

$\delta_k^i,\ i,k = \overline{1,N},$ — символ Кронекера. Рівності

$$\langle(\delta\tilde{l})l^p F_k, l^{(s-1-p)*}F_k^*\rangle = (\delta\tilde{l}, (l^p F_k)D_\theta^{-1}\otimes(l^{(s-1-p)*}F_k^*)),$$

$$\langle(\delta\tilde{l})l^p\Phi_k, Il^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*\rangle = (\delta\tilde{l}, (l^p\Phi_k)D_\theta^{-1}\otimes I(l^{(s-1-p)*}I\Phi_k^*))$$

мають місце тоді і тільки тоді, коли $\tilde{l} = \tilde{l}_+$. У цьому випадку

$$\delta\lambda_k^s = (\delta\tilde{l}_+, M_k^s) + \sum_{i=1}^{N}\Big(\langle(\delta F_i, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* F_i^*\rangle +$$

$$+\langle \delta\Phi_i^*, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i\rangle + \langle \delta F_i^*, (-M_k^s + \delta_k^i l^s)F_i\rangle +$$
$$+\langle \delta\Phi_i, I(-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* I\Phi_i^*\rangle\Big). \tag{29}$$

Таким чином, варіаційну похідну $\dfrac{\delta\tilde{\gamma}_{s,k}}{\delta\tilde{l}}$ від функціонала

$$\tilde{\gamma}_{s,k}(\tilde{l}, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*) := \lambda_k^s(l, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*)\Big|_{\substack{l=l(\tilde{l}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{F}}^*, \tilde{\mathbf{\Phi}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}^*),\\ \langle F_k, F_k^*\rangle + \langle \Phi_k, \Phi_k^*\rangle = 1}},$$

де $k = \overline{1,N},\ s \in \mathbb{N}$, можна знайти тоді і тільки тоді, коли оператор $l \in \mathrm{g}^*$ у перетворенні Беклунда (24) має вигляд

$$l = l_+ + \sum_{i=1}^{N} (F_i D_\theta^{-1} \otimes F_i^* + \Phi_i D_\theta^{-1} \otimes \Phi_i^*), \tag{30}$$

тобто $\tilde{l} = l_+$. Для будь-яких $k = \overline{1,N}$ та $s \in \mathbb{N}$ функціонал $\tilde{\gamma}_{s,k} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}_-^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ записується як сума двох функціоналів:

$$\tilde{\gamma}_{s,k}(l_+, \mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*) := \tilde{\gamma}_{s,k}^1(l_+) + \tilde{\gamma}_{s,k}^2(\mathbf{F}, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^*),$$

де

$$\tilde{\gamma}_{s,k}^2 = \sum_{i=1}^{N} (\langle (-M_k^s + \delta_k^i l^s)F_i, F_i^*\rangle + \langle (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i, \Phi_i^*\rangle).$$

Лема 3. *Дужку Лі–Пуассона* $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$, *якій відповідає оператор* (27), *можна редукувати на підпростір* g_-^*, *де* $\mathrm{g}_-^* \simeq \mathrm{g}_+$.

Доведення. Для будь-якого $\tilde{l} = \tilde{l}_+ \in \mathrm{g}_-^*$ у вигляді

$$\tilde{l} = c_q + A_{2q-1}D_\theta^{2q-1} + A_{2q-2}D_\theta^{2q-2} + \ldots + A_1 D_\theta + A_0 \tag{31}$$

градієнт довільного гладкого за Фреше функціонала $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}_-^*)$ записується таким чином:

$$\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}} = -D_\theta^{-2q} I \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta A_{2n-1}} I - D_\theta^{-2q+1} I \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta A_{2n-2}} I + \ldots - D_\theta^{-1} I \frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta A_0} I.$$

Тому дужка Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ породжує у точці $\tilde{l} \in \mathrm{g}_-^*$ гамільтонове векторне поле

$$-\left[\frac{\delta\tilde{\gamma}}{\delta\tilde{l}}, \tilde{l}\right]_+, \tag{32}$$

де оператор (32) є супердиференціальним оператором порядку $2q-1$:

$$-[c_q, A_0]D_\theta^{2q-1} + B_{2q-2}D_\theta^{2q-2} + \ldots + B_1 D_\theta + B_0.$$

Оскільки похідна від оператора (31) відносно будь-якого еволюційного параметра $\hat{t} \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{d}{d\hat{t}}A_{2q-1}\right) D_\theta^{2q-1} + \left(\frac{d}{d\hat{t}}A_{2q-2}\right) D_\theta^{2q-2} + \ldots + \left(\frac{d}{d\hat{t}}A_1\right) D_\theta + \left(\frac{d}{d\hat{t}}A_0\right)$$

також є супердиференціальним оператором порядку $2q-1$, то дужку Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ можна обмежити на підпростір g_-^*.

Лему 3 доведено.

Таким чином, повторивши міркування з п. 4 для редукованої на g_-^* дужки Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$, отримуємо дужку Пуассона на розширеному фазовому просторі $\mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ із відповідним оператором Пуассона Θ_{red}, що діє за правилом

$$\nabla\gamma(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}) \overset{\Theta_{\mathrm{red}}}{\mapsto}$$

$$\overset{\Theta_{\mathrm{red}}}{\mapsto} \begin{pmatrix} -\left[l, \dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right]_+ + \left[\displaystyle\sum_{i=1}^N (F_i D_\theta^{-1} \otimes F_i^* + \Phi_i D_\theta^{-1} \otimes \Phi_i^*), \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+\right] + \\ + \displaystyle\sum_{i=1}^N \left(F_i D_\theta^{-1} \otimes \dfrac{\delta\gamma}{\delta F_i} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta F_i^*} D_\theta^{-1} \otimes F_i^* + \right. \\ \left. + \Phi_i D_\theta^{-1} \otimes \dfrac{\delta\gamma}{\delta \Phi_i} - \dfrac{\delta\gamma}{\delta \Phi_i^*} D_\theta^{-1} \otimes \Phi_i^*\right) \\ -\dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{F}}^*} - \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+ \mathbf{F} \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}} + I\left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+^* I\mathbf{\Phi}^* \\ \dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{F}}} + \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+^* \mathbf{F}^* \\ -\dfrac{\delta\gamma}{\delta\tilde{\mathbf{\Phi}}^*} - \left(\dfrac{\delta\gamma}{\delta l}\right)_+ \mathbf{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

де $\gamma \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$.

Для кожного $k = \overline{1,N}$ за допомогою явного вигляду градієнтів функціоналів $\tilde{\gamma}_{s,k} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}_-^* \oplus$ $\oplus\, W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}),\ s \in \mathbb{N}$:

$$\nabla\tilde{\gamma}_{s,k}(l_+, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi}) = \begin{pmatrix} M_k^s \\ (-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* F_i^* \\ (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i \\ (-M_k^s + \delta_k^i l^s) F_i \\ I(-M_k^s + \delta_k^i l^s)^* I \Phi_i^* \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{34}$$

дужка Пуассона з оператором Пуассона $\mathcal{L}_{\mathrm{red}} \oplus J$, де оператор Пуассона $\mathcal{L}_{\mathrm{red}}$ відповідає редукованій на g_-^* дужці Лі – Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$, породжує на $\mathrm{g}_-^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ ієрархію еволюційних рівнянь

$$\frac{dl_+}{d\tau_{s,k}} = -[M_k^s, l_+]_+, \tag{35}$$

$$\frac{dF_i}{d\tau_{s,k}} = (-M_k^s + \delta_k^i l^s) F_i, \quad \frac{d\Phi_i^*}{d\tau_{s,k}} = I(M_k^s - \delta_k^i l^s)^* I \Phi_i^*,$$

$$\frac{dF_i^*}{d\tau_{s,k}} = (M_k^s - \delta_k^i l^s)^* F_i^*, \quad \frac{d\Phi_i}{d\tau_{s,k}} = (-M_k^s + \delta_k^i l^s)\Phi_i. \tag{36}$$

При перетворенні Беклунда (24) з оператором $l \in \mathrm{g}^*$ у вигляді (30) рівняння (35) набирає комутаторного вигляду

$$\frac{dl}{d\tau_{s,k}} = -[M_k^s, l] = -s\lambda_k^{s-1}[M_k^1, l] = s\lambda_k^{s-1}\frac{dl}{d\tau_{1,k}}, \quad p = \overline{0, s-1}. \tag{37}$$

Оскільки функціонали $\mu_i \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}),\ i = \overline{1,N}$, інваріантні відносно динамічних систем (37) і (36), то має місце таке твердження.

Теорема 3. *Для будь-якого* $k = \overline{1,N}$ *гамільтонове зображення для ієрархії динамічних систем* (37) *і* (36) *на її інваріантному підпросторі* $\mathcal{M}_k \subset \mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$,

$$\mathcal{M}_k := \{(l, \mathbf{F}, \mathbf{\Phi}^*, \mathbf{F}^*, \mathbf{\Phi})^\top \in \mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N} : \mu_k = 1\},$$

задають редуковані на $\mathcal{M}_k$ *дужка Пуассона з оператором Пуассона* Θ_{red} *у вигляді* (33) *та функціонали* $\lambda_k^s \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}),\ s \in \mathbb{N}$, *у вигляді* (28).

Доведення. Для заданого $k = \overline{1,N}$ ієрархію динамічних систем (37) і (36) отримано як результат перетворення Беклунда (24) з оператором $l \in \mathrm{g}^*$ у вигляді (30) ієрархії гамільтонових динамічних систем, породжених дужкою Пуассона з оператором Пуассона $\mathcal{L}_{\mathrm{red}} \oplus J$ та функціоналами $\tilde{\gamma}_{s,k} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}_-^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}),\ s \in \mathbb{N}$. Ці функціонали є редукціями відповідних функціоналів $\lambda_k^s \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N})$ на $\mathrm{g}_-^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N} \bigcap M_k$. Дужка Пуассона на $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ з оператором Пуассона Θ_{red} виникає при згаданому вище перетворенні Беклунда дужки Пуассона на $\mathrm{g}_-^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$, якій відповідає оператор Пуассона $\mathcal{L}_{\mathrm{red}} \oplus J$.

Теорему 3 доведено.

Для операторів $l \in \mathrm{g}^*$ у вигляді (30) потоки $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, можна записати таким чином:

$$\frac{d}{dt_j} = j\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{j-1}\frac{d}{d\tau_{1,k}}. \tag{38}$$

Теорема 4. *Еволюційні рівняння* (37) *і* (36) *описують ієрархії потоків на* $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$, *що комутують між собою та ієрархією потоків типу Лакса* (7), (13) *та* (14).

Доведення. Оскільки має місце формула (38), то достатньо показати, що

$$\left[\frac{d}{d\tau_{1,k_1}}, \frac{d}{d\tau_{1,k_2}}\right] = 0$$

для будь-яких $k_1, k_2 = \overline{1,N},\ k_1 \neq k_2$. Ця рівність є еквівалентною тотожності

$$\frac{d}{d\tau_{1,k_2}}M_{k_1}^1 - \frac{d}{d\tau_{1,k_1}}M_{k_2}^1 = [M_{k_1}^1, M_{k_2}^1],$$

яка випливає із співвідношення

$$M_{k_1}M_{k_2}^1 = (M_{k_1}^1 F_{k_2})D_\theta^{-1} \otimes F_{k_2}^* + (M_{k_1}^1 \Phi_{k_2})D_\theta^{-1} \otimes \Phi_{k_2}^* +$$
$$+ F_{k_1}D_\theta^{-1} \otimes (M_{k_2}^{1*}F_{k_1}^*) + \Phi_{k_1}D_\theta^{-1} \otimes (IM_{k_2}^{1*}I\Phi_{k_1}^*) =$$

$$= -\frac{dF_{k_2}}{d\tau_{1,k_1}} D_\theta^{-1} \otimes F_{k_2}^* - \frac{d\Phi_{k_2}}{d\tau_{1,k_1}} D_\theta^{-1} \otimes \Phi_{k_2}^* +$$

$$+ F_{k_1} D_\theta^{-1} \otimes \frac{dF_{k_1}^*}{d\tau_{1,k_2}} + \Phi_{k_1} D_\theta^{-1} \otimes \frac{d\Phi_{k_1}^*}{d\tau_{1,k_2}}.$$

Рівність

$$\left[\frac{d}{dt_j}, \frac{d}{d\tau_{1,k}}\right] = 0$$

є наслідком тотожності

$$\frac{d}{d\tau_{1,k}} (\nabla\gamma_j(l))_+ = [(\nabla\gamma_j(l))_+, M_k^1]_+,$$

де $j \in \mathbb{N},\ k = \overline{1, N}$.

Теорему 4 доведено.

Таким чином, для будь-яких $k = \overline{1, N}$ та $s \in \mathbb{N}$ еволюційні рівняння (37) і (36) на $\mathrm{g}^* \oplus \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ утворюють додаткову множину однорідних симетрій ієрархії типу Лакса (7), (13) і (14).

5. Інтегровна за Лаксом $(2|1+1)$-вимірна суперсиметрична матрична система Деві–Стюартсона. За допомогою ієрархій додаткових однорідних симетрій у випадку, коли $N \geq 2$, можна отримати на $\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ новий клас нетривіальних потоків типу Лакса $\frac{d}{dT_{j,K}} := := \frac{d}{dt_j} + \sum_{k=1}^{K} \frac{d}{d\tau_{j,k}},\ j \in \mathbb{N},\ K = \overline{1, [N/2]}$. Ці потоки є гамільтоновими на їх інваріантних підпросторах $\bigcap_{k=1}^{K} M_k \subset \mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$ (див. [30]), оскільки для будь-яких $k_1, k_2 = \overline{1, N}$ мають місце співвідношення

$$\{\mu_{k_1}, \mu_{k_2}\}_{\tilde{J}} = 0,$$

де $\mu_{k_1}, \mu_{k_2} \in \mathcal{D}(\mathrm{g}^* \oplus W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}),\ \{.,.\}_{\tilde{J}}$ — дужка Пуассона $W_0^{2N} \oplus W_1^{2N}$, яка відповідає оператору Пуассона (17). Діючи на власні вектори $F_i, F_i^*, \Phi_i, \Phi_i^*,\ i = \overline{1, N}$, вони породжують деякі інтегровні суперсиметричні матричні нелінійні динамічні системи.

Якщо $N = 2$ та $q = 1,\ c_q = \mathbf{1},\ A_{2q-1} = 0,\ A_{2q-2} = 0$, то при дії потоків $\frac{d}{d\tau} := \frac{d}{d\tau_{1,1}}$ і $\frac{d}{dT} := \frac{d}{dT_{2,1}} = \frac{d}{dt_2} + \frac{d}{d\tau_{2,1}}$ на функції $F_i, F_i^*, \Phi_i, \Phi_i^*,\ i \in \{1, 2\}$, отримуємо суперсиметричні нелінійні динамічні системи

$$\begin{gathered} F_{1,\tau} = F_{1,x} + u_1 F_2 - \alpha_1 I \Phi_2, \quad F_{1,\tau}^* = F_{1,x}^* + \bar{u}_1 F_2^* - \bar{\alpha}_1 \Phi_2^*, \\ \Phi_{1,\tau} = \Phi_{1,x} + \alpha_2 I F_2 + u_2 \Phi_2, \quad \Phi_{1,\tau}^* = \Phi_{1,x}^* - \bar{\alpha}_2 F_2^* - \bar{u}_2 \Phi_2^*, \\ F_{2,\tau} = -\bar{u}_1 F_1 + \bar{\alpha}_2 I \Phi_1, \quad F_{2,\tau}^* = -u_1 F_1^* + \alpha_2 \Phi_1^*, \\ \Phi_{2,\tau} = -\bar{\alpha}_1 I F_1 - \bar{u}_2 \Phi_1, \quad \Phi_{2,\tau}^* = \alpha_1 F_1^* - u_2 \Phi_1^* \end{gathered} \tag{39}$$

та

$$
\begin{gathered}
F_{1,T} = F_{1,xx} + F_{1,\tau\tau} + w_1(D_\theta F_1) + w_0 F_1 + \\
+2((D_\theta F_1^{*\top} F_1) + u_1\bar{u}_1 - \alpha_1\bar{\alpha}_1)F_1 - 2((D_\theta \Phi_1^{*\top} F_1) + u_1\bar{\alpha}_2 + \bar{u}_2\alpha_1)I\Phi_1, \\
F_{1,T}^* = -F_{1,xx}^* - F_{1,\tau\tau}^* - (D_\theta I w_1^{\top_s} I F_1^*) - w_0^{\top_s} F_1^* - \\
-2((D_\theta F_1^{*\top} F_1) + u_1\bar{u}_1 - \alpha_1\bar{\alpha}_1)F_1^* + 2((D_\theta F_1^{*\top}\Phi_1) + \bar{u}_1\alpha_2 + u_2\bar{\alpha}_1)I\Phi_1^*, \\
\Phi_{1,T} = \Phi_{1,xx} + \Phi_{1,\tau\tau} + w_1(D_\theta \Phi_1) + w_0\Phi_1 + \\
+2((D_\theta \Phi_1^{*\top}\Phi_1) + u_2\bar{u}_2 - \alpha_2\bar{\alpha}_2)\Phi_1 + 2((D_\theta F_1^{*\top}\Phi_1) + \bar{u}_1\alpha_2 + u_2\bar{\alpha}_1)IF_1, \\
\Phi_{1,T}^* = -\Phi_{1,xx}^* - \Phi_{1,\tau\tau}^* - (D_\theta w_1^{\top_s}\Phi_1^*) - I w_0^{\top_s} I\Phi_1^* - \\
-2((D_\theta \Phi_1^{*\top}\Phi_1) + u_2\bar{u}_2 - \alpha_2\bar{\alpha}_2)\Phi_1^* + 2((D_\theta \Phi_1^{*\top} F_1) + u_1\bar{\alpha}_2 + \bar{u}_2\alpha_1)F_1^*, \\
F_{2,T} = F_{2,xx} + w_1(D_\theta F_2) + w_0 F_2 - \bar{u}_1 F_{1,\tau} + \bar{\alpha}_2 I\Phi_{1,\tau} + \bar{u}_{1,\tau}F_1 - \bar{\alpha}_{2,\tau} I\Phi_1, \qquad (40) \\
F_{2,T}^* = -F_{2,xx}^* - (D_\theta I w_1^{\top_s} I F_2^*) - w_0^{\top_s} F_2^* + u_1 F_{1,\tau}^* - \alpha_2\Phi_{1,\tau}^* - u_{1,\tau}F_1^* + \alpha_{2,\tau}\Phi_1^*, \\
\Phi_{2,T} = \Phi_{2,xx} + w_1(D_\theta\Phi_2) + w_0\Phi_2 - \bar{\alpha}_1 I F_{1,\tau} - \bar{u}_2\Phi_{1,\tau} + \bar{\alpha}_{1,\tau} I F_1 + \bar{u}_{2,\tau}\Phi_1, \\
\Phi_{2,T}^* = -\Phi_{2,xx}^* - (D_\theta w_1^{\top_s}\Phi_2^*) - I w_0^{\top_s} I\Phi_2^* - \alpha_1 F_{1,\tau}^* + u_2\Phi_{1,\tau}^* + \alpha_{1,\tau}F_1^* - u_{2,\tau}\Phi_1^*, \\
D_\theta u_1 = F_1^\top F_2^*, \quad D_\theta u_2 = \Phi_1^\top \Phi_2^*, \quad D_\theta \bar{u}_1 = F_1^{*\top} F_2, \quad D_\theta \bar{u}_2 = \Phi_1^{*\top}\Phi_2, \\
D_\theta \alpha_1 = \Phi_2^{*\top} F_1, \quad D_\theta \alpha_2 = F_2^{*\top}\Phi_1, \quad D_\theta \bar{\alpha}_1 = F_1^{*\top}\Phi_2, \quad D_\theta \bar{\alpha}_2 = \Phi_1^{*\top} F_2,
\end{gathered}
$$

де $(\nabla\gamma_2(l))_+ := \partial^2 + w_1 D_\theta + w_0$, $w_0, w_1 \in C^\infty(\mathbb{S}\times\Lambda_1; gl(m|n))$, w_0 — парна і w_1 — відповідно непарна суперматриці, верхній індекс $\top_s$ є символом супертранспонування, тобто

$$
w^{\top_s} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}^{\top_s} = \begin{pmatrix} w_{11}^\top & w_{21}^\top \\ -w_{12}^\top & w_{22}^\top \end{pmatrix}
$$

для будь-якої суперматриці $w \in gl(m|n)$. Систему (40) записано з урахуванням рівностей

$$
\begin{gathered}
l^s F_1 = (d/d\tau + M_1^1)^s F_1, \quad l^{*s} F_1^* = (-d/d\tau + M_1^{1*})^s F_1^*, \\
l^s \Phi_1 = (d/d\tau + M_1^1)^s \Phi_1, \quad l^{*s}(I\Phi_1^*) = (-d/d\tau + M_1^{1*})^s (I\Phi_1^*)
\end{gathered}
$$

та

$$
\begin{gathered}
M_1^s = \sum_{p=0}^{s-1}\Big(((d/d\tau + M_1^1)^p F_1) D_\theta^{-1} \otimes ((-d/d\tau + M_1^{1*})^{(s-1-p)} F_1^*) + \\
+((d/d\tau + M_1^1)^p \Phi_1) D_\theta^{-1} \otimes (I(-d/d\tau + M_1^{1*})^{(s-1-p)} I\Phi_1^*) \Big), \\
M_1^{s*} = -\sum_{p=0}^{s-1}\Big(((-d/d\tau + M_1^{1*})^{(s-1-p)} F_1^*) D_\theta^{-1} \otimes ((d/d\tau + M_1^1)^p F_1) + \\
+((-d/d\tau + M_1^{1*})^{(s-1-p)} I\Phi_1^*) D_\theta^{-1} \otimes ((d/d\tau + M_1^1)^p \Phi_1) I \Big),
\end{gathered}
$$

де $s \in \mathbb{N}$. З умови комутування потоків $\dfrac{d}{d\tau}$ і $\dfrac{d}{dT}$ виникають додаткові нелінійні обмеження

$$\begin{gathered} w_{0,\tau} = w_1(IF_1 \otimes F_1^* - I\Phi_1 \otimes \Phi_1^*) + F_1 \otimes Iw_1^{\top s} IF_1^* + \Phi_1 \otimes w_1^{\top s}\Phi_1^* + \\ +2(F_1 \otimes (D_\theta F_1^*) + \Phi_1 \otimes (D_\theta \Phi_1^*))_x, \\ w_{1,\tau} = 2(-F_1 \otimes F_1^* + \Phi_1 \otimes \Phi_1^*)_x. \end{gathered} \tag{41}$$

Система (40) разом з нелінійними обмеженнями (41) задає $(2|1+1)$-вимірну суперсиметричну нелінійну динамічну систему з нескінченною послідовністю законів збереження у вигляді (6), яку можна розглядати як $(2|1+1)$-вимірний суперсиметричний матричний аналог системи Деві – Стюартсона.

Її трилінійним зображенням Лакса є спектральна задача (8) та еволюційні рівняння

$$\begin{gathered} F_\tau = -M_1^1 F, \\ F_T = ((\nabla\gamma_2(l))_+ - M_1^2)F \end{gathered} \tag{42}$$

для довільної власної функції $F \in W_0$ або $F \in W_1$. Умова сумісності рівнянь (42) еквівалентна умові комутування потоків $\dfrac{d}{d\tau}$ і $\dfrac{d}{dT}$:

$$\frac{d}{d\tau}\, l_+^2 = [l_+^2, M_1^1]_+.$$

Якщо $m = 1$ і $n = 0$, то рівняння (40) – (41) описують $(2|1+1)$-вимірну суперсиметричну систему, отриману у роботі [20], яка у випадку $F_1 := \psi$, $F_1^* := \theta\psi^*$, $F_2 = F_2^* = 0$ і $\Phi_1 = \Phi_1^* = \Phi_2 = \Phi_2^* = 0$ редукується до інтегровної за Лаксом (2+1)-вимірної динамічної системи Деві – Стюартсона [3]

$$\begin{gathered} \psi_T = \psi_{xx} + \psi_{\tau\tau} + 2(S - 2\psi\psi^*)\psi, \\ \psi_T^* = -\psi_{xx}^* - \psi_{\tau\tau}^* - 2(S - 2\psi\psi^*)\psi^*, \\ S_{x\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \psi\psi^*, \end{gathered}$$

де $2S = w_0^0 + 2\psi\psi^*$, $w_0 = w_0^0$ і $\psi, \psi^* \in L_2(\mathbb{S}; \mathbb{C})$.

6. Висновки. Застосовуючи описаний вище метод додаткових однорідних симетрій, можна отримати достатньо широкий клас $(2|1+1)$-вимірних суперсиметричних матричних нелінійних динамічних систем з потрійною лінеаризацією типу Лакса. Така лінеаризація дозволяє знаходити солітоноподібні розв'язки систем із цього класу за допомогою перетворень типу Дарбу [31 – 33]. З огляду на існування повної лінеаризації типу Лакса за всіма незалежними змінними цікаво дослідити можливість застосування до згаданих вище систем методу редукування на інваріантні скінченновимірні підпростори розв'язків [5, 6, 34].

Структура перетворення Беклунда (24) на розширеному фазовому просторі, використаного для знаходження гамільтонових зображень динамічної системи (7), (13) і (14) та її додаткових однорідних симетрій, суттєво залежить від вибору інваріантного відносно комутатора скалярного добутку на алгебрі Лі та розкладу цієї алгебри у пряму суму двох підалгебр Лі. Інші розклади [9, 10] алгебри Лі приведуть до нових перетворень Беклунда на розширенні її спряженого простору.

Передбачається також дослідити можливість Лі-алгебраїчної інтепретації інтегровних за Лаксом $(2|2+1)$-вимірних суперсиметричних матричних нелінійних динамічних систем на основі алгебри Лі матричних суперінтегро-диференціальних операторів з двома антикомутативними змінними.

Автор вдячна професору Прикарпатському А. К. за корисне обговорення статті, яке сприяло суттєвому покращенню її змісту.

Література

1. *Lax P. D.* Periodic solutions of the KdV equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, № 1. – P. 141 – 188.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. Новикова С. П. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
3. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
4. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход к теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
5. *Prykarpatsky A. K., Mykytiuk I. V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 554 p.
6. *Гентош О., Притула М., Прикарпатський А.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Вид. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2006. – 408 с.
7. *Adler M.* On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg – deVries type equations // Invent. Math. – 1979. – **50**, № 3. – P. 219 – 248.
8. *Manin Yu. I., Radul A. O.* A supersymmetric extension of the Kadomtsev – Petviashvili hierarchy // Communs Math. Phys. – 1985. – **98**, № 1. – P. 65 – 77.
9. *Brunelli J. C., Das A.* Supersymmetric two boson equation, its reductions and the nonstandard supersymmetric KP hierarchy // Int. J. Modern Phys. A. – 1995. – **10**, № 32. – P. 4563 – 4599.
10. *Oevel W., Popowicz Z.* The bi-Hamiltonian structure of fully supersymmetric Korteweg – de Vries systems // Communs Math. Phys. – 1991. – **139**, № 3. – P. 441 – 460.
11. *Семенов-Тян-Шанский М. А.* Что такое $\mathcal{R}$-матрица // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, № 4. – С. 17 – 33.
12. *Konopelchenko B., Oevel W.* An $\mathcal{R}$-matrix approach to nonstandard classes of integrable equations // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1993. – **29**, № 4. – P. 581 – 666.
13. *Blaszak M., Szablikowski B. M.* Classical $\mathcal{R}$-matrix theory for bi-Hamiltonian field systems // J. Phys. A: Math. and Theor. – 2009. – **42**. – 35 p.
14. *Sato M.* Soliton equations as dynamical systems on infinite Grassmann manifolds // RIMS Kokyuroku, Kyoto Univ. – 1981. – **439**. – P. 30 – 40.
15. *Xiao T., Zeng Y.* Bäcklund transformations for the KP and mKP hierarchies with self-consistent sources // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2006. – **39**, № 1. – P. 139 – 156.
16. *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.* Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева – Петвиашвили // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1987. – **164**. – С. 212 – 227.
17. *Carillo S., Oevel W.* Squared eigenfunction symmetries for soliton equations. I // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **217**, № 1. – P. 161 – 178.
18. *Carillo S., Oevel W.* Squared eigenfunction symmetries for soliton equations. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **217**, № 1. – P. 179 – 199.
19. *Nissimov E., Pacheva S.* Symmetries of supersymmetric integrable hierarchies of KP type // J. Math. Phys. – 2002. – **43**, № 5. – P. 2547 – 2586.
20. *Hentosh O. Ye.* Lax integrable supersymmetric hierarchies on extended phase spaces // SIGMA. – 2006. – **2**. – 11 p.
21. *Hentosh O. Ye., Prykarpatsky A. K.* Integrable three-dimensional coupled nonlinear dynamical systems related with centrally extended operator Lie algebras // Opusc. Math. – 2007. – **27**, № 2. – P. 231 – 244.

22. *Hentosh O. Ye.* Lax integrable supersymmetric hierarchies on extended phase spaces of two anticommuting variables // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**, № 2. – P. 365 – 379.
23. *Hentosh O. Ye.* Lax integrable differential-difference dynamical systems on extended phase spaces // SIGMA. – 2010. – **6**. – 14 p.
24. *Радул А. О.* Алгебры Ли дифференциальных операторов, их центральные расширения и W-алгебры // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, № 1. – С. 33 – 49.
25. *Prykarpatsky A. K., Hentosh O. Ye.* The Lie-algebraic structure of (2+1)-dimensional Lax type integrable nonlinear dynamical systems // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 939 – 946.
26. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру с антикоммутирующими переменными. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 208 с.
27. *Shander V. N.* Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds // Докл. Болгар. акад. наук. – 1983. – **36**, № 3. – С. 309 – 311.
28. *Fuchssteiner B., Fokas A. S.* Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries // Physica D. – 1981. – **4**, № 1. – P. 47 – 66.
29. *Oevel W., Strampp W.* Constrained KP hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Communs Math. Phys. – 1993. – **157**, № 1. – P. 51 – 81.
30. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
31. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 120 p.
32. *Прикарпатський Я. А., Самойленко А. М., Самойленко В. Г.* Структура бінарних перетворень типу Дарбу та їх застосування в теорії солітонів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 12. – С. 1704 – 1719.
33. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K., Prykarpatsky Y. A.* The spectral and differential-geometric aspects of a generalized de Rham – Hodge theory related with Delsarte tramsmutation operators in multi-dimension and its applications to spectral and soliton problems // Nonlinear Anal. – 2006. – **65**, № 2. – P. 395 – 432.
34. *Гентош О. Є.* Інтегровна за Лаксом ієрархія Лаберже – Матьє суперсиметричних нелінійних динамічних систем та її скінченновимірна редукція типу Неймана // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 7. – С. 906 – 921.

Одержано 24.09.15