УДК 517.9

Ж. О. Тахиров, М. С. Расулов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ

We consider a problem with free boundary for systems of quasilinear parabolic equations. A part of the boundary conditions are given in the nonlocal form. The *a priori* estimates of the Hölder norms are established. These estimates are used to prove the existence and uniqueness of the solution.

Розглядається задача з вільною межею для систем квазілінійних параболічних рівнянь. Частину граничних умов задано в нелокальній формі. Встановлено апріорі оцінки норм Гельдера. На основі цих оцінок доведено існування та єдиність розв'язку.

1. Введение. В работах А. Фридмана, И. Данилюка, А. Рубинштейна, Б. Базалия, А. Мейрманова [1 – 5] и других решены принципиальные проблемы разрешимости и дифференциальных свойств решений для широких классов задач со свободной границей.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования новых классов нестандартных задач со свободной границей, которые возникают в приложениях. Например, в работах [6, 7] изучены задачи со свободной границей для параболических систем уравнений типа реакция-диффузия, а в статьях [8, 9] рассмотрены обратные задачи со свободной границей для параболических уравнений.

Математическое моделирование является конструктивным подходом к исследованию тех или иных свойств объектов или систем. Нелинейное взаимодействие компонентов системы в сочетании с процессами переноса приводит к сложным пространственно-временным режимам. При исследовании этих явлений в качестве базовой модели обычно используют системы квазилинейных уравнений параболического типа реакция-диффузия[10].

Настоящая работа посвящена исследованию одной медико-биологической проблемы. которая поставлена в работе [11] и изучена в [6] в виде задач со свободной границей.

2. Постановка задачи. Требуется найти функции $s(t),\ u(t,x),\ v(t,x)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = (a_1(u,v)u_x)_x + f_1(u,v), \qquad D = \big\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\big\}, \tag{1}$$

$$v_t = (a_2(u,v)v_x)_x + f_2(u,v), \qquad Q = \big\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < l\big\}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le s_0 = s(0) < l, \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$v(t,0) = m_1 v(t,x_1), \qquad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x_1 < x_2 < l, \tag{6}$$

$$v(t,l) = m_2 v(t,x_2), \qquad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_1 < x_2 < l, \tag{7}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad s(t) \le x \le l, \tag{9}$$

$$\dot{s}(t) = -a_1(0, v)u_x(t, s(t)), \qquad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

где $x = s(t)$ — свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения раны и определяется вместе с функциями $u(t,x), v(t,x)$. Здесь $u(t,x)$ — плотность здоровых тканей вне раны, $v(t,x)$ — концентрация химико-биологических препаратов [11].

Сначала с помощью метода, основанного на построений априорных оценок, определим ограничения на параметры задачи, при которых она глобально разрешима. Первая, основополагающая, оценка дает ту начальную информацию, отправляясь от которой можно получать шаг за шагом, двигаясь вверх по шкале банаховых пространств, все более полные и точные сведения об изучаемом решении.

В дальнейшем в отношении функциональных пространств и обозначения норм в них будем следовать обозначениям [1, 12].

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

a) $a_i(u,v) \ge a_{i0} > 0$, $a_{i0}, m_i, x_i - \mathrm{const}$, $0 < m_i < 1$, $i = 1, 2$;

b) Если $0 \le u(t,x) \le M_1\big(|u_0|_0, |f_1(0,0)|\big)$, $0 \le v(t,x) \le M_2\big(|v_0|_0, |f_2(0,0)|\big)$ (эти неравенства будут установлены для точных M_1, M_2 в лемме 1), то определим множество

$$\Omega = \Big\{(u,v)\colon 0 \le u(t,x) \le M_1\big(|u_0|_0, |f_1(0,0)|\big), 0 \le v(t,x) \le M_2\big(|v_0|_0, |f_2(0,0)|\big)\Big\},$$

причем $0 < M_2 \le M_1$, $a_i(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $a_{iu}(u,v) \le 0$, $f_{1u}(u,v) \le 0$, $f_{2v}(u,v) \le 0$;

c) $f_1(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$; $f_1(u,v) > 0$, если $u(t,x) \le 0$, и $f_1(u,v) \le 0$, если $u(t,x) \ge M_1$ при любом $v(t,x)$;

d) $f_2(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$; $f_2(u,v) \ge 0$, если $v(t,x) \le 0$, и $f_2(u,v) \le 0$, если $v(t,x) \ge M_2$ при любом $u(t,x)$;

e) $u_0(x) \in C^{2+\alpha}$, $0 < u_0(x) < M_1$, $0 \le x \le s_0$; $u_0'(0) = 0$; $u_0(s_0) = 0$, $u_0'(s_0) < 0$, $v_0(x) \in C^{2+\alpha}[0,l]$, $0 \le v_0(x) \le M_2$; $v_0(0) = M_1 v_0(x_1)$, $v_0(l) = M_2 v_0(x_2)$.

Соответствующие условия согласования имеют первый порядок.

Задача (1) – (10) исследована в работе [6] в случае $a_2(u,v) \equiv 1$, а вместо нелокальных условий (6), (7) заданы однородные условия второго рода.

Здесь и в дальнейшем через M_i обозначены постоянные, зависящие от данных задачи.

3. Априорные оценки. В этом пункте установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи. При этом широко применяется принцип максимума и теоремы сравнений [1].

Лемма 1. *Пусть функции* $\big(s(t), u(t,x), v(t,x)\big)$ *являются решением задачи* (1) – (10). *Тогда существуют положительные постоянные* M_1, M_2, *не зависящие от* T, *для которых справедливы оценки*

$$0 \le u(t,x) \le M_1\big(|u_0|, |f_1(0,0)|\big), \qquad (t,x) \in D, \tag{11}$$

$$0 \le v(t,x) \le M_2\big(|v_0|, |f_2(0,0)|\big), \qquad (t,x) \in Q, \tag{12}$$

$$0 < \dot{s}(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{13}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (12). Рассмотрим задачу для $v(t,x)$ в Q (радача (B), см. ниже). Неотрицательность следов $v(t,0)$ и $v(t,l)$ устанавливается следующим образом. Пусть в некоторой граничной точке $(t_0, 0)$ функция $v(t,x)$ достигает отрицательного минимума $v(t_0, 0) = -M$. Тогда в силу условия (6) $-M = v(t_0, 0) = m_1 v(t_0, x_1) > v(t_0, x_1)$ приходим к противоречию. Аналогично устанавливается, что и на правой границе функция $v(t, x)$ не принимает отрицательных значений.

Теперь докажем, что функция $v(t, x)$ внутри области Q не принимает отрицательных значений.

Пусть в некоторой внутренней точке $(t_0, x_0) \in Q$ функция $v(t, x)$ достигает отрицательного минимума. Если проверить выполнение уравнении в точке отрицательного минимума ($v_{xx} \geq 0$, $v_t \leq 0,\ v_x = 0,\ f_2 > 0$), то

$$a_2 v_{xx} + a_{2a} {v_x}^2 + a_{2u} u_x v_x + f_2(u, v) - v_t > 0,$$

т. е. придем к противоречию.

Чтобы доказать положительность $u(t, x)$ в D, предполагаем, что всюду в D $u(t, x) < 0$ и $u(P) = 0$ в некоторой точке $P \in D$. Это будет точка максимума. Тогда в этой точке, как и выше, имеем

$$u_t - (a_1(u, v) u_x)_x > 0.$$

Следовательно, согласно строгому принципу максимума $u(P) > 0$ и приходим к противоречию. Точно так же, если предположить, что $u(P) \geq M_1,\ P \in D$, то $u(t, x) < M_1$ в D.

Теперь докажем неравенство (13). Поскольку $f(0, v) > 0$, то $u_t - (a_1 u_x)_x = f(u, v) >$ > 0 вблизи свободной границы. Следовательно, $u(t, x) \geq u(t, s(t)) = 0$. Тогда по строгому принципу максимума $u_x(t, s(t)) < 0,\ 0 \leq t \leq T$ и из условия (10) имеем $\dot{s}(t) > 0$.

Лемма 1 доказана.

Верхняя оценка для $\dot{s}(t)$ устанавливается с помощью оценок для $|u_x|,\ |v_x|$, которые будут построены в теореме 1.

Основной трудностью при построении нелокальной теории для задач нелинейных уравнений является получение оценки $\max |u_x|$. Различные методы получения априорных оценок шаудеровского типа предложены многими авторами (см., например, [1]). В частности, в [12] предложен своеобразный метод получения априорных оценок и исследования задач. При этом построение априорных оценок вплоть до границы области существенно опирается на гладкость граничных условий. Поэтому в случае нелокальных граничных условий, а также в задачах со свободной границей требуются дополнительные рассуждения.

Будем придерживаться обозначений, принятых в [12]:

$$Q^\delta = \big\{(t, x) \colon 0 \leq t \leq T,\ \delta \leq x \leq l - \delta\big\}.$$

Для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{gathered} a_1(u, v) u_{xx} + b_1(u, v, u_x, v_x) - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \\ u_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \dot{s}(t) = -a_1(0, v) u_x(t, s(t)), \qquad 0 \leq t \leq T, \\ a_2(u, v) v_{xx} + b_2(u, v, u_x, v_x) - v_t = 0 \quad \text{в} \quad Q, \end{gathered} \tag{A}$$

$$v(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{B}$$

$$v(t,0) = m_1 v(t,x_1), \quad 0 \le t \le T,$$

$$v(t,l) = m_2 v(t,x_2), \qquad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_1 < x_2 < l,$$

где

$$b_1(u,v,u_x,v_x) = a_{1u}u_x^2 + a_{1v}v_x u_x + f_1(u,v),$$

$$b_2(u,v,u_x,v_x) = a_{2v}v_x^2 + a_{2u}u_x v_x + f_2(u,v).$$

При условии e) без ограничений общности можно предполагать, что $v_0(x) = 0$.

Теорема 1. *Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t,x)$ удовлетворяет условиям задачи* (B). *Предположим, что непрерывные функции $a_2(u,v)$, $b_2(\cdot)$ для $(t,x) \in \bar{Q}$, $|u| \le M_1$, $|v| \le M_2$ и произвольных u_x, v_x удовлетворяют условиям*

$$\frac{\left|b_2(x,u,v,u_x,v_x)\right|}{a_2(u,v)} \le K_2(u_x^2 + v_x^2 + 1). \tag{14}$$

Если $v(t,x)$ имеет в $\bar{Q}$ суммируемые с квадратом обобщенные производные v_{tx}, v_{xx}, то

$$|v_x(t,x)| \le P_0(M_2, a_{20}, K_2, \delta), \quad (t,x) \in Q^\delta, \tag{15}$$

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}} \le C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{16}$$

$$|v|_{2+\beta}^{Q^{4\delta}} \le C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \beta < 1, \tag{17}$$

где $a_{22} = \max_\Omega a_2(u,v)$.

Если $4\delta < x_1 < x_2 < l - 4\delta$, то оценки (15)–(17) *справедливы и в $\bar{Q}$.*

Доказательство. Поскольку установлены оценки $|u| \le M_1, |v| \le M_2$, то в силу теорем 3, 6 работы [12] справедливы внутренние оценки (15)–(17). Чтобы установить оценки вплоть до боковых границ, поступим следующим образом. Выбирая δ так, что $x_2 \le l - 4\delta$, и используя нелокальное условие (7), получаем, что ограниченная функция $v_t(t,l)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \beta = \alpha\gamma$. Теперь в области $Q_+ = \big\{(t,x) : 0 \le t \le T, l - 4\delta \le x \le l\big\}$ введем функции

$$V(t,x) = v(t,x) - g_1(t,x), \qquad U(t,x) = u(t,x),$$

$$g_1(t,x) = \frac{l-x}{4\delta} v(t, l-4\delta) + \frac{x-l+4\delta}{4\delta} v(t,l).$$

Для $V(t,x)$ получим задачу

$$V_t = \tilde{a}_2(U,V)V_{xx} + \tilde{b}_2(U,V,U_x,V_x) \quad \text{в} \quad Q_+,$$

$$V(0,x) = 0, \qquad l - 4\delta \le x \le l,$$

$$V(t, l-4\delta) = 0, \qquad V(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Отсюда, применяя теорему 4 работы [12], находим

$$|V|_{1+\gamma}^{Q_+} \leq C_1. \tag{18}$$

Аналогично устанавливаются оценки типа (18) и в области $Q_- = \{(t,x)\colon 0 \leq t \leq T, 0 \leq \leq x \leq 4\delta\}$.

Полученные оценки вместе с оценками (15)–(17) дают основные результаты в области $\bar{Q}$. Оценки старших производных устанавливаются с помощью результатов для линейных уравнений [1, 13].

Прежде чем перейти к задаче (A), приведем следующий результат.

Лемма 2. *Пусть выполнены все предположения леммы* 1, *теоремы* 1 *и, кроме того,*

$$\frac{d}{dx}a_1(u,v) \geq 0, \qquad N \geq \max_x \frac{u_0(x)}{s_0 - x}$$

Тогда $\dot{s}(t) \leq M_3$, *где* M_3 *зависит только от данных задачи и не зависит от* T.

Доказательство. Выполняя замену $U(t,x) = u(t,x) + N(x - s(t))$ в задаче (1), (3), (5), (8), имеем

$$a_1 U_{xx} - U_t = N\dot{s}(t) - a_{1u}u_x(U_x - N) - a_{1v}v_x(U_x - N) - f_1(u,v),$$

$$U_x(t,0) = N > 0, \qquad U(t,s(t)) = 0,$$

$$U(0,x) = U_0(x) + N(x - s_0) \leq 0,$$

Необходимое неравенство $U(t,x) \leq 0$ в D устанавливается следующим образом. Пусть в некоторой внутренней точке $P = (t_0, x_0)$ функция $U(t,x)$ достигает положительного максимума и в точке P с учетом $U_x(P) = 0$ уравнение принимает вид

$$a_1 U_{xx} - U_t = N\dot{s}(t) + N\frac{d}{dx}a_1(u,v) - f_1(U_N(s(t) - x), v).$$

Поскольку $\dot{s}(t) > 0$, $\dfrac{d}{dx}a_1(u,v) > 0$ и в силу условия c) задачи $f_1 \leq 0$, приходим к противоречию. Тогда по принципу максимума

$$U(t,x) = u(t,x) + N(x - s(t)) \leq 0 \text{ в } D.$$

В силу теоремы о знаке производной в граничной точке экстремума [1]

$$U_x(t,s(t)) = u_x(t,s(t)) + N \geq 0.$$

Тогда из условия (10) получаем

$$\dot{s}(t) \leq \|a_1\| N = M_3.$$

В случае задачи (A) априорные оценки строятся следующим образом. Предполагается выполненным условие теоремы 1 для задачи (A). Внутренние оценки в области $\{(t,x)\colon 0 \leq t \leq \leq T, 0 \leq x \leq s_0\}$ устанавливаются, как и в [12]. Чтобы получить оценки вблизи правой (свободной) границы, выполняя замену $\tau = t$, $y = \dfrac{x}{s(t)}$, распрямляем границу. Тогда области D соответствует область $\Omega_1 = \{(\tau,y)\colon 0 < \tau \leq T\, 0 < y < 1\}$, а для функции $w(\tau,y) = u(\tau, ys(\tau))$ получаем задачу для уравнений с непрерывными по Гельдеру коэффициентами и правой частью. Применяя метод четного продолжения через правую границу [12], устанавливаем оценки для $|w_y|, |w|_{1+\gamma}$ вплоть до $y = 1$. Оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений [1, 13].

Лемма 3. *Существует положительная постоянная $\varepsilon > 0$, не зависящая от T и такая, что*

$$\dot{s}(t) \geq \varepsilon > 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой сравнения [1], построим субрешения уравнения (1) в виде

$$U(t,x) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1}{2} {s_0}^2, & 0 < x < s(t) - s_0, \\ \varepsilon_1 \left[s_0(s(t) - x) - \dfrac{1}{2}(x - s(t))^2 \right], & s(t) - s_0 < x < s(t), \end{cases}$$

причем $U(t,x) \in {W_\infty}^{2,1}(D), \varepsilon_1 > 0$ — достаточно малое число. В промежутке $(0, s(t) - s_0)$ имеем

$$LU = U_t - (a_1(U,v)U_x) - f_1(U,v) = -f_1\left(\frac{\varepsilon_1}{2}{s_0}^2, v\right) < 0,$$

а в промежутке $(s(t) - s_0, s(t))$

$$U_t(t,x) = \varepsilon_1[s_0 - (s(t) - x)]\dot{s}(t) \leq \varepsilon_1 M_3,$$

$$f_1(U,v) \geq f_1(0,v) - C_1\varepsilon_1$$

Другие члены оператора LU ограничены $C_2\varepsilon_1$, где C_1 и C_2 — положительные постоянные, не зависящие от ε_1 и T.

Поскольку $f(0,v) \geq \mu > 0$, то находим

$$LU \leq -\mu + \varepsilon_1(M + C_1 + C_2) < 0.$$

С другой стороны, имеем краевые условия

$$U_x(t,0) = u_x(t,0) = 0, \qquad U(t,s(t)) = u(t,s(t)) = 0,$$

$$U(0,x) = \frac{\varepsilon_1}{2}{s_0}^2 < u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq s_0.$$

Сравнивая функции $u(t,x)$ и $U(t,x)$, получаем [1]

$$U(t,x) \leq u(t,x) \text{ в } D.$$

Отсюда

$$u_x(t,s(t)) \leq U_x(t,s(t)) = -\varepsilon_1 s_0.$$

Тогда из условия Стефана имеем

$$\dot{s}(t) \geq a_{10}s_0\varepsilon_1 = \varepsilon > 0.$$

Полученная оценка показывает, что неизвестная кривая монотонно возрастает по t и пересекает правую границу $x = l$ при некотором $t = T^*$.

Лемма 3 доказана.

4. Единственность решения. Известно, что вопрос единственности в задачах со свободной границей представляет самостоятельный интерес.

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [14]. Сначала выводим интегральное представление, эквивалентное к (10).

Интегрируя уравнение (1) по области D, находим

$$s(t) = s_0 + \int\limits_0^{s_0} u_0(\xi)d\xi - \int\limits_0^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{s(\eta)} f_1(u,v)d\xi. \tag{19}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1)–(10) *единственно.*

Доказательство. Пусть $s_1(t),\ u_1(t,x), v_1(t,x)$ и $s_2(t),\ u_2(t,x),\ v_2(t,x)$ являются решениями задачи (1)–(10) и, кромето того, $y(t) = \min(s_1(t), s_2(t)),\ h(t) = \max(s_1(t), s_2(t))$. Тогда с учетом (19) имеем

$$\big|s_1(t) - s_2(t)\big| \leq \int\limits_0^{y(t)} \big|u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)\big|d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \big|f_1(u_1,v_1) - f_1(u_2,v_2)\big|d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{y(\eta)}^{h(\eta)} \big|f_1(u_i,v_i)\big|d\xi, \tag{20}$$

где $u_i,\ v_i, i = 1,2,$ — решения между $y(t)$ и $h(t)$.

Далее, необходимо оценить разности $V(t,x) = v_1(t,x) - v_2(t,x), U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$.

Из задачи (B) для функции $V(t,x)$ находим

$$\begin{gathered} V_t = r_1(u_1,v_1)V_{xx} + b_1(\cdot)V_x + c_1(\cdot)V + k_1(t,x)U(t,x) \text{ в } Q, \\ V(0,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq l, \\ V(t,0) = m_1 V(t_1,x_1), \qquad V(t,l) = m_2 V(t,x_2), \quad 0 \leq t \leq . \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь коэффициенты $r_1,\ b_1,\ c_1,\ k_1$ — ограниченные функции.

Из задачи (21) по принципу максимума находим [1]

$$|V(t,x)| \leq M_4 \cdot \max_D |U(t,x)|t,$$

где M_4 зависит от $k_1(t,x)$.

В силу установленных оценок для $s_i(t), u_i(t,x), v_i(t,x)$ имеем

$$0 < u_i(t,x) \leq N(y(t) - x), \quad i = 1,2,$$
$$\big|u_1(t,y(t)) - u_2(t,y(t))\big| \leq N\big|s_1(t) - s_2(t)\big|,$$

где $N = \max_D |u_x(t,x)|$.

Для функции $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ из задачи (A) находим

$$U_t = r_2(u,v)U_{xx} + b_2(u,v)U_x + c_2(u,v)U + k_2(t,x)V(t,x),$$
$$U(0,x) = 0, \qquad 0 \le x \le s_0,$$
$$U_x(t,0) = 0, \qquad 0 \le t \le T,$$
$$U(t,y(t)) \le N \max_{0\le\eta\le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|.$$

Здесь коэффициенты уравнения — непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда согласно принципу максимума имеем

$$|U(t,x)| \le N \max_{0\le\eta\le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + M_5 \max_{\Omega} |V(t,x)|t, \tag{22}$$

где M_5 зависит от M_4 и коэффициента $k_2(t,x)$.

Теперь оценим составляющие формулы (20):

$$I_1 \le \int_0^{y(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)|d\xi,$$

$$I_2 \le \int_{y(t)}^{h(t)} |u_i(t,\xi)|d\xi \le M_1 \cdot \max_t |s_1(t) - s_2(t)|^2,$$

$$I_3 \le \int_0^t d\eta \int_0^{y(\eta)} |f_1(u_1,v_1) - f(u_2,v_1)| + |f(u_2,v_1) - f(u_2,v_2)|d\xi \le$$

$$\le \int_0^t d\eta \int_0^{y(\eta)} \left\{f'_{1u}(\cdot)|u_1 - u_2| + f'_{1v}|v_1 - v_2|\right\}d\xi \le \int_0^t d\eta \int_0^{y(\eta)} M_6\big[\max|U(\eta,\xi)|d\xi\big],$$

$$I_4 \le M_7 \max_t \big|s_1(t) - s_2(t)\big| \cdot t,$$

где M_6 зависит от $M_4, M_5, f'_{1u}(\cdot),\ M_7 = \max_\Omega \big|f_1(u,v)\big|$.

Пусть $A(t_0) = \max_{0\le t\le t_0} |s_1(t) - s_2(t)| > 0$. Тогда $A(t_0) \le M_3 t_0, t_0 < 1$. При этом находим

$$I_1 \le \int_0^{y(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)|d\xi, \qquad I_2 \le M_1 A^2(t_0),$$

$$I_3 \le M_6 \int_0^t d\eta \int_0^{y(\eta)} \max_D |U|d\xi, \qquad I_4 \le M_7 A(t_0)t.$$

Имеем

$$A(t_0) \le \int_0^{y(t)} |U(t,\xi)|d\xi + M_6 \int_0^t d\eta \int_0^{y(\eta)} \max_D |U|d\xi + M_1 A^2(t_0) + M_7 A(t_0)t_0. \tag{23}$$

Разделив (23) на $A(t_0)$, получим

$$1 \leq \int\limits_0^{y(t)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \frac{\max|U|}{A(t_0)} d\xi + M_5 t_0^2 + M_7 t_0. \tag{24}$$

Теперь для функции $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ из (22) имеем

$$\left|U(t,x)\right| \leq NA(t_0) + M_8 \max\left|U(t,x)\right| t^2, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

или

$$|U(t,x)| \leq M_9 A(t_0),$$

где

$$M_9 = \frac{N}{1 - M_8 t_0}, \qquad t_0 < \frac{1}{M_8}.$$

Оценим интегральный член

$$\int\limits_0^{y(t)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi \leq \int\limits_0^{y(0)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + \int\limits_{y(0)}^{y(t)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi \leq \int\limits_0^{y(0)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + M_9 t_0,$$

где

$$M_9 = \frac{N}{1 - M_8 t_0},\ t_0 < \frac{1}{M_8}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$W_t = r_2(u,v) W_{xx} + b_2(u,v) W_x + c_2(u,v) W + k_3 V(t,x),$$
$$W(0,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq y(0),$$
$$W_x(t,0) = 0,\ W(t,y(0)) = 1, \qquad t \geq 0,$$

где

$$k_3(t,x) = \frac{k_2(t,x)}{M_9 A(t_0)}.$$

Отсюда согласно принципу максимума имеем

$$|W(t,x)| \leq \max_Q |k_3 V(t,x)| t_0 + 1 = M_{10}.$$

Введем функцию

$$Z(t,x) = \frac{U(t,x)}{M_9 A(t_0)} - W(t,x), \qquad 0 < x < y(0), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Тогда получим

$$Z_t = r_2(u,v)Z_{xx} + b_2 Z_x + c_2(u,v)Z,$$
$$Z(0,x) = 0,$$
$$Z_x(t,0) = 0,$$
$$Z(t,y(0)) = \frac{U(t,y(0))}{M_9 A(t_0)} - W(t,y(0)) \le 0.$$

Отсюда по принципу максимума

$$\frac{U(t,x)}{M_9 A(t_0)} \le W(t,x), \qquad 0 \le t \le t_0.$$

Поскольку $\lim_{t\to 0} W(t,x) = 0,\ 0 \le x \le y(0)$, то

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^{y(0)} W(t,x)dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^{y(0)} \frac{|U(t,\xi)|\xi}{M_9 A(t_0)} d\xi \to 0.$$

Если в (24) перейти к пределу при $t_0 \to 0$, то правая часть (24) будет стремиться к нулю и мы придем к противоречию. Следовательно, $s_1(t) \equiv s_2(t)$ и, далее, $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$, $v_1(t,x) = v_2(t,x),\ 0 \le t \le t_0$.

Единственность решения задачи для любого $0 < t < \infty$ устанавливается следующим образом.

Пусть $t_1 = \sup\{t\colon s_1(\eta) = s_2(\eta), 0 \le \eta \le t\}$. Если $t_1 = \infty$, то вопрос будет решен. В противном случае, предполагая, что параметр t_1 ограничен и, повторяя приведенные выше рассуждения в промежутке $t_1 \le t \le t_1 + \Delta t$, снова приходим к противоречию.

Теорема 2 доказана.

5. Существование решения. При определении максимального интервала времени существования решения задач Стефана учитываются три фактора: 1) невырожденность области; 2) наличие априорных оценок норм в соответствующем пространстве; 3) ограниченность снизу и сверху модуля градиента решения на свободной границе.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и леммы* 2. *Тогда существует в* $D \cup Q$ *решение* $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $v(t,x) \in C^{2+\beta}(\bar{Q})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}$, $0 \le t \le T^*$, *задачи* (1)–(9), *причем значение* T^* *определяется из условия* $\lim_{t\to T^*} s(t) = l$.

Доказательство. Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно использовать различные теоремы из теории нелинейных уравнений, помня, что для нее имеет место теорема единственности классического решения. Мы применим принцип Лерэ–Шаудера [1], установленные априорные оценки $|\cdot|_{1+\alpha}{}^{Q}$ для всех возможных решений нелинейных задач и теоремы разрешимости в классах Гельдера для линейных задач. При этом теоремы существования для систем так же, как теорема для случая одного уравнения, так как каждое из уравнений можно рассматривать как линейное уравнение относительно $u(t,x)$ и $v(t,x)$ с непрерывными по Гельдеру коэффициентами.

Радача (1)–(10) рассматривается одновременно с однопараметрическим семейством задач того же типа. Линейная задача определяет преобразование $w = F(\omega, k), 0 \le k \le 1$, к которому и применяется принцип Лерэ–Шаудера. Этот оператор нелинеен и зависит от k. Его неподвижные точки при $k = 1$ являются решениями задачи.

Обозначим через $H^{1+\alpha}, \alpha \in (0,1)$, банахово пространство функций $u(t,x), v(t,x)$ на $\bar{Q}$ с нормой $\| \cdot \| = | \cdot |_{1+\alpha}^{Q}$, которые удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиям задач (A) и (B).

Для каждой функции $\bar{u}, \bar{v} \in H^{1+\alpha}$ и любого числа $k \in [0,1]$ обозначим через u^k, v^k решения линейных задач (A) и (B), которые существуют и единственны, причем $u^k, v^k \in C^{2+\alpha}$, $s(t) \in \in C^{1+\alpha}$. При этом в области D, как и в лемме 1, осуществляется переход к параболическому уравнению с непрерывными по Гельдеру коэффициентами в фиксированной области.

Равномерная непрерывность и вполне непрерывность оператора преобразования F относительно k, равномерные по k оценки для решений и разрешимость линейных задач следуют из установленных априорных оценов норм Гельдера. Техника доказательства подробно продемонстрирована, например, в работах [1] (гл.VII) и [15] (гл.VI).

Теорема 3 доказана.

Литература

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
2. *Данилюк И. И.* О задаче Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – **40**, вып. 5(245). – С. 133–185.
3. *Рубинштейн Л. И.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Рига: Звайзгне, 1967. – 468 с.
4. *Bazaliy B. V., Friedman A.* A free boundary problem for an elliptic-parabolic system: Application to a model of tumor growth // Communs Part. Different. Equat. – 2003. – **28**. – P. 517–560.
5. *Мейрманов А.* Задача Стефана. – Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.
6. *Chen X., Friedman A.* A free boundary problem arising in a model of wound healing // SIAM J. Math. Anal. – 2000. – **32**. – P. 788–800.
7. *Kim K., Gui L., Zhi L.* Global existence and blow up of solutions to a free boundary problem for mutualistic model // J. Sci. China. Math. – 2010. – **53**, № 8. – P. 2085–2095.
8. *Іванчов М. І., Снітко Г. А.* Виначення залежних від часу коефіцієнтів параболічного рівняння в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. – 2007. – **20**. – С. 28–44.
9. *Баранська І. Є., Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**. – С. 457–484.
10. *Cantrell R. S., Cosner C.* Spatial ecology via reaction-diffusion equations. – England: Wiley, 2003. – 428 p.
11. *Dale P. D., Maini Ph. K., Sheratt J. A.* Mathematical modeling of corneal epithelial wound healing // Math. Biosci. – 1994. – **124**. – P. 127–147.
12. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 329–346.
13. *Ciliberto C.* Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili // Ric. Mat. – 1954. – **3**. – P. 40–75.
14. *Douglas J. (Jr.)* A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **8**. – P. 402–408.
15. *Ладыженская О. А. и др* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 21.03.17