УДК 517.956

Ш. Ш. Юсубов (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан)

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

We study the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a high-order hyperbolic equation with predominant mixed derivative. The posed problem is reduced to the integral equation and the existence of its solution is proved by the help of *a priori* estimates.

Для гіперболічного рівняння високого порядку з домінуючою мішаною похідною досліджується розв'язність нелокальної задачі з інтегральними умовами. Сформульовану задачу зведено до інтегрального рівняння і з допомогою апріорних оцінок доведено існування єдиного розв'язку.

1. Постановка задачи. В области $G=\Big\{(t,x)\colon t_0<t<t_1,\ x_0<x<x_1\Big\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение высокого порядка общего вида с доминирующей смешанной производной

$$(l_{nm}u)(t,x)\equiv D_t^nD_x^mu+\sum_{\substack{i+j<n+m\\ i=\overline{0,n};\ j=\overline{0,m}}}a_{ij}(t,x)D_t^iD_x^ju=\varphi_{nm}(t,x), \tag{1}$$

с условиями

$$\begin{gathered}(l_{00}u)(x)\equiv\int\limits_{t_0}^{t_1}u(t,x)dt=\varphi_{00}(x),\quad x\in(x_0,x_1),\\ (l_{i0}u)(x)\equiv D_t^{i-1}u(t_1,x)-D_t^{i-1}u(t_0,x)=\varphi_{i0}(x),\qquad x\in(x_0,x_1),\quad i=\overline{1,n-1},\end{gathered}\tag{2}$$

и

$$\begin{gathered}(l_{n0}u)(t)\equiv\int\limits_{x_0}^{x_1}D_t^nu(t,x)dx=\varphi_{n0}(t),\quad t\in(t_0,t_1),\\ (l_{nj}u)(t)\equiv D_t^nD_x^{j-1}u(t,x_1)-D_t^nD_x^{j-1}u(t,x_0)=\varphi_{nj}(t),\qquad t\in(t_0,t_1),\quad j=\overline{1,m-1}.\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $u(t,x)$ — искомая функция; $D_s^k=\partial^k/\partial x_s^k$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева; n,m — натуральные числа; $a_{ij}(t,x),\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m},\ i+j<n+m,$ — заданные измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям $a_{ij}(t,x)\in L_p(G)$, $i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m-1},\ 1\le p\le\infty$, и существуют функции $a_{nj}^0(x)\in L_p(x_0,x_1)$ и $a_{im}^0(t)\in L_p(t_0,t_1)$ такие, что выполняются условия

$$\big|a_{nj}(t,x)\big|\le a_{nj}^0(x),\quad j=\overline{0,m-1},\qquad \text{и}\qquad \big|a_{im}(t,x)\big|\le a_{im}^0(t),\quad i=\overline{0,n-1},$$

почти всюду на G; $\varphi_{i0}(x)\in W_p^{(m)}(x_0,x_1),\ \varphi_{ni}(t)\in L_p(t_0,t_1)$ — заданные функции, где $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ — пространство функций $\varphi(x)$, имеющих обобщенные производные $D^i\varphi(x)\in L_p(x_0,x_1),\ i=\overline{0,m}$. Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(n,m)}(G)=\Big\{u\in L_p(G)/D_t^iD_x^ju\in L_p(G),\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m}\Big\}$$

с доминирующей смешанной производной $D_t^i D_x^j u$. Норму в $W_p^{(n,m)}(G)$ определим равенством

$$\|u\|_{W_p^{(n,m)}(G)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left\|D_t^i D_x^j u\right\|_{L_p(G)}.$$

Отметим, что в последнее время возрос интерес к уравнениям вида (1), так как уравнение (1) и его частные случаи встречаются при исследовании процессов сорбции, сушки [1], поглощения почвенной влаги растениями [2], продольных волн в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции [3], при изучении распространения волн в диспергирующих средах [4], в теории оптимальных процессов [5, 6], в теории обратных задач [7] и т. д.

Уравнение (1) относится к числу нестрого гиперболических уравнений, для которых прямые $t = \mathrm{const}$ и $x = \mathrm{const}$ являются, соответственно, n- и m-кратными действительными характеристиками. Это уравнение в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение высокого порядка [8].

Нелокальные задачи для уравнений с частными производными весьма активно изучаются в настоящее время. Основная особенность таких задач заключается в том, что значения решения уравнения или его производных задаются не только на границах рассматриваемой области, но и в промежуточных точках, либо среднее значение задается в виде интеграла.

Из многочисленных работ, посвященных нелокальным краевым задачам, отметим некоторые из связанных с уравнением (1). В работе [9] рассматриваются различные задачи типа Гурса для уравнения (1) с достаточно гладкими коэффициентами при предположении выполнения условий согласования. В работах [10 – 22] исследованы различные локальные и нелокальные задачи для частных случаев уравнения (1) при условиях достаточной гладкости данных.

В настоящей работе, развивая методику, предложенную в [20], мы исследуем разрешимость задач (1) – (3) при достаточно общих условиях на данные, без предположения выполнения условий согласования. С помощью априорных оценок доказываем существование единственного решения.

2. Сведение задачи (1) – (3) к интегральному уравнению. Задачу (1) – (3) запишем в операторном виде

$$lu = \varphi, \tag{4}$$

где

$$l = \left(l_{nm}, l_{i0}, i = \overline{0, n-1},\ l_{nj},\ j = \overline{0, m-1}\right) : W_p^{(n,m)}(G) \to H_p^{(n,m)},$$

$$\varphi = \left(\varphi_{nm}(t,x), \varphi_{i0}(x), i = \overline{0, n-1}, \varphi_{nj}(t), j = \overline{0, m-1}\right) \in H_p^{(n,m)},$$

$$H_p^{(n,m)} = L_p(G) \times \prod_{i=0}^{n-1} W_p^{(m)}(x_0, x_1) \times \prod_{j=0}^{m-1} L_p(t_0, t_1).$$

Норму в пространстве $H_p^{(n,m)}$ определим естественным образом с помощью равенства

$$\|\varphi\|_{H_p^{(n,m)}} = \|\varphi_{nm}\|_{L_p(G)} + \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi_{i0}\|_{W_p^{(m)}(x_0,x_1)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_{nj}\|_{L_p(t_0,t_1)}.$$

Ясно, что при введенных условиях на коэффициенты задачи (1)–(3) оператор $l\colon W_p^{(n,m)}(G) \to H_p^{(n,m)}$ линеен и ограничен.

Исследование задачи (1)–(3) проводится на основе специального интегрального представления функции $u \in W_p^{(n,m)}(G)$ (см. [23]):

$$u(t,x) \equiv (Qb)(t,x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} b_{i0}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} b_{nj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} b_{nm}(\tau,s) d\tau ds, \tag{5}$$

где $b = \big(b_{nm}(t,x), b_{i0}(x),\ i = \overline{0,n-1},\ b_{nj}(t),\ j = \overline{0,m-1}\big) \in H_p^{(n,m)}$.

Из представления (5) следует, что любая функция $u \in W_p^{(n,m)}(G)$ имеет следы $D_t^i u(t_0,x)$, $i = \overline{0,n-1}$, $D_t^n D_x^j u(t,x)$, $j = \overline{0,m-1}$, и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(n,m)}(G)$ в $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ и $L_p(t_0,t_1)$ соответственно. Для этих следов справедливы также равенства

$$D_t^i u(t_0,x) = b_{i0}(x), \quad i = \overline{0,n-1}, \qquad D_t^n D_x^j u(t,x_0) = b_{nj}(t), \quad j = \overline{0,m-1}.$$

Непосредственно из представления (5) следует, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для любого $b \in H_p^{(n,m)}$ справедлива оценка

$$c_1 \|b\|_{H_p^{(n,m)}} \le \|Qb\|_{W_p^{(n,m)}(G)} \le c_2 \|b\|_{H_p^{(n,m)}}.$$

Из этих неравенств следует, что оператор Q осуществляет изоморфизм между пространствами $H_p^{(n,m)}$ и $W_p^{(n,m)}(G)$. Поэтому пространства $W_p^{(n,m)}(G)$ и $H_p^{(n,m)}$ можно отождествить в смысле изоморфизма.

Выберем элемент

$$b = \Big(b_{nm}(t,x), b_{i0}(x),\ i = \overline{0,n-1},\ b_{nj}(t),\ j = \overline{0,m-1}\Big) \in H_p^{(n,m)}$$

таким образом, чтобы соответствующая функция $u(t,x)$, определяемая представлением (5), удовлетворяла условиям (2), (3). Для этого подставим выражение (5) в условия (2), (3). Тогда из (2) и (3) получим соотношения

$$(l_{i0}u)(x) \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=i}^{n-1} \frac{(t-t_0)^{k-i}}{(k-i)!} b_{k0}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} b_{nj}(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} b_{nm}(\tau,s) d\tau ds \right] dt = \varphi_{i0}(x), \tag{6}$$

$$x \in (x_0,x_1), \quad i = \overline{0,n-1},$$

$$(l_{nj}u)(t) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{k=j}^{m-1} \frac{(x-x_0)^{k-j}}{(k-j)!} b_{nk}(t) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(t,s)ds \right] dx =$$

$$= \varphi_{nj}(t), \qquad t \in (t_0, t_1), \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{7}$$

Введя обозначения

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{(x_1-x_0)^2}{2} & x_1 - x_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{(x_1-x_0)^m}{m!} & \dfrac{(x_1-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} & \ldots & x_1 - x_0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{nj}(t) \equiv \varphi_{nj}(t) - \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1 - x)^{m-j}}{(m-j)!} b_{nm}(t,x)dx, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{8}$$

систему (7) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_{n0}(t),\ b_{n1}(t), \ldots$ $\ldots, b_{n\,m-1}(t)$ можем записать в виде векторного уравнения

$$\big(b_{n0}(t), b_{n1}(t), \ldots, b_{n\,m-1}(t)\big)\gamma = \big(\Phi_{n0}(t), \Phi_{n1}(t), \ldots, \Phi_{n\,m-1}(t)\big). \tag{9}$$

Ясно, что треугольная матрица γ обратима. Обратная матрица имеет вид

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \ldots & d_{0\,m-1} \\ d_{10} & d_{11} & \ldots & d_{1\,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m-1\;0} & d_{m-1\;1} & \ldots & d_{m-1\;m-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда из (9) получим

$$b_{nj}(t) = \Phi_{n0}(t)d_{0j} + \Phi_{n1}(t)d_{1j} + \ldots + \Phi_{n\,m-1}(t)d_{m-1\;j} = \sum_{k=0}^{m-1} \Phi_{nk}(t)d_{kj}, \quad j = \overline{0, n-1}. \tag{10}$$

Учитывая (10) в (6) и вводя обозначения

$$P \equiv \begin{pmatrix} t_1 - t_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{(t_1-t_0)^2}{2} & t_1 - t_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{(t_1-t_0)^n}{n!} & \dfrac{(t_1-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} & \ldots & t_1 - t_0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{k0}(x) \equiv \varphi_{k0}(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1-t)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\sum_{l=0}^{m-1} \varphi_{nl}(t)d_{lj} \right) dt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\frac{(t_1-t)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(t,s)dtds+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{(t_1-t)^{n-k}}{(n-k)!}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(x_1-x)^{m-l}}{(m-l)!}d_{lj}\right)b_{nm}(t,x)dtdx,\quad k=\overline{0,n-1},\quad (11)$$

систему (6) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_{00}(x),\ b_{10}(x),\ldots$ $\ldots,b_{n-1\,0}(x)$ записываем в виде векторного уравнения

$$\big(b_{00}(x),b_{10}(x),\ldots,b_{n-1\,0}(x)\big)P=\big(\psi_{00}(x),\psi_{10}(x),\ldots,\psi_{n-1\,0}(x)\big).\quad (12)$$

Поскольку матрица P обратима, то, обозначив

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \ldots & q_{0\,n-1}\\ q_{10} & q_{11} & \ldots & q_{1\,n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ q_{n-1\;0} & q_{n-1\;1} & \ldots & q_{n-1\;n-1}\end{pmatrix},$$

из (11) получим

$$b_{i0}(x)=\psi_{00}(x)q_{0i}+\psi_{10}(x)q_{1i}+\ldots+\psi_{n-1\,0}(x)q_{n-1\,i}=\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{k0}(x)q_{ki},\quad i=\overline{0,n-1}.\quad (13)$$

Учитывая (8), (10), (11) и (13) в (5), представление $u(t,x)$ можем записать в виде

$$u(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\varphi_{k0}(x)q_{ki}-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int_{t_0}^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\varphi_{nl}(\tau)d_{lj}q_{ki}d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nk}(\tau)d_{kj}d\tau-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}q_{ki}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\frac{(x-x_0)^j}{j!}q_{ki}d_{lj}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x_1-s)^{m-l}}{(m-l)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}d_{kj}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds. \tag{14}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Любая функция* $u\in W_p^{(n,m)}(G)$, *удовлетворяющая условиям* (2), (3), *представима в виде* (14).

Поскольку решение задачи (1) – (3) ищем в классе $W_p^{(n,m)}(G)$, а в силу доказанной теоремы любая функция из этого класса представима в виде (14), то решение будем искать в виде (14). Точнее, в (14) выберем $b_{nm}(t,x)$ так, чтобы соответствующая функция $u(t,x)$ была решением уравнения (1). Для этого функцию $u(t,x)$ запишем в виде

$$u(t,x)=q(t,x)+\bar{u}(t,x), \tag{15}$$

где

$$q(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\varphi_{k0}(x)q_{ki}-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\varphi_{nl}(\tau)d_{lj}q_{ki}d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nk}(\tau)d_{kj}d\tau, \tag{16}$$

$$\bar{u}(t,x)=-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}q_{ki}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\frac{(x-x_0)^j}{j!}q_{ki}d_{lj}\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x_1-s)^{m-l}}{(m-l)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}d_{kj}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds. \tag{17}$$

Тогда для функции (15) уравнение (1) можно записать в виде

$$(l_{nm}\bar{u})(t,x) = \psi(t,x), \tag{18}$$

где

$$\psi(t,x) = \varphi_{nm}(t,x) - (l_{nm}q)(t,x).$$

Учитывая (17), уравнение (18) записываем в виде

$$(l_{nm}\bar{u})(t,x) \equiv (Ab_{nm})(t,x) \equiv b_{nm}(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t_1} K_1(\tau;t,x)b_{nm}(\tau,x)d\tau +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} K_2(s;t,x)b_{nm}(t,s)ds + \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} K(\tau,s;t,x)b_{nm}(\tau,s)d\tau ds = \psi(t,x), \tag{19}$$

где

$$K_1(\tau;t,x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{im}(t,x)\left[-\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}q_{kr} + \theta(t-\tau)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\right],$$

$$K_2(s;t,x) = \sum_{j=0}^{m-1} a_{nj}(t,x)\left[-\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!}\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}d_{kr} + \theta(x-s)\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\right],$$

$$K(\tau,s;t,x) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij}(t,s)\left[-\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\theta(x-s)\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}q_{kr} +\right.$$

$$+\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\frac{(x-x_0)^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x_1-s)^{m-l}}{(m-l)!}q_{kr}d_{l\sigma} -$$

$$-\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\theta(t-\tau)\frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!}\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}d_{kr} +$$

$$\left.+\theta(t-\tau)\theta(x-s)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\right].$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор* $l = \big(l_{nm}, l_i,\ i=\overline{0,n-1},\ l_{nj},\ j=\overline{0,m-1}\big)$ *задачи* (1)–(3) *осуществлял гомеоморфизм между пространствами* $W_p^{(n,m)}(G)$ *и* $H_p^{(n,m)}$, *необходимо и достаточно, чтобы интегральное уравнение* (19) *имело единственное решение* $b_{nm} \in L_p(G)$ *для любого* $\psi \in L_p(G)$.

Эта теорема, в частности, показывает, что если оператор A интегрального уравнения (19) имеет ограниченный обратный A^{-1}, определенный на $L_p(G)$, то задача (1)–(3) для любого

$$\varphi = \big(\varphi_{nm}(t,x),\ \varphi_{i0}(x),\ i=\overline{0,n-1},\ \varphi_{nj}(t),\ j=\overline{0,m-1}\big) \in H_p^{(n,m)}$$

имеет единственное решение $u \in W_p^{(n,m)}$ и для некоторой постоянной $M > 0$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{W_p^{(n,m)}(G)} \leq M\|\varphi\|_{H_p^{(n,m)}}.$$

3. Существование и единственность решения задачи (1)–(3). Для доказательства существования единственного решения задачи (1)–(3) сначала исследуем разрешимость уравнения (19). Пусть $b_{nm} \in L_p(G)$ является решением уравнения (19). Запишем это уравнение в виде

$$(Ab_{nm})(t,x) \equiv (I + A_1 + A_2)b_{nm} = \psi, \tag{20}$$

где I — единичный оператор, а

$$(A_1 b_{nm})(t,x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{im}(t,x) \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} b_{nm}(\tau,x)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} a_{nj}(t,x) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(t,s)ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij}(t,x) \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds, \tag{21}$$

$$(A_2 b_{nm})(t,x) \equiv -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{im}(t,x) q_{kr} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!} b_{nm}(\tau,x)d\tau -$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_{nj}(t,x) d_{kr} \frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!} \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!} b_{nm}(t,s)ds -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{ij}(t,x) q_{kr} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x} \frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_{ij}(t,x) q_{kr} d_{l\sigma} \frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!} \frac{(x-x_0)^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(x_1-s)^{m-l}}{(m-l)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_{ij}(t,x) d_{kr} \frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!} \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds. \tag{22}$$

Оператор A_1, действующий в пространстве $L_p(G)$, линеен, ограничен и является двумерным вольтерровым интегральным оператором. Поэтому оператор $(I+A_1)$ имеет ограниченный обратный оператор $B=(I+A_1)^{-1}$, действующий в пространстве $L_p(G)$. Тогда разрешимость уравнения (20) сводится к исследованию разрешимости уравнения

$$b_{nm}+BA_2b_{nm}=B\psi. \tag{23}$$

Оценим норму $\|A_2\|$ оператора $A_2\colon L_p(G)\to L_p(G)$. Очевидно, что

$$|(A_2b_{nm})(t,x)|\le\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|a_{im}(t,x)|\,|q_{kr}|\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\,|b_{nm}(\tau,x)|\,d\tau+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}|a_{nj}(t,x)|\,|d_{kr}|\frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}\,|b_{nm}(t,s)|\,ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}|a_{ij}(t,x)|\,|q_{kr}|\,\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\,|b_{nm}(\tau,s)|\,d\tau ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}|a_{ij}(t,x)|\,|q_{kr}|\,|d_{l\sigma}|\,\frac{(t-t_0)^{r-i}}{(r-i)!}\,\frac{(x-x_0)^{\sigma-j}}{(\sigma-j)!}\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(t_1-\tau)^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{(x_1-s)^{m-l}}{(m-l)!}\,|b_{nm}(\tau,s)|\,d\tau ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=j}^{m-1}|a_{ij}(t,x)|\,|d_{kr}|\,\frac{(x-x_0)^{r-j}}{(r-j)!}\times$$

$$\times\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,\frac{(x_1-s)^{m-k}}{(m-k)!}\,|b_{nm}(\tau,s)|\,d\tau ds. \tag{24}$$

В силу неравенств Гельдера и Минковского для любого $b_{nm}\in L_p(G)$ из (24) имеем

$$\|A_2b_{nm}\|_{L_p(G)}\le c\,\|b_{nm}\|_{L_p(G)}\,, \tag{25}$$

где

$$c=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t_1-t_0)^{n+r-i-k+\frac{1}{q}}}{(r-i)!(n-k)!\,((n-k)q+1)^{1/q}}\,|q_{kr}|\,\left\|a_{im}^0\right\|_{L_p(t_0,t_1)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x_1-x_0)^{m+r-j-k+\frac{1}{q}}}{(m-k)!\,((m-k)q+1)^{1/q}}\,|d_{kr}|\,\left\|a_{nj}^0\right\|_{L_p(x_0,x_1)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t_1-t_0)^{n+r-k-i+\frac{1}{q}}}{(r-i)!(n-k)!\,((n-k)q+1)^{1/q}}\times$$

$$\times\frac{(x_1-x_0)^{m-j-1+\frac{1}{q}}}{(m-j-1)!\,((m-j-1)q+1)^{1/q}}\,|q_{kr}|\,\|a_{ij}\|_{L_p(G)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\sigma=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(t_1-t_0)^{n+r-i-k+\frac{1}{q}}}{(r-i)!(n-k)!\,((n-k)q+1)^{1/q}}\times$$

$$\times\frac{(x_1-x_0)^{m+\sigma-l-j+\frac{1}{q}}}{(\sigma-j)!(m-l)!\,((m-l)q+1)^{1/q}}\,\|a_{ij}\|_{L_p(G)}\,|q_{kr}|\,|d_{l\sigma}|+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{r=j}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t_1-t_0)^{n-i-1+\frac{1}{q}}}{(n-i-1)!\,((n-i-1)q+1)^{1/q}}\times$$

$$\times\frac{(x_1-x_0)^{m+r-j-k+\frac{1}{q}}}{(r-j)!(m-k)!\,((m-k)q+1)^{1/q}}\,|d_{kr}|\,\|a_{ij}\|_{L_p(G)}\,. \tag{26}$$

Следовательно, $\|A_2\|\leq c$. Тогда для оператора BA_2 имеем

$$\|BA_2b_{nm}\|_{L_p(G)}\leq c\|B\|\,\|b_{nm}\|_{L_p(G)}.$$

Поэтому если

$$c_1=\|B\|c<1,$$

то уравнение (19) для любого $\psi\in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{nm}\in L_p(G)$.

Очевидно, что при $c_1<1$ решение $b_{nm}\in L_p(G)$ уравнения (23) удовлетворяет также условию

$$\|b_{nm}\|_{L_p(G)}\leq\frac{1}{1-c_1}\,\|B\|\,\|\psi\|_{L_p(G)}\,. \tag{27}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если $c_1<1$, то уравнение* (20) *для любой функции $\psi\in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{nm}\in L_p(G)$ и для этого решения справедлива оценка* (27).

На основе теорем 2, 3 получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если $c_1<1$, то задача* (1)–(3) *везде корректно разрешима.*

Условие $c_1<1$ теорем 3 и 4 является существенным. Для подтверждения этого рассмотрим пример. Пусть в задаче (1)–(3) $n=m=2$, $t_0=x_0=0$, $t_1=x_1=1$, коэффициент $a_{20}==4\pi^2$, а все остальные коэффициенты и правые части уравнения и условий равны нулю. Легко показать, что $c_1=\dfrac{\pi(\pi+\sqrt{10})}{\sqrt{15}}>1$ при $p=q=2$, и, следовательно, условие теорем 3 и 4 не выполняется. Непосредственной проверкой можно убедиться, что кроме нулевого решения эта задача имеет семейство решений $u(t,x)=a\sin 2\pi t\cdot\sin 2\pi x$, где a — произвольная постоянная.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
2. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
3. *Березанский Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363 – 372.
4. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. – М.: Факториал пресс, 2002. – 824 с.
6. *Idczak D.* The bang-bang principle for the Goursat – Darboux problem // Int. J. Cont. – 2003. – **76**, № 11. – P. 1089 – 1094.
7. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1969. – 67 с.
8. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, № 3. – P. 559 – 565.
9. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 3. – С. 547 – 552.
10. *Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 1. – С. 66 – 73.
11. *Нахушев А. М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72 – 81.
12. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 2. – С. 280 – 285.
13. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 689 – 699.
14. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 1. – С. 171 – 174.
15. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. – 2003. – **74**, № 4. – С. 517 – 528.
16. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 6. – С. 763 – 774.
17. *Mesloub S., Mansour A.* A mixed problem for a Boussinesq hyperbolic equation with integral condition // Int. J. Open Problems Comput. Math. – 2009. – № 4. – 10 p.
18. *Уткина Е. А.* Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 4. – С. 600 – 604.
19. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. – Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2012. – 194 с.
20. *Юсубов Ш. Ш.* Задача типа Гурса для уравнения высокого порядка // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 6. – С. 874 – 880.
21. *Cirnu M. I.* Goursat problem for some hyperbolic equations solved by Laplace transform method // Int. J. Modern Sci. and Eng. Technol. – 2014. – **1**, № 1. – P. 9 – 15.
22. *Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А.* Уравнения с доминирующей частной производной. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 385 с.
23. *Никольский С. М.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // Мат. сб. – 1963. – **(63)103**, № 2. – С. 224 – 252.

Получено 28.07.14,
после доработки — 19.10.16