УДК 517.925

**В. М. Евтухов, А. Г. Черникова** (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

We establish conditions for the existence of one class of solutions of two-term nonautonomous differential equations of the second-order with rapidly varying nonlinearities and the asymptotic representations for these solutions and their first-order derivatives as $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$).

Встановлено умови існування одного класу розв'язків двочленного неавтономного диференціального рівняння другого порядку з швидко змінною нелінійністю, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

**1. Введение.** Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{1.2}$$

$Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $\Delta_{Y_0}$ — некоторая односторонняя окрестность $Y_0$.

Из тождества

$$\frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} = \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} + 1 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}$$

и условий (1.2) следует, что

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ (y \in \Delta_{Y_0}) \qquad \text{и} \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty. \tag{1.3}$$

Значит, в рассматриваемом уравнении функция $\varphi$ и ее производная первого порядка являются (см. [1, с. 91, 92], гл. 3, § 3.4, леммы 3.2, 3.3) быстро меняющимися при $y \to Y_0$.

При выполнении условий (1.2) асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (1.1) исследовалось в монографии [1, с. 90 – 99] (гл. 3, § 3.4) в частном случае, когда $\alpha_0 = 1$, $\omega = +\infty$, $Y_0 = 0$ и $p$ — правильно меняющаяся функция при $t \to +\infty$, и в работе [2] в общем случае. Однако в [2] изучался класс решений, который определялся через функцию $\varphi$, что не является естественным. Более естественным представляется исследовать для (1.1) тот же класс решений, который изучался ранее (см., например, работу [3]) в случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции $\varphi$.

**Определение 1.1.** *Решение $y$ дифференциального уравнения* (1.1) *называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет условиям*

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \textit{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \textit{либо} & 0, \\ \textit{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t) y(t)} = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1) в неособом случае, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка.

**2. Некоторые вспомогательные утверждения.** Сначала отметим ряд важных свойств класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $f \colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, где $Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и $\Delta_{Y_0}$ — некоторая односторонняя окрестность $Y_0$, каждая из которых удовлетворяет условиям

$$f'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f(y) f''(y)}{f'^2(y)} = 1. \tag{2.1}$$

Не ограничивая общности будем в дальнейшем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $|y_0| < 1$ при $Y_0 = 0$ и $y_0 > 1$ ($y_0 < -1$) при $Y_0 = +\infty$ (при $Y_0 = -\infty$).

Для таких функций, кроме асимптотических соотношений (1.3) с заменой в них $\varphi$ на $f$, имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f \colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *где* $Y_0$ *равно либо нулю, либо* $\pm\infty$, *и* $\Delta_{Y_0}$ *— некоторая односторонняя окрестность* $Y_0$, *удовлетворяет условиям* (2.1), *то*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f^2(y)}{f'(y) \displaystyle\int_Y^y f(x)\, dx} = 1, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left[\displaystyle\int_Y^y f(x)\, dx\right]^2}{f(y) \displaystyle\int_Y^y \left( \int_Y^x f(u)\, du \right) dx} = 1, \tag{2.3}$$

*где*

$$Y = \begin{cases} y_0, & \textit{если} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = +\infty, \\ Y_0, & \textit{если} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = 0. \end{cases}$$

***Доказательство.*** В силу асимптотических соотношений (1.3) с заменой в них $\varphi$ на $f$ и выбора предела интегрирования $Y$ каждый из интегралов, стоящих в (2.3), стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$.

Учитывая этот факт, докажем сначала справедливость первого из предельных соотношений (2.3). Положим

$$z(y) = \frac{f^2(y)}{f'(y)\displaystyle\int_Y^y f(x)dx}. \tag{2.4}$$

Тогда

$$z'(y) = \frac{2f(y)}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx} - \frac{f^2(y)f''(y)}{f'^2(y)\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx} - \frac{f^3(y)}{f'(y)\left[\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx\right]^2} =$$

$$= \frac{f(y)}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}\left[2 - \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} - z(y)\right],$$

т. е. функция (2.4) является решением дифференциального уравнения

$$z' = \frac{f(y)}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}\left[2 - \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} - z\right]. \tag{2.5}$$

Запишем соответствующую этому уравнению функцию

$$F(y,c) = \frac{f(y)}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}\left[2 - \frac{f''(y)f(y)}{f'^2(y)} - c\right].$$

В силу условий (2.1) она при любом вещественном значении $c \neq 1$ сохраняет знак в некоторой окрестности $Y_0$, содержащейся в $\Delta_{Y_0}$. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [3] для каждого решения дифференциального уравнения (2.5), определенного в окрестности $Y_0$, содержащейся в $\Delta_{Y_0}$, а значит, и для функции (2.4) существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $y \to Y_0$. Покажем, что этим пределом может быть только единица. Допустим противное. Тогда

$$\text{либо} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = c = \text{const} \neq 1, \quad \text{либо} \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = \pm\infty.$$

В первом случае из (2.5) с учетом (2.1) следует, что

$$z'(y) = \frac{f(y)}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}[1 - c + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $y_1$ до $y$, где $y_1$ — любая внутренняя точка из промежутка с концами $y_0$ и $Y_0$, и учитывая, что $\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y \to Y_0$, а $c \neq 1$, получаем

$$z(y) - z(y_1) = [1 - c + o(1)]\ln\left|\int_Y^y f(x)\,dx\right| \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Однако это невозможно, поскольку выражение, стоящее слева, имеет конечный предел при $y \to Y_0$.

Допустим теперь, что $\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = \pm\infty$. В этом случае соотношение для $z'(y)$ запишем с учетом (2.4) в виде

$$z'(y) = \frac{f'(y)}{f(y)} z(y) \left[ 2 - \frac{f''(y) f(y)}{f'^2(y)} - z(y) \right],$$

откуда в силу последнего из условий (2.1) и сделанного предположения имеем

$$z'(y) = -\frac{f'(y)}{f(y)} z^2(y) \big[ 1 + o(1) \big] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Поскольку $f(y)$ стремится либо к нулю, либо к $+\infty$ при $y \to Y_0$, то, разделив обе части этого соотношение на $z^2(y)$ и затем проинтегрировав на промежутке от $y_1$ до $y$, получим

$$-\frac{1}{z(y)} + \frac{1}{z(y_1)} = \big[ 1 + o(1) \big] \ln f(y) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Тем самым пришли к противоречию, так как здесь предел при $y \to Y_0$ выражения, стоящего слева, равен константе $\dfrac{1}{z(y_1)}$.

Вследствие полученных в рассмотренных выше двух случаях противоречий приходим к выводу, что $\lim\limits_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} z(y) = 1$, и поэтому выполняется первое из предельных соотношений (2.3).

Аналогичным образом с использованием уже установленного первого из предельных соотношений (2.3) доказывается справедливость второго.

Лемма доказана.

В силу этой леммы и теоремы 3.10.8 из монографии [5, с. 178] дважды непрерывно дифференцируемая функция $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow ]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям (2.1), принадлежит при $Y_0 = +\infty$ и выполнении условия $\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty$ классу функций $\Gamma$, введенному Л. Ханом (см., например, [5, с.175]).

**Определение 2.1.** *Класс $\Gamma$ состоит из измеримых неубывающих и непрерывных справа функций $f\colon [y_0, +\infty[ \longrightarrow ]0, +\infty[$, для каждой из которых существует измеримая функция $g\colon [y_0, +\infty[ \longrightarrow ]0, +\infty[$, дополняющая для функции $f$, такая, что*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{f\,(y + u g(y))}{f(y)} = e^u \quad \textit{для любого} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Для функций из класса $\Gamma$ имеют место, в частности (см. [5, с. 174 – 178]), следующие утверждения.

**Лемма 2.2.** 1. *Если $f \in \Gamma$ с дополняющей функцией $g$, то $\lim_{y \to +\infty} \dfrac{g(y)}{y} = 0$.*

2. *Если $f \in \Gamma$ с дополняющей функцией $g$, то для любой функции $u\colon [y_0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям*

$$\lim_{y \to +\infty} u(y) = u_0 \in [-\infty, +\infty], \qquad \lim_{y \to +\infty} f(y + u(y) g(y)] = +\infty,$$

*имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{f\,(y + u(y) g(y))}{f(y)} = e^{u_0}.$$

3. *Для $f \in \Gamma$ дополняющая функция единственна с точностью до эквивалентных при $y \to +\infty$ функций, и в качестве одной из них может быть выбрана, например, функция $\dfrac{\int_{y_0}^{y} f(x)\, dx}{f(y)}$.*

4. *Условия* $f \in \Gamma$ *и*

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\left[\displaystyle\int_{y_0}^{y} f(x)\,dx\right]^2}{f(y)\displaystyle\int_{y_0}^{y}\left(\int_{y_0}^{x} f(u)\,du\right)dx} = 1$$

*являются эквивалентными, т. е. из одного из них следует второе и наоборот.*

С использованием замен переменных класс $\Gamma$ может быть легко расширен до класса $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ функций $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow ]0,+\infty[$, где $Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, а $\Delta_{Y_0}$ — односторонняя окрестность $Y_0$, для которых

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 = \begin{cases}\text{либо} & 0,\\ \text{либо} & +\infty.\end{cases}$$

**Определение 2.2.** *Будем говорить, что функция* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow ]0,+\infty[$ *принадлежит классу функций* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, *если классу* $\Gamma$ *принадлежит*:

1) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f(y)}$ *при* $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = 0$;

2) *функция* $f_0(y) = f(-y)$ *при* $Y_0 = -\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$;

3) *функция* $f_0(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* $\Delta_{Y_0}$ — *правая окрестность нуля и* $Z_0 = +\infty$;

4) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* $\Delta_{Y_0}$ — *правая окрестность нуля и* $Z_0 = 0$;

5) *функция* $f_0(y) = f\left(-\dfrac{1}{y}\right)$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* $\Delta_{Y_0}$ — *левая окрестность нуля и* $Z_0 = +\infty$;

6) *функция* $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{y}\right)}$ *при* $Y_0 = 0$, *когда* $\Delta_{Y_0}$ — *левая окрестность нуля и* $Z_0 = 0$;

7) *функция* $f_0(y) \equiv f(y)$ *при* $Y_0 = +\infty$ *и* $Z_0 = +\infty$.

С использованием этих двух определений и первых двух утверждений леммы 2.2 приходим к выводу, что для функции $f \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y+ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{для любого} \quad u\in\mathbb{R}, \tag{2.6}$$

в котором функция $g$, дополняющая для $f$, в каждом из случаев $1-7$ может быть выражена через функцию $g_0$, дополняющую для $f_0$, следующим (соответственно) образом:

1) $g(y) = -g_0(y)$;

2) $g(y) = -g_0(-y)$;

3) $g(y) = -y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$;

4) $g(y) = y^2 g_0\left(\dfrac{1}{y}\right)$;

5) $g(y) = y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$;

6) $g(y) = -y^2 g_0\left(-\dfrac{1}{y}\right)$;

7) $g(y) = g_0(y)$.

Здесь в силу третьего утверждения леммы 2.2 каждая из функций $g_0\colon [x_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ определяется однозначно с точностью до эквивалентных при $x\to+\infty$ функций, и в качестве одной из них может быть выбрана, например, функция $\dfrac{\int_{x_0}^{x} f_0(s)\,ds}{f_0(x)}$.

С использованием первых двух утверждений леммы 2.2 приходим также к выводу, что справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.3.** 1. *Если* $f\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g$, *то* $\lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \dfrac{g(y)}{y} = 0$.

2. *Если* $f\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g$, *то для любой функции* $u\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow\mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0\in\mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y+u(y)g(y)] = Z_0,$$

*имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f\left(y+u(y)g(y)\right)}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Если $f\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g$ и, кроме того, является непрерывной и строго монотонной, то для нее существует непрерывная строго монотонная обратная функция $f^{-1}\colon \Delta_{Z_0}\longrightarrow\Delta_{Y_0}$, где

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} \text{либо} & [z_0, Z_0[, \\ \text{либо} & ]Z_0, z_0], \end{cases} \qquad z_0 = f(y_0), \qquad Z_0 = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y).$$

В силу теорем 3.1.16, 3.10.4 из монографии [5, с. 139, 176] и определения 2.2 эта обратная функция имеет следующие свойства.

**Лемма 2.4.** *Пусть* $f\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g$ *и является непрерывной строго монотонной функцией на промежутке* $\Delta_{Y_0}$. *Тогда обратная для нее функция* $f^{-1}(z)$ *является медленно меняющейся при* $z\to Z_0$ *и удовлетворяет предельному соотношению*

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln\lambda \quad \textit{при любом} \quad \lambda>0.$$

*Более того, для любого* $\Lambda>1$ *данное предельное соотношение выполняется равномерно по* $\lambda\in\left[\dfrac{1}{\Lambda},\Lambda\right]$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда функция $f\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ является дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условиям (2.1). В этом случае для каждой из указанных в определении 2.2 функций $f_0\colon [x_0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, где $x_0$ — некоторое положительное число, выполняются условия

$$f_0'(x)\neq 0 \quad \text{при} \quad x\in[x_0,+\infty[, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_0(x) f_0''(x)}{f_0'^2(x)} = 1.$$

В силу этих условий, леммы 2.1, третьего и четвертого утверждений леммы 2.2 справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.5.** *Если дважды непрерывно дифференцируемая функция* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow ]0,+\infty[$ *удовлетворяет условиям* (2.1), *то она принадлежит классу* $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ *с дополняющей функцией* $g\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, *которая определяется однозначно с точностью до эквивалентных при* $y \to Y_0$ *функций, в качестве которой может быть выбрана, например, одна из функций*

$$\frac{\displaystyle\int_Y^y \left(\int_Y^t f(u)\,du\right) dt}{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx} \sim \frac{\displaystyle\int_Y^y f(x)\,dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \textit{при} \quad y \to Y_0,$$

*где предел интегрирования* $Y$ *такой же, как в* (2.2).

***Замечание*** **2.1.** Леммы 2.3 – 2.5 относятся к случаю, когда функция $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow ]0,+\infty[$ (т. е. принимает положительные значения). В случае функции $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow$ $\longrightarrow ]-\infty,0[$ будем говорить, что она принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, если $(-f) \in \Gamma_{Y_0}(-Z_0)$. Тогда нетрудно проверить, что для нее леммы 2.3 – 2.5 также остаются справедливыми.

Кроме указанных выше свойств дважды непрерывно дифференцируемых функций $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$, удовлетворяющих условиям (2.1), в дальнейшем потребуется еще одно вспомогательное утверждение об априорных асимптотических свойствах $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), которое вытекает из следствия 10.1 работы [6].

**Лемма 2.6.** *Если* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, *то для каждого* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решения дифференциального уравнения* (1.1) *имеют место асимптотические соотношения*

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\bigl[1+o(1)\bigr], \qquad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1+o(1)}{\lambda_0-1} \quad \textit{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{2.7}$$

*где*

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \textit{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

**3. Основные результаты.** Прежде всего введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения. Будем считать, что область определения функции $\varphi$ в уравнении (1.1) определяется формулой (2.2). Далее, положим

$$\mu_0 = \operatorname{sign}\varphi'(y), \qquad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \qquad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} = ]Y_0, y_0], \end{cases}$$

и введем функции

$$J(t) = \int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, \qquad \Phi(y) = \int\limits_B^y \frac{ds}{\varphi(s)},$$

где $\pi_\omega$ определяется формулой (2.8),

$$A = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \text{const}, \\ a, & \text{если} \quad \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau = \pm\infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} Y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{если} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1.1), заметим, что числа $\nu_0,\ \nu_1$ и $\alpha_0$ определяют знаки любого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения, его первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности $\omega$. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1<0, \quad \text{если} \quad Y_0=0, \qquad \nu_0\nu_1>0, \quad \text{если} \quad Y_0=\pm\infty, \tag{3.1}$$

и

$$\nu_1\alpha_0<0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=0, \qquad \nu_1\alpha_0>0, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=\pm\infty, \tag{3.2}$$

являются необходимыми для существования таких решений. Более того, при $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ согласно лемме 2.6 имеем

$$\nu_0\nu_1=\operatorname{sign}[\lambda_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)], \qquad \nu_1\alpha_0=\operatorname{sign}[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)] \quad \text{при} \quad t\in[a,\omega[, \tag{3.3}$$

откуда, в частности, следует, что

$$\alpha_0\nu_0\lambda_0>0. \tag{3.4}$$

Теперь отметим некоторые свойства функции $\Phi$. Она сохраняет знак на промежутке $\Delta_{y_0}$, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $y\to Y_0$ и является возрастающей на $\Delta_{Y_0}$, поскольку на этом промежутке $\Phi'(y)=\dfrac{1}{\varphi(y)}>0$. Поэтому для нее существует обратная функция $\Phi^{-1}:$ $\Delta_{Z_0}\longrightarrow\Delta_{Y_0}$, где в силу второго из условий (1.2) и монотонного возрастания $\Phi^{-1}$

$$Z_0=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\Phi(y)=\begin{cases}\text{либо} \quad 0,\\ \text{либо} \quad +\infty,\end{cases} \qquad \Delta_{Z_0}=\begin{cases}[z_0,Z_0[, \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0}=[y_0,Y_0[,\\ ]Z_0,z_0], \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0}=]Y_0,y_0],\end{cases} \qquad z_0=\varphi(y_0). \tag{3.5}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца и последнего из условий (1.2)

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\Phi(y)}{\dfrac{1}{\varphi'(y)}}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}}{-\dfrac{\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}}=-\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi'^2(y)}{\varphi''(y)\varphi(y)}=-1.$$

Значит,

$$\Phi(y)\sim-\frac{1}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y\to Y_0 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{sign}\Phi(y)=-\mu_0 \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}. \tag{3.6}$$

Из первого из этих соотношений также следует, что

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)}=\frac{\dfrac{1}{\varphi(y)}}{\Phi(y)}\sim-\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}, \qquad \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)}=\frac{-\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi^2(y)}\Phi(y)}{\dfrac{1}{\varphi^2(y)}}\sim 1 \quad \text{при} \quad y\to Y_0. \tag{3.7}$$

Поэтому согласно лемме 2.5 $\Phi\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией, в качестве которой может быть выбрана одна из эквивалентных функций

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi''(y)} \sim \frac{\Phi(y)}{\Phi'(y)} \sim -\frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.8}$$

Кроме указанных выше обозначений введем также вспомогательные функции

$$q(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega^2(t)\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))},$$

$$H(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\varphi'\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}.$$

Для уравнения (1.1) имеют место следующие утверждения.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-решений дифференциального уравнения* (1.1) *необходимо, чтобы наряду с* (3.4) *выполнялись условия*

$$\alpha_0\mu_0(\lambda_0 - 1)J(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in ]a, \omega[, \tag{3.9}$$

$$\alpha_0(\lambda_0-1)\lim_{t\uparrow\omega} J(t) = Z_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} q(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}. \tag{3.10}$$

*Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\left[1 + \frac{o(1)}{H(t)}\right] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.11}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}{\pi_\omega(t)}\big[1 + o(1)\big] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.12}$$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0; 1\}$ *и наряду с* (3.4), (3.9), (3.10) *существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|}. \tag{3.13}$$

*Тогда*: 1) *если*

$$(\lambda_0 - 1)J(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in ]a, \omega[ \qquad \textit{и} \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t)\right]|H(t)|^{1/2} = 0, \tag{3.14}$$

*то существует однопараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-решений с представлениями* (3.12), (3.13) *дифференциального уравнения* (1.1), *причем таких, производная которых удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}{\pi_\omega(t)}\left[1 + |H(t)|^{-1/2}o(1)\right] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega; \tag{3.15}$$

2) *если*

$$(\lambda_0 - 1)J(t) > 0 \quad \text{при } t \in ]a, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t)\right] |H(t)|^{1/2} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^2 = 0 \tag{3.16}$$

*и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}}{|H(t)|^{1/2}} = 0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} |H(t)|^{1/2} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right) \left.\frac{\left(\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\right|_{y=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))} = 0, \tag{3.17}$$

*где* $t_0$ *— некоторое число из промежутка* $[a, \omega[$, *то при* $\omega = +\infty$ *уравнение* (1.1) *имеет одно* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-решение, допускающее асимптотические представления*

$$y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) \left[1 + \left(H(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^{-1} o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.18}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))}{\pi_\omega(t)} \left[1 + \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{\pi_\omega(\tau)}\right)^{-1} o(1)\right] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.19}$$

*а при* $\omega < +\infty$ *— двупараметрическое семейство* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-решений с такими представлениями.*

***Доказательство теоремы* 3.1.** Пусть $y\colon [t_0, \omega[ \longrightarrow \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1.1). Тогда согласно лемме 2.6 имеют место асимптотические соотношения (2.7). В силу этих соотношений и (1.1) данное решение и его производные первого и второго порядка сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1, \omega[ \subset [t_0, \omega[$, причем для этих знаков имеют место равенства (3.2), из которых следует условие (3.4). Кроме того, из (1.1) с учетом второго из асимптотических соотношений (2.7) следует, что

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p(t)\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.20}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $t_0$ до $t$, получаем

$$\int\limits_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \alpha_0(\lambda_0 - 1) \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega(\tau)p(\tau)\big[1 + o(1)\big]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку согласно определению $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения $y(t) \longrightarrow Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то отсюда следует, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_0)}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi(s)} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{t_0}^{\omega} \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. С учетом этого факта и правила выбора пределов интегрирования $A$ и $B$ в введенных в начале данного пункта функциях $J$ и $\Phi$ установленное выше соотношение может быть записано в виде

$$\Phi(y(t)) = \alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.21}$$

Отсюда с учетом второго из условий (3.6) следует, что выполняются неравенство (3.9) и первое из условий (3.10). В силу же первого из условий (3.6) из (3.20) и (3.21) следует, что

$$\frac{y'(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))} = -\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{J(t)}\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и поэтому в силу первого из асимптотических соотношений (2.7)

$$\frac{y(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))} = -\frac{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p(t)}{\lambda_0 J(t)}\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Из данного соотношения в силу (1.3) и определения $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решения непосредственно следует справедливость второго из предельных условий (3.10).

Теперь из (3.21) находим

$$y(t) = \Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda - 1)J(t)\big[1 + o(1)\big]\big) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.22}$$

Функция $\Phi$, как было установлено ранее, принадлежит классу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, где $Z_0 = \lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \Phi(y)$, и в качестве ее дополняющей функции может быть выбрана функция $g(y) = -\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Тогда в силу условий $\alpha_0(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J(t) = Z_0$ и $\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t) \in \Delta_{Z_0}$ при $t \in [t_0, \omega[$, которые вытекают из (3.20) и (3.5), согласно лемме 2.4 имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)\big[1 + o(1)\big]\big) - \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))}{-\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)))}} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to Z_0 \\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{\Phi^{-1}(z(1 + o(1))) - \Phi^{-1}(z)}{-\dfrac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}} = 0,$$

откуда следует, что

$$\Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)\big[1 + o(1)\big]\big) =$$

$$= \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) + \frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)))}o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого соотношения из (3.22) получаем асимптотическое представление (3.11). Если же учесть, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\varphi'\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\pm\infty,$$

то (3.11) может быть записано в виде

$$y(t)=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big[1+o(1)\big]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

и поэтому в силу первого из асимптотических соотношений (2.7) имеет место асимптотическое представление (3.12).

Далее, используя представление (3.11), из (1.1) находим

$$y''(t)=\alpha_0p(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}{\varphi'(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}o(1)\right)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{3.23}$$

Поскольку $\varphi\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, где $Z_0=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\varphi(y)$, который согласно второму из условий (1.2) равен либо нулю, либо $+\infty$, и в качестве ее дополняющей функции может быть выбрана функция $g(y)=\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$, то на основании леммы 2.3 с учетом условий $\lim_{t\uparrow\omega}\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))=Y_0$ и $\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[t_0,\omega[$ получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\dfrac{\varphi(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}{\varphi'(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}o(1)\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi\left(y+\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}o(1)\right)}{\varphi(y)}=1.$$

Поэтому при $t\uparrow\omega$

$$\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi\Big(\Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)\big)\Big)}{\varphi'\Big(\Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)\big)\Big)}\,o(1)\right)=$$

$$=\varphi\left(\Phi^{-1}\big(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)\big)\right)[1+o(1)]$$

и асимптотическое соотношение (3.23) может быть записано в виде

$$y''(t)=\alpha_0p(t)\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)\big[1+o(1)\big]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

В силу этого представления и (3.12)

$$\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}=\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega^2(t)p(t)\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\lambda_0\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))}\big[1+o(1)\big]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом второго из асимптотических соотношений (2.7) следует справедливость третьего из условий (3.10).

Теорема 3.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.2.** Предположим, что существует конечный или равный $\pm\infty$ предел (3.13) и для некоторого $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ выполняются условия (3.4), (3.9), (3.10), а также одно из условий либо (3.14), либо (3.16) и (3.17). При этих условиях установим существование $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений дифференциального уравнения (1.1), допускающих асимптотические представления (3.11), (3.12), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала, учитывая существование конечного или равного $\pm\infty$ предела (3.13), покажем, что этим пределом может быть только нуль. Допустим противное. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left|\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{3/2}} = \frac{z(y)}{|y|^{1/2}},$$

где функция $z\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y) = \begin{cases} \text{либо} \quad c = \text{const} \neq 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty. \end{cases} \tag{3.24}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от $y_0$ до $y$, получаем

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-1/2} = c_0 + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{z(s)}{|s|^{1/2}} ds, \tag{3.25}$$

где $c_0$ — некоторая постоянная.

Если $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{1/2}} = \pm\infty$, то отсюда после деления на $|y|^{1/2}$ имеем

$$-2\mu_0 \left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-1/2} = \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)ds}{|s|^{1/2}}}{|y|^{1/2}} \big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Здесь выражение, стоящее слева, в силу (1.3) стремится к нулю при $y \to Y_0$, а стоящее справа в силу условия (3.24) — либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$, поскольку согласно правилу Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{z(s)ds}{|s|^{1/2}}}{|y|^{1/2}} = 2\mu_0 \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} z(y),$$

что невозможно.

Если же $\displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{z(s)\,ds}{|s|^{1/2}}$ сходится, что возможно лишь в случае, когда $Y_0 = 0$, то (3.25) запишем в виде

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-1/2} = c_1 + \int\limits_{0}^{y} \frac{z(s)ds}{|s|^{1/2}},$$

где $c_1 = c_0 + \displaystyle\int_{y_0}^{0} \frac{z(s)ds}{|s|^{1/2}}$. Докажем, что здесь $c_1 = 0$. В самом деле, если $c_1 \neq 0$, то из данного соотношения следует, что

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{4\mu_0}{c_1^2} + o(1) \quad \text{при} \quad y \to 0.$$

Отсюда в результате интегрирования на промежутке от $y_0$ до $y$ получаем

$$\ln|\varphi(y)| = \text{const} + o(1) \quad \text{при} \quad y \to 0,$$

что противоречит второму из условий (1.2). Значит, $c_1 = 0$ и поэтому имеем

$$-2\mu_0 \left|\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|^{-1/2} = \int\limits_0^y \frac{z(s)ds}{|s|^{1/2}}.$$

Разделив обе части этого равенства на $|y|^{1/2}$, заметим, что левая часть полученного соотношения в силу условий (1.3) стремится к нулю при $y \to 0$, а правая в силу правила Лопиталя и (3.24) — либо к отличной от нуля постоянной, либо к $\pm\infty$.

Полученные в каждом из двух возможных случаев противоречия приводят к выводу, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right|} = 0. \tag{3.26}$$

Теперь, применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{gathered} y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) \left[1 + \frac{y_1}{H(t)}\right], \\ y'(t) = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) \big[1 + y_2(t)\big], \end{gathered} \tag{3.27}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{H(t)}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) + h(t)y_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} y_2\right], \\ y_2' &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q(t) + \frac{q(t)}{\lambda_0} y_1 + (1 - q(t))\, y_2 + \frac{1}{\lambda_0} q(t) R(t, y_1)\right], \end{aligned} \tag{3.28}$$

в которой

$$h(t) = q(t) \left. \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \right|_{y = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))},$$

$$R(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) + \dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))\big)}{\varphi'\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))\big)} y_1\right)}{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t))\big)} - 1 - y_1.$$

Эту систему уравнений рассмотрим на множестве $\Omega = [t_0, \omega[ \times D_1 \times D_2$, где $D_i = \{y_i :\ |y_i| \le 1\}$, $i = 1, 2$, и число $t_0 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом условий (1.3), (3.5), (3.6), (3.9) и (3.10) так, чтобы

$$\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)\in\Delta_{Z_0}\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[,$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}y_1\in\Delta_{Y_0}\quad\text{при}\quad t\in[t_0,\omega[\quad\text{и}\quad|y_1|\le 1.$$

На данном множестве правые части системы дифференциальных уравнений (3.28) непрерывны и функция $R$ имеет на множестве $[t_0,\omega[\times D_1$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно по переменной $y_1$. При этом имеем

$$R'_{y_1}(t,y_1)=\frac{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}y_1\right)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}-1.$$

Здесь $\varphi'\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y)=\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}y_1\right)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}=$$

$$=\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\varphi'\left(y+y_1\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}\right)}{\varphi'(y)}=e^{y_1}.$$

В силу этого предельного соотношения и леммы 2.3

$$R'_{y_1}(t,y_1)=e^{y_1}\big[1+r(t,y_1)\big]-1,$$

где $\lim_{t\uparrow\omega}r(t,y_1)=0$ равномерно по $y_1\in[-1,1]$. Значит, для любого $\varepsilon>0$ существуют $t_1\in[t_0,\omega[$ и $\delta>0$ такие, что

$$|R'_{y_1}(t,y_1)|\le\varepsilon\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[\qquad\text{и}\qquad y_1\in D_{1\delta}=\{y_1:|y_1|\le\delta\le 1\}.$$

Отсюда следует, что функция $R$ на множестве $[t_1,\omega[\times D_{1\delta}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $y_1$ с постоянной Липшица $\varepsilon$, из которого в силу тождества $R(t,0)\equiv 0$ следует оценка

$$|R(t,y_1)|\le\varepsilon|y_1|\quad\text{при}\quad t\in[t_1,\omega[\qquad\text{и}\qquad y_1\in D_{1\delta}. \tag{3.29}$$

Если же при фиксированном $t\in[t_0,\omega[$ функцию $R$ разложить по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа до членов второго порядка, то получим

$$R(t,v_1)=$$

$$=\frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'^2\,(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\xi\right)y_1^2, \tag{3.30}$$

где $|\xi| < |y_1|$. Здесь в силу последнего из условий (1.2)

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\xi\right)=$$

$$=\frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\xi\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\dfrac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\xi\right)}\big[1+r_1(t,y_1)\big],$$

где $\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t,y_1)=0$ равномерно по $y_1\in D_1$. Поэтому, учитывая, что функции $\varphi,\varphi'\in$ $\in\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ с дополняющей функцией $g(y)=\dfrac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}$, имеем

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))+\frac{\varphi\big(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\big)}{\varphi'(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}\xi\right)=$$

$$=\frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))\right)}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t)))}e^{\xi}\big[1+r_2(t,y_1)\big],$$

где $\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t,y_1)=0$ равномерно по $y_1\in D_1$. Значит, (3.25) может быть записано в виде

$$R(t,y_1)=e^{\xi}\big[1+r_1(t,y_1)\big]\big[1+r_2(t,y_1)\big]y_1^2.$$

Отсюда ясно, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta>0$ и $t_1\in[t_0,\omega[$ такие, что

$$|R(t,y_1)|\le(1+\varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t\in[t_1,\omega[ \qquad \text{и} \qquad y_1\in D_{1\delta}=\{y_1:\ |y_1|\le\delta\}. \tag{3.31}$$

Кроме того, в системе уравнений (3.28) в силу условий (1.2), (1.3), (3.5), (3.9) и (3.10)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t)=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} h(t)=0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} H(t)=\pm\infty. \tag{3.32}$$

Согласно вышеизложенному система (3.28) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений. Для установления существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (1.1), допускающих асимптотические представления (3.11), (3.12), следует согласно преобразованию (3.27) доказать существование стремящихся к нулю при $t\uparrow\omega$ решений системы дифференциальных уравнений (3.28). С целью использования известных результатов о наличии исчезающих в особой точке решений квазилинейных систем дифференциальных уравнений приведем систему (3.28) к виду, допускающему применение таких результатов.

Применяя к системе (3.28) дополнительное преобразование

$$y_1=v_1, \qquad y_2=|H(t)|^{-1/2}v_2, \tag{3.33}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{gathered}
v_1' = \frac{|H(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\big[f_1(t) + c_{11}(t)v_1 + c_{12}(t)v_2\big], \\
v_2' = \frac{|H(t)|^{1/2}}{\pi_\omega(t)}\big[f_2(t) + c_{21}(t)v_1 + c_{22}(t)v_2 + V(t, v_1)\big],
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

где

$$
f_1(t) = \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t)\right] |H(t)|^{1/2} \operatorname{sign} H(t), \qquad f_2(t) = 1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q(t),
$$

$$
c_{11}(t) = h(t)|H(t)|^{1/2} \operatorname{sign} H(t), \qquad c_{12}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \operatorname{sign} H(t),
$$

$$
c_{21}(t) = \frac{q(t)}{\lambda_0}, \qquad c_{22}(t) = |H(t)|^{-1/2} \left(1 - \frac{q(t)}{2} + \frac{h(t)}{2}|H(t)|^{1/2} \operatorname{sign} H(t)\right),
$$

$$
V(t, v_1) = \frac{1}{\lambda_0} q(t) R(t, v_1).
$$

Выбрав произвольным образом число $\varepsilon > 0$, подберем для него, с учетом вышеизложенного о свойствах функции $R$, числа $\delta > 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство (3.31), и рассмотрим систему (3.34) на множестве

$$
\Omega_1 = \big\{(t, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 :\ t \in [t_1, \omega[,\ v_1 \in [-\delta, \delta],\ v_2 \in [-1, 1]\big\}.
$$

В силу (3.31), замены $y_1$ на $v_1$ и первого из условий (3.32)

$$
\lim_{v_1 \to 0} \frac{V(t, v_1)}{|v_1|} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_1, \omega[.
$$

Кроме того, с учетом условий (3.32), (3.26) и введенных в начале данного пункта обозначений

$$
\lim_{t \uparrow \omega} f_2(t) = 0, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} c_{11}(t) = 0, \qquad c_{12}(t) \equiv \frac{\nu_0 \mu_0 \lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} c_{21}(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \tag{3.35}
$$

$$
\lim_{t \uparrow \omega} c_{22}(t) = 0, \qquad \int\limits_{t_1}^{\omega} \frac{|H(\tau)|^{1/2}}{\pi_\omega(\tau)} d\tau = \pm\infty. \tag{3.36}
$$

Отсюда, в частности, следует, что предельная матрица коэффициентов, стоящих при $v_1$ и $v_2$ в квадратных скобках системы (3.34), имеет вид

$$
C = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\nu_0 \mu_0 \lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \dfrac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 \end{pmatrix}
$$

и ее характеристическим уравнением является уравнение вида

$$
\rho^2 - \frac{\nu_0 \mu_0 \lambda_0}{(\lambda_0 - 1)^2} = 0. \tag{3.37}
$$

Здесь в силу условий (3.4) и (3.9) $\operatorname{sign}(\nu_0\mu_0\lambda_0) = -\operatorname{sign}[(\lambda_0 - 1)J(t)]$ при $t \in ]a, \omega[$.

Допустим далее, что выполняются условия (3.14). В этом случае алгебраическое уравнение (3.37) имеет два вещественных корня противоположных знаков и наряду с (3.35) и (3.36)

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_1(t) = 0.$$

Отсюда следует, что для системы дифференциальных уравнений (3.34) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [7]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.34) имеет однопараметрическое семейство исчезающих при $t \uparrow \omega$ решений $(v_1, v_2)\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(t_* \in [t_1, \omega[)$. Каждому из них в силу замен (3.27) и (3.33) соответствует решение $y\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, допускающее асимптотические представления (3.11) и (3.15).

Пусть теперь выполняются условия (3.16) и (3.17). В этом случае в силу первого из условий (3.16) алгебраическое уравнение (3.37) имеет чисто мнимые корни, и для выяснения вопроса о наличии у системы уравнений (3.34) исчезающих при $t \uparrow \omega$ решений воспользуемся результатами, полученными в [8]. Для этого систему уравнений (3.34) с помошью замены независимой переменной

$$v_1(t) = z_1(x), \qquad v_2(t) = z_2(x), \qquad x = \int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2} d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \tag{3.38}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= q_1(x) + b_1(x) z_1 + \frac{\beta\nu_0\mu_0\lambda_0}{\lambda_0 - 1} z_2, \\ z_2' &= q_2(x) + \frac{\beta}{\lambda_0 - 1} z_1 + b_2(x) z_2 + Z(x, z_1), \end{aligned} \tag{3.39}$$

где

$$q_1(x(t)) = \beta\nu_0\mu_0 \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t)\right] |H(t)|^{1/2}, \qquad q_2(x(t)) = \beta \left[1 - \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} q(t)\right],$$

$$b_1(x(t)) = \beta\nu_0\mu_0 h(t) |H(t)|^{1/2}, \qquad b_2(x(t)) = \beta |H(t)|^{-1/2} \left(1 - \frac{q(t)}{2} + \frac{\nu_0\mu_0 h(t)}{2} |H(t)|^{1/2}\right),$$

$$Z(x(t), z_1) = \frac{\beta q(t)}{\lambda_0} R(t, z_1), \qquad \beta = \operatorname{sign} \pi_\omega(t).$$

Поскольку $x'(t) > 0$ при $t \in ]t_0, \omega[$ и в силу третьего из условий (3.32) $\lim_{t\uparrow\omega} x(t) = +\infty$, то система уравнений (3.39) определена на множестве $G = \{(x, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^3\colon\ x \in [0, +\infty[, |z_1| \le \le \delta, |z_2| \le 1\}$ и в силу (3.32), (3.16), (3.17), (3.31)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 q_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} \left(\int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{|\pi_\omega(t)|}\right)^2 q_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x b_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} \left(\int\limits_{t_1}^{t} \frac{|H(\tau)|^{1/2}\, d\tau}{|\pi_\omega(t)|}\right) b_i(x(t)) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\lim_{z_1\to 0}\frac{x^2 Z\left(x,\dfrac{z}{x}\right)}{z_1}=\lim_{z_1\to 0}\frac{x^2(t)q(t)R\left(t,\dfrac{z_1}{x(t)}\right)}{\lambda_0 z_1}=0 \quad \text{равномерно по} \quad x\in[0,+\infty[.$$

При этом характеристическим уравнением предельной матрицы коэффициентов линейной части системы является алгебраическое уравнение (3.37), которое в данном случае имеет чисто мнимые корни.

В силу вышеизложенного для системы дифференциальных уравнений (3.39) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [8] (при $r=\varepsilon=1$). Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (3.39) при $\omega<+\infty$ имеет двупараметрическое семейство исчезающих на бесконечности решений $(z_1,z_2)\colon [x_0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 (x_0\geq 0)$ вида

$$z_i(x)=o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при} \quad x\to+\infty, \quad i=1,2,$$

а при $\omega=+\infty$ система имеет по крайней мере одно решение с такими представлениями (его единственность следует из того, что функция $R$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $z_1$). Каждому такому решению в силу замен (3.27), (3.33) и (3.38) соответствует $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение $y\colon [t_2,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(t_2\in[a,\omega[$, допускающее асимптотические представления вида (3.18) и (3.19).

Теорема 3.2 доказана.

**4. Выводы.** В настоящей работе впервые для уравнения вида (1.1) с быстро меняющейся при $y\to Y_0$, где $Y_0$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, нелинейностью $\varphi$ установлены условия существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений в неособом случае $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, а также асимптотические представления при $t\uparrow\omega$ $(\omega\leq+\infty)$ для таких решений и их производных первого порядка. Раньше для класса $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений достаточно полно был исследован вопрос о их наличии и асимптотике в случае правильно меняющейся при $y\to Y_0$ нелинейности $\varphi$.

## Литература


1. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – 2000. – **1726**. – 128 p.
2. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 9. – С. 1311 – 1323.
3. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
4. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений $n$-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2008. – **5**, № 3. – С. 308 – 322.
5. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation // Encycl. math. and Appl. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 494 p.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
7. *Евтухов В. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.
8. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 441 – 452.


Получено 03.02.16