УДК 517.9..???

В. П. Моторный (Днепр. нац. ун-т им. О. Гончара)

О ТОЧНЫХ КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА

We obtain the exact constants for the Hardy – Littlewood inequalities.

Отримано точні константи у нерівностях Г. Гарді і Дж. Літтлвуда.

Пусть функция f принадлежит $L^p_{[a,b]}p \geq 1$ и $\omega_p(f,h) = \omega_p(f,a,b,h)$ — ее интегральный модуль непрерывности, т. е. величина

$$\sup_{0<u\leq h}\left\{\int\limits_a^{b-u}|f(x+u)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \qquad 0<h\leq b-a.$$

В предположении, что функция $f(x)$ задана на сегменте $[a;2b-a]$ (например, функция $f(x)$ периодическая с периодом $(b-a)$), интегральный модуль непрерывности можно определить иначе:

$$\omega_p^*(f,h) = \sup_{0<u\leq h}\left\{\int\limits_a^{b}|f(x+u)-f(x)|^p dx\right\}^{1/p}, \quad 0<h\leq b-a.$$

Очевидно, что $\omega_p(f,h) \leq \omega_p^*(f,h)$ и существуют функции, для которых $\omega_p(f,h)$ стремится к нулю при $h \to 0$ существенно быстрее, чем $\omega_p^*(f,h)$. Например, пусть $f(x)=1$, если $x\in[0,1]$, и $f(x)=0$, если $x\in(1,2]$. Тогда $\omega_p(f,h)=0$, а $\omega_p^*(f,h)=h^{1/p}$.

Г. Харди и Дж. Литтлвуд [1, 2], см. также [3, с. 381, 382] доказали, что для того, чтобы $\omega_1^*(f,h)=O(h)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была эквивалентна некоторой функции ограниченной вариации. Через $V_a^b f$ будем обозначать вариацию функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$.

В работе для простоты вместо сегмента $[a,b]$ будем рассматривать сегмент $[0;1]$. Цель работы — доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ является функцией ограниченной вариации на сегменте $[0;1]$, то*

$$\omega_1(f,h) \leq hV_0^1 f, \tag{1}$$

а также

$$\omega_1^*(f,h) \leq hV_0^1 f \tag{2}$$

при условии, что функция $f(x)$ является функцией ограниченной вариация на сегменте $[0;2]$, а на полуинтервале $(1;2]$ $f(x)=f(1)$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0;1]$, удовлетворяет условию*

$$\omega_1(f,h) \leq Vh, \tag{3}$$

то существует функция $g(x)$, эквивалентная функции $f(x)$, вариация которой на сегменте $[0;1]$ не превышает V, т. е.

$$V_0^1 g \leq V. \tag{4}$$

***Следствие* 1.** *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0;2]$, удовлетворяет условию*

$$\omega_1^*(f,h) \leq Vh, \tag{5}$$

то существует функция $g(x)$, эквивалентная функции $f(x)$, вариация которой на сегменте $[0;1]$ не превышает V.

Действительно, так как $\omega_1(f,h) \leq \omega_1^*(f,h)$, то из условия (5) следует выполнение условия (3) и в силу теоремы 2 $V_0^1 f \leq V$.

***Следствие* 2.** *Если величину $V_0^1 f$ в неравенстве (1) заменить числом $V = \inf_{g\sim f} V_0^1 g$, то неравенство (1) будет точным.*

Предположим противное, т. е. существуют положительное число $\eta < V$ и функция $g(x)$, эквивалентная функции $f(x)$, такие, что $\omega_1(g,h) \leq (V-\eta)h$. Тогда в силу теоремы 2 существует функция $g_1(x)$, эквивалентная функции $f(x)$, такая, что $V_0^1 g_1 \leq (V-\eta)$, а это противоречит определению числа V. Полученное противоречие опровергает предположение.

***Следствие* 3.** *Если величину V в неравенстве (3) заменить числом $V_0 = \sup_{h\in(0;1)} \dfrac{\omega_1(f,h)}{h}$, то неравенство (4) будет точным.*

Предположим, что существуют положительное число $\eta < V_0$ и функция $g(x)$, эквивалентная функции $f(x)$, такие, что $V_0^1 g \leq (V_0-\eta)$. Тогда в силу теоремы 1 $\omega_1(f,h) = \omega_1(g,h) \leq \leq h(V_0-\eta)$. Полученное неравенство противоречит определению числа V.

Для доказательства теорем 1, 2 необходимы следующие вспомогательные функции. Пусть $f(x)-$ интегрируемая на сегменте $[0,2]$ функция. На сегменте $[0,2-h]$, $h\in(0,1)$, рассмотрим функцию Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)du.$$

Пусть, далее, $x_k = k/n,\ k = 0,1,\ldots,2n,\ L_{n,k}(f) = n\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$. Определим кусочно-постоянную функцию $L_n(f,x) = L_{n,k}(f)$, если $x\in[x_{k-1},x_k)$, $k = 1,2,\ldots,2n-1$, и $L_n(f,x) = = L_{n,2n}(f)$, если $x\in[x_{2n-1},x_{2n}]$.

Рассмотрим несколько простых вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0;2]$, является функцией ограниченной вариации на сегменте $[0,1]$, а на полуинтервале $(1,2]$ $f(x) = f(1)$, то $V_0^1 f_h \leq V_0^1 f$.*

Доказательство. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ — набор точек сегмента $[0,1]$, удовлетворяющих условию $x_0 = 0 < x_1, \ldots, < x_n = 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f_h(x_{k+1}) - f_h(x_k)| = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_0^h [f(x_{k+1}+u) - f(x_k+u)]du \right| \le$$

$$\le \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} \right) \int_0^h |f(x_{k+1}+u) - f(x_k+u)|du,$$

где k_0 выбрано так, что $x_{k_0} + u < 1$, $x_{k_0+1} + u \ge 1$. Следовательно, $f(x_j + u) = f(1)$, если $j \ge k_0 + 1$, и, поэтому, вторая сумма равна нулю, а первая

$$\sum_{k=0}^{k_0} |f(x_{k+1}+u) - f(x_k+u)| \le V_0^1 f.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации на сегменте $[0,1]$ выполняется неравенство*

$$\int_0^1 |f(x) - L_n(f,x)|dx \le \frac{1}{n} V_0^1 f.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 |f(x) - L_n(f,x)|dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - L_{n,k}(f)|dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} V_{x_{k-1}}^{x_k} f \le \frac{1}{n} V_0^1 f.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0;2]$, является функцией ограниченной вариации, непрерывной в точке 1, и на полуинтервале $(1,2]$ $f(x) = f(1)$, то для любого натурального n справедливы равенства*

$$L_{n,k}(f) = \lim_{h \to 0} L_{n,k}(f_h), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Очевидно можно считать, что $0 < h < \dfrac{1}{n}$. В случае $k = 1, 2, \ldots, n-1$ получаем

$$|L_{n,k}(f) - L_{n,k}(f_h)| = \frac{n}{h} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_0^h [f(x) - f(x+u)]dudx \right| \le$$

$$\leq \frac{n}{h} \int_0^h \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x+u)| dx du \leq n\omega(f,h).$$

В случае $k = n$

$$|L_{n,n}(f) - L_{n,n}(f_h)| \leq \frac{n}{h} \int_0^h \int_{x_{n-1}}^{1} |f(x) - f(x+u)| dx du =$$

$$= \frac{n}{h} \int_0^h \left(\int_{x_{n-1}}^{1-u} |f(x) - f(x+u)| dx + \int_{1-u}^{1} |f(x) - f(x+u)| dx \right) du \leq$$

$$\leq n\omega(f,h) + n \sup_{x \in [1-h,1]} |f(x) - f(1)|.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке 1, то правая часть стремится к нулю при $h \to 0$.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации на сегменте $[0,1]$ выполняется неравенство*

$$V_0^1(L_n(f_h)) \leq V_0^1 f_h.$$

Доказательство. Имеем

$$V_0^1(L_n(f_h)) = \sum_{k=1}^{n-1} |L_{n,k+1}(f_h) - L_{n,k}(f_h)| =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_h(x) dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_h(x) x dx \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} |f_h(\xi_{k+1}) - f_h(\xi_k)| \leq V_0^1 f_h,$$

где в силу теоремы о среднем $f_h(\xi_k) = n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_h(x) dx$.

Лемма 4 доказана.

Из лемм 1, 3, 4 следует неравенство

$$V_0^1(L_n(f)) \leq V_0^1 f. \tag{6}$$

Действтельно, в силу лемм 1 и 4

$$\sum_{k=1}^{n-1} |L_{n,k+1}(f_h) - L_{n,k}(f_h)| \leq V_0^1 f_h \leq V_0^1 f.$$

Переходя в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n-1} |L_{n,k+1}(f_h) - L_{n,k}(f_h)| \le V_0^1 f$$

к пределу при $h \to 0$, что возможно в силу леммы 3, получаем (6).

Лемма 5. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0;2]$, является функцией ограниченной вариации и на полуинтервале $(1,2]$ $f(x) = f(1)$, то выполняются неравенства*

$$\int_0^{1-t} |L_n(f, x+t) - L_n(f,x)| dx \le t V_0^1 f, \tag{7}$$

$$\int_0^{1+\nu t} |L_n(f, x+t) - L_n(f,x)| dx \le t V_0^1 f + t \sup_{x \in (1-1/n,1]} |f(1) - f(x)|, \tag{8}$$

где $0 < t < 1/n$, $0 \le \nu < n$.

Доказательство. Установим сначала неравенство (7). Поскольку при $k = 1, 2, \ldots, n-1$

$$L_n(f, x+t) - L_n(f,x) = \begin{cases} 0, & x \in (x_{k-1}, x_k - t), \\ L_{n,k+1} - L_{n,k}, & x \in (x_k - t, x_k), \end{cases} \tag{9}$$

и $L_n(f, x+t) - L_n(f,x) = 0$, если $x \in (x_{n-1}, x_n - t)$, то из (6) и следует

$$\int_0^{1-t} |L_n(f, x+t) - L_n(f,x)| dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |L_n(f, x+t) - L_n(f,x)| dx +$$

$$+ \int_{1-1/n}^{1-t} |L_n(f, x+t) - L_n(f,x)| dx = t \sum_{k=1}^{n-1} |L_{n,k+1}(f) - L_{n,k}(f)| \le t V_0^1 f.$$

Чтобы доказать (8), представим интеграл в виде суммы трех интегралов — по отрезкам $[0, 1-t]$, $[1-t, 1]$, $[1, 1+\nu t]$. Первый, как и в предыдущем случае, не превышает $tV_0^1 f$, второй равен $t|f(1) - L_{n,n}|$ и очевидно, что $t|f(1) - L_{n,n}| \le t \sup_{x \in (1-1/n,1]} |f(1) - f(x)|$, а третий равен нулю, так как на отрезке $[1,2]$ функция $L_n(f,x)$ постоянна.

Лемма 5 доказана.

***Следствие* 4.** *Пусть* $0 < h < 1$, $t = h/n$, $n \in N$. *Поскольку* $[\nu h/n, 1 - h + \nu h/n] \subset \subset [0, 1 - h/n]$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$, *то из* (7) *следует*

$$\int_{\nu h/n}^{1-h+\nu h/n} |L_n(f, x+h/n) - L_n(f,x)| dx \le$$

$$\le \int_0^{1-h/n} |L_n(f, x+h/n) - L_n(f,x)| dx \le h V_0^1 f / n. \tag{10}$$

***Следствие* 5.** *Пусть выполняются условия следствия* 1. *Тогда из* (8) *для* $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ *следует*

$$\int\limits_{\nu h/n}^{1+\nu h/n} |L_n(f, x + h/n) - L_n(f, x)|dx \leq$$

$$\leq hV_0^1 f/n + h \sup_{x\in(1-1/n,1]} |f(1) - f(x)|/n. \tag{11}$$

Лемма 6. *Для любой функции* $f(x)$ *ограниченной вариации на сегменте* $[0, 1]$ *и* $h \in (0, 1)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^{1-h} |L_n(f, x + h) - L_n(f, x)|dx \leq hV_0^1 f. \tag{12}$$

Доказательство. Представим разность $L_n(f, x + h) - L_n(f, x)$
в виде

$$L_n(f, x + h) - L_n(f, x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} [L_n(f, x + (\nu + 1)h/n) - L_n(f, x + \nu h/n)]. \tag{13}$$

Тогда

$$\int\limits_0^{1-h} |L_n(f, x + h) - L_n(f, x)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_0^{1-h} |L_n(f, x + (\nu + 1)h/n) - L_n(f, x + \nu h/n)|dx.$$

Выполняя замену переменной $y = x + \nu h/n$ и используя (10), получаем

$$\int\limits_0^{1-h} |L_n(f, x + h) - L_n(f, x)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{\nu h/n}^{1-h+\nu h/n} |L_n(f, x + h/n) - L_n(f, x)|dx \leq hV_0^1 f.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если функция* $f(x)$, *заданная на сегменте* $[0; 2]$, *является функцией ограниченной вариации и на полуинтервале* $(1, 2]$ $f(x) = f(1)$, *то выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^1 |L_n(f, x + h) - L_n(f, x)|dx \leq hV_0^1 f + h \sup_{x\in(1-1/n,1]} |f(1) - f(x)|, \tag{14}$$

где $h \in (0, 1)$.

Доказательство. Чтобы доказать (14), снова воспользуемся равенством (13). Тогда

$$\int\limits_0^1 |L_n(f,x+h)-L_n(f,x)|dx \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_0^1 |L_n(f,x+(\nu+1)h/n)-L_n(f,x+\nu h/n)|dx.$$

Выполняя замену переменной $y=x+\nu h/n$ и используя (11), получаем

$$\int\limits_0^1 |L_n(f,x+h)-L_n(f,x)|dx \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_{\nu h/n}^{1+\nu h/n} |L_n(f,x+h/n)-L_n(f,x)|dx \le$$

$$\le hV_0^1 f + \sup_{x\in(1-1/n,1]}|f(1)-f(x)|.$$

Лемма 7 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Из леммы 2 и неравенства (12) следует

$$\int\limits_0^{1-h} |f(x+h)-f(x)|dx \le \int\limits_0^{1-h} |L_n(f,x+h)-L_n(f,x)|dx+$$

$$+\int\limits_0^{1-h} |f(x+h)-L_n(f,x+h)|dx + \int\limits_0^{1-h} |f(x)-L_n(f,x)|dx \le$$

$$\le hV_0^1 f + 2V_0^1 f/n.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{1-h} |f(x+h)-f(x)|dx \le hV_0^1 f + 2V_0^1 f/n.$$

Устремляя n к бесконечности, получаем утверждение теоремы 1 для модуля непрерывности $\omega_1(f,t)$. Аналогично из леммы 2 и неравенства (14) получаем

$$\int\limits_0^{1} |f(x+h)-f(x)|dx \le hV_0^1 f + 2V_0^1 f/n + h\sup_{x\in(1-1/n,1]}|f(1)-f(x)|.$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке 1. Тогда $\sup_{x\in(1-1/n,1]}|f(1)-f(x)|\to 0$ при n стремящемся к бесконечности. Таким образом, получаем утверждение теоремы 1 для модуля непрерывности $\omega_1^*(f,t)$ в случае непрерывности функции $f(x)$ в точке 1. Пусть теперь $f(1) \neq f(1-0)$, ($f(1-0)$ — предел функции $f(x)$ в точке 1 слева), $\delta = f(1) - f(1-0)$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x \in [1;2]. \end{cases}$$

Функцию $f(x)$ представим в виде $f(x) = f_0(x) + \delta\theta(x)$. Очевидно, что функция $f_0(x)$ непрерывна в точке 1 и $V_0^1 f = V_0^1 f_0 + |\delta|$. Следовательно,

$$\omega_1^*(f,h) \le \omega_1^*(f_0,h) + \omega_1^*(\delta\theta,h) \le hV_0^1 f_0 + h|\delta| = hV_0^1 f.$$

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Пусть для функции $f(x)$, заданной на сегменте $[0,1]$, выполняется условие теоремы 2, то-есть имеет место неравенство

$$\int\limits_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|dx \le hV, \qquad 0 < h < 1. \tag{15}$$

Это условие не нарушиться, если будем считать, что функция непрерывна слева в точке 1. Продолжим функцию $f(x)$ на полуинтервал $(1;2]$, полагая $f(x) = f(1)$.

Лемма 8. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы* 2, *то имеет место неравенство*

$$V_0^1 f_h \le V + \sup_{x \in (1-h,1]} |f(1) - f(x)|. \tag{16}$$

Доказательство. Представляя функцию Стеклова в виде $f_h(x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$, получим $f_h'(x) = \dfrac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$ и, следовательно,

$$V_0^1 f_h = \int\limits_0^1 |f_h'(x)|dx = \frac{1}{h}\int\limits_0^1 |f(x+h) - f(x)|dx =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int\limits_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|dx + \int\limits_{1-h}^1 |f(x+h) - f(x)|dx\right) \le$$

$$\le V + \sup_{x \in (1-h,1]} |f(1) - f(x)|.$$

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если функция $f(x)$, заданная на сегменте $[0,1]$, непрерывна в точке x_0, то $f_h(x_0) \to f(x_0)$ при $h \to 0$.*

Доказательство. Для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x_0+t) - f(x_0)| < \epsilon$, как только $0 < t < \delta$. Тогда для $0 < h < \delta$

$$|f_h(x_0) - f(x_0)| \le \frac{1}{h} \int\limits_0^h |f(x_0 + t) - f(x_0)| dt \le \epsilon.$$

Лемма 9 доказана.

Из определения функций Стеклова следует равномерная ограниченность функций семейства $\{f_h(x)\}$, а из леммы 8 — равномерная ограниченность полных изменений функций семейства $\{f_h(x)\}$. Следовательно, выполняются условия теоремы Хелли [4, с. 209], в силу которой существует последовательность $f_{h_n}(x)$, сходящаяся к функции ограниченной вариации $g(x)$, а так как, в силу леммы 9 последовательность $f_{h_n}(x)$ сходится в каждой точке непрерывности к функции $f(x)$, то $f(x)$ эквивалентна $g(x)$. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^m$ — набор точек сегмента $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$. Тогда согласно лемме 8

$$\sum_{k=0}^{m-1} |f_{h_n}(x_{k+1}) - f_{h_n}(x_k)| \le V_0^1 f_{h_n} \le V + \sup_{x \in (1-h_n, 1]} |f(1) - f(x)|. \tag{17}$$

Из непрерывности функции $f(x)$ в точке 1

$$\sup_{x \in (1-h_n, 1]} |f(1) - f(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Устремляя в неравенстве (17) n к бесконечности, получаем неравенство

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \le V.$$

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals // Math. Z. – 1928. – **27**. – S. 565 – 606.
2. *Hardy G. H. and Littlewood J. E.* A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. – 1928. – **28**. – S. 612 – 634.
3. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.,

Получено 25.06.17