УДК 517.946

А. М. Кузь, $\boxed{\textbf{Б. Й. Пташник}}$ (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТИПУ СОБОЛЄВА ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

In a domain obtained as a Cartesian product of an interval $[0, T]$ and the space $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, for a system of equations (with constant coefficients) unsolved with respect to the highest time derivative, we study a problem with integral conditions in the time variable in the class of functions almost periodic in the space variables. A criterion of uniqueness and sufficient conditions for the existence of the solution of this problem in different functional spaces are established. We use the metric approach to solve the problem of small denominators encountered in the construction of the solution.

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0, T]$ и пространства $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, для системы уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени, с постоянными коэффициентами исследована задача с интегральными условиями по временной координате в классе почти периодических по пространственным переменным функций. Установлен критерий единственности и достаточные условия существования в различных функциональных пространствах решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, которые появились при построении решения задачи, использован метрический подход.

1. Вступ. Важливим напрямком сучасної теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є вивчення задач із нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для некласичних рівнянь математичної фізики, зокрема для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом (рівнянь типу Соболєва). Такі рівняння виникають при математичному моделюванні багатьох задач гідродинаміки: малі коливання ідеальної рідини в посудині, що обертається [14], фільтрація рідини в тріщинуватих породах [2], динаміка стратифікованих рідин [5] та ін. Як приклад можна також навести систему рівнянь, яка описує динаміку в'язкопружних рідин (модель Кельвіна – Фойгта) [22]

$$\begin{aligned} &(1 - \kappa\Delta)\partial_t \vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla\vec{u}) + \nabla p = \vec{f}, \qquad \kappa, \nu > 0, \\ &\operatorname{div} \vec{u} = 0, \end{aligned}$$

де $\vec{u} := \vec{u}(t, x) = \operatorname{col}(u^1(t, x), u^2(t, x), u^3(t, x))$ — вектор швидкостей, $p := p(t, x)$ — тиск, $x \in \in \mathbb{R}^3$. Багато інших прикладів фізичних процесів, які моделюються рівняннями типу Соболєва, можна знайти в монографії [23].

Задачі з локальними та нелокальними умовами для рівнянь типу Соболєва досліджувались багатьма авторами. Зокрема, у працях [3, 4, 8, 10] вивчались задачі з багатоточковими нелокальними двоточковими умовами та умовами типу Діріхле для рівнянь та систем рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, у класах функцій, періодичних за просторовими змінними. Однак задачі з інтегральними умовами для таких рівнянь та систем рівнянь є малодослідженими.

При моделюванні фізичних процесів інтегральні умови зазвичай використовують у випадках, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або неможливо безпосередньо виміряти певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднення.

Задачі з інтегральними умовами за часовою змінною для еволюційних рівнянь почали вивчати порівняно недавно (у 80-х роках XX століття). Це обумовлено тим, що такі задачі, взагалі, є некоректними, а їхня розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників і не є стійкою відносно малих змін коефіцієнтів задачі та параметрів області. В останні десятиліття було досліджено задачі з інтегральними умовами (див. [9, 21] та наведену там бібліографію) для широких класів лінійних гіперболічних та параболічних рівнянь і систем рівнянь, а також для безтипних і псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними. Окремі роботи, зокрема [9, 12, 20, 24], стосуються рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

У даній праці результати роботи [9] перенесено на системи диференціальних рівнянь типу Соболєва зі сталими коефіцієнтами. У $(p+1)$-вимірному шарі вивчається задача про знаходження розв'язку системи рівнянь у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними, який за часовою змінною задовольняє загальні умови, частинними випадками яких є інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої вектор-функції або двоточкові нелокальні умови.

2. Основні позначення. Будемо використовувати такі позначення:

$$x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p,\quad dx=dx_1\ldots dx_p,$$

$$k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p,\quad |k|=|k_1|+\ldots+|k_p|,$$

$$s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p,\quad |s|=s_1+\ldots+s_p,\quad \eta^s=\eta_1^{s_1}\ldots\eta_p^{s_p},\quad \eta\in\mathbb{R}^p,$$

$$\hat{s}=(s_0,s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^{p+1},\quad |\hat{s}|=s_0+s_1+\ldots+s_p,\quad |\hat{s}|^*=2s_0+s_1+\ldots+s_p,$$

$$\mu_k=\left(\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}\right)\in\mathbb{R}^p,\quad \|\mu_k\|^2=\mu_{k_1}^2+\ldots+\mu_{k_p}^2,\quad |\mu_k|=|\mu_{k_1}|+\ldots+\left|\mu_{k_p}\right|,$$

$$\mu_k^s=\mu_{k_1}^{s_1}\ldots\mu_{k_p}^{s_p},\quad (\mu_k,x)=\mu_{k_1}x_1+\ldots+\mu_{k_p}x_p,$$

$$D^p=\{(t,x)\colon 0<t<T, x\in\mathbb{R}^p\},$$

$$\partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_{x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad j\in\{1,\ldots,p\},\quad \partial_x=\left(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_p}\right),\quad \partial_x^s=\partial_{x_1}^{s_1}\ldots\partial_{x_p}^{s_p},$$

S_q — симетрична група всіх перестановок перших q натуральних чисел, ρ_ω — число інверсій у перестановці $\omega=(i_1,\ldots,i_q)\in S_q$, $\mathcal{J}_n$, $n\in\mathbb{N}$, — множина всеможливих наборів вигляду $J=(j_1,\ldots,j_n)$, $j_l\in\{0,1\}$, $l\in\{1,\ldots,n\}$, $|\mathbf{A}|=\max_{1\le j,q\le n}|a_{jq}|$ — норма матриці $\mathbf{A}=\|a_{jq}\|_{j,q=1}^n$, $\mathbf{I}_m$ та $\mathbf{O}_m$ — одинична та нульова матриці розміру $m\times m$, $\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}=\|a_j\delta_{ij}\|_{i,j=1}^n$, де δ_{ij} — символ Кронекера, — діагональна матриця, C_q^r — кількість усіх комбінацій з q елементів по r, C_j, $j=1,2,\ldots,$ — додатні сталі величини, які не залежать від k та μ_k, $[a]$ — ціла частина числа $a\in\mathbb{R}$;

$$\mathcal{V}:=\{\mu_n\in\mathbb{R}\colon \mu_{-n}=-\mu_n, d_1|n|^{\theta_1}\le|\mu_n|\le d_2|n|^{\theta_2}, n\in\mathbb{Z}\},\quad 0<d_1\le d_2,\quad 0<\theta_1\le\theta_2, \tag{1}$$

$$\mathcal{M}:=\{\mu_k\in\mathbb{R}^p\colon \mu_{k_j}\in\mathcal{V}, j\in\{1,\ldots,p\}, k\in\mathbb{Z}^p\}.$$

Із (1) випливає, що для всіх $\mu_k\in\mathcal{M}$ виконуються оцінки

$$D_1|k|^{\theta_1}\le|\mu_k|\le D_2|k|^{\theta_2},\quad D_1=d_1\min\{1,p^{1-\theta_1}\},\quad D_2=d_2\max\{1,p^{1-\theta_2}\}. \tag{2}$$

3. Функціональні простори. Будемо використовувати такі простори майже періодичних по $x_1,\ldots,x_p$ функцій [19] із заданим спектром $\mathcal{M}$:

$W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta,\gamma>0$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору поліномів вигляду $v(x)=\sum_k v_k\exp(i\mu_k,x)$, $\mu_k\in\mathcal{M}$, за нормою [16, с. 15]

$$\left\|v,W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}\right\|=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|v_k|^2\,(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\mu_k|^\gamma)\right)^{1/2};$$

$\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}$ — простір таких вектор-функцій $\vec{v}(x)=\operatorname{col}\left(v^1(x),\ldots,v^m(x)\right)$, що $v^q\in W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}$, $q\in\{1,\ldots,m\}$, із нормою

$$\left\|\vec{v},\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right\|=\sum_{q=1}^m\left\|v^q,W^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M}}\right\|;$$

$C^q\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right)$ — простір таких вектор-функцій $\vec{u}(t,x)=\operatorname{col}(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, що $\vec{u}(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\vec{u}_k(t)\exp\left(i\mu_k,x\right)$, $\mu_k\in\mathcal{M}$, і для довільного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $d^l\vec{u}(t,x)/dt^l=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\vec{u}^{(l)}_k(t)\exp\left(i\mu_k,x\right)$, $l\in\{0,1,\ldots,q\}$, належать простору $\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}$ та є неперервними по t у нормі цього простору,

$$\left\|\vec{u},C^q\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right)\right\|=\sum_{l=0}^q\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{d^l\vec{u}}{dt^l},\overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right\|. \tag{3}$$

4. Постановка задачі. В області D^p розглядаємо задачу про знаходження майже періодичного по x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язку системи рівнянь

$$\mathbf{N}(\partial_t,\partial_x)[\vec{u}]:=\mathbf{L}(\partial_x)\partial_t^n\vec{u}(t,x)+\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}_j(\partial_x)\partial_t^j\vec{u}(t,x)=\vec{0},\quad (t,x)\in D^p, \tag{4}$$

який за змінною t задовольняє умови

$$U_j[\vec{u}]:=\alpha_j\partial_t^{j-1}\vec{u}(0,x)+\beta_j\partial_t^{j-1}\vec{u}(T,x)+$$
$$+\gamma_j\int_0^T t^{r_j}\vec{u}(t,x)dt=\vec{\varphi}_j(x),\quad j\in\{1,\ldots,n\},\ x\in\mathbb{R}^p, \tag{5}$$

де $\vec{u}(t,x)=\operatorname{col}\left(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x)\right)$; $\mathbf{L}(\partial_x)$ — еліптичний матричний диференціальний вираз,

$$\mathbf{L}(\partial_x)=\|l_{qr}(\partial_x)\|^m_{q,r=1},\quad l_{qr}(\partial_x)=\sum_{|s|\le 2N}l_{qr,s}\partial_x^s,\quad l_{qr,s}\in\mathbb{C},\quad N\in\mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_j(\partial_x)=\|a^j_{qr}(\partial_x)\|^m_{q,r=1},$$
$$a^j_{qr}(\partial_x)=\sum_{|s|\le N_j}a^j_{qr,s}\partial_x^s,\quad a^j_{qr,s}\in\mathbb{C},\quad N_j\in\mathbb{Z}_+,\quad j\in\{0,1,\ldots,n-1\}; \tag{7}$$

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R},\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 \neq 0,\ r_j \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \{1, \ldots, n\},\ r_1 < r_2 < \ldots < r_n$; вектор-функції $\vec{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x), \ldots, \varphi_j^m(x)\right),\ j \in \{1, \ldots, n\}$, є майже періодичними по x із заданим спектром $\mathcal{M}$,

$$\vec{\varphi}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{\varphi}_{jk} \exp\left(i\mu_k, x\right), \quad \vec{\varphi}_{jk} = \mathrm{col}\left(\varphi_{jk}^1, \ldots, \varphi_{jk}^m\right), \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{8}$$

до того ж

$$\vec{\varphi}_{jk} = \lim_{H \to \infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{[0,H]^p} \vec{\varphi}_j(x) \exp\left(-i\mu_k, x\right) dx.$$

Далі нам знадобляться очевидні нерівності

$$|\mu_k|^\sigma < (1 + |\mu_k|)^\sigma \leq 2^\sigma |\mu_k|^\sigma, \quad \sigma > 0, \tag{9}$$

які виконуються для всіх $\mu_k \in \mathcal{M},\ |\mu_k| \geq 1$, тобто для всіх $\mu_k \in \mathcal{M},\ |k| > K_0,\ K_0 = D_1^{-1/\theta_1}$, де сталі D_1 і θ взято з оцінок (2).

5. Побудова та єдиність розв'язку. Позначимо

$$\vec{V}(t, x) = \mathrm{col}\left(\vec{u}(t, x), \partial_t \vec{u}(t, x), \ldots, \partial_t^{n-1} \vec{u}(t, x)\right), \quad \vec{\Phi}(x) = \mathrm{col}(\vec{\varphi}_1(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)), \tag{10}$$

$$\mathcal{A}\left(\partial_x\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \ldots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{A}_0\left(\partial_x\right) & -\mathbf{A}_1\left(\partial_x\right) & -\mathbf{A}_2\left(\partial_x\right) & \ldots & -\mathbf{A}_{n-1}\left(\partial_x\right) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\mathcal{L}\left(\partial_x\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \ldots & \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m & \mathbf{L}\left(\partial_x\right) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(t) := \begin{pmatrix} t^{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_m, \tag{12}$$

$$\mathbf{A} := \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \otimes \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{B} := \mathrm{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \otimes \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{\Gamma} := \mathrm{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \otimes \mathbf{I}_m,$$

де $\mathcal{A}\left(\partial_x\right), \mathcal{L}\left(\partial_x\right)$ — квадратні матриці розміру mn, $\otimes$ — знак тензорного добутку матриць.

Очевидно, що задача (4), (5) еквівалентна такій задачі для системи рівнянь першого порядку з невідомою вектор-функцією $\vec{V}(t, x) = \mathrm{col}(V^1(t, x), \ldots, V^{mn}(t, x))$:

$$\mathcal{L}\left(\partial_x\right) \partial_t \vec{V}(t, x) = \mathcal{A}\left(\partial_x\right) \vec{V}(t, x), \tag{13}$$

$$\mathbf{A}\vec{V}(0, x) + \mathbf{B}\vec{V}(T, x) + \mathbf{\Gamma} \int\limits_0^T \mathbf{R}(t) \vec{V}(t, x) dt = \vec{\Phi}(x). \tag{14}$$

Майже періодичний по x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (13), (14) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\vec{V}(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\vec{V}_k(t)\exp(i\mu_k,x),\quad \vec{V}_k(t)=\mathrm{col}\left(V_k^1(t),\ldots,V_k^{mn}(t)\right),\quad \mu_k\in\mathcal{M}. \tag{15}$$

Підставивши ряди (8), (15) у систему (13) та умови (14), отримаємо для знаходження кожної з вектор-функцій $\vec{V}_k(t),\ k\in\mathbb{Z}^p$, відповідно таку задачу:

$$\mathcal{L}\left(i\mu_k\right)\frac{d\vec{V}_k(t)}{dt}=\mathcal{A}\left(i\mu_k\right)\vec{V}_k(t), \tag{16}$$

$$\mathbf{A}\vec{V}_k(0)+\mathbf{B}\vec{V}_k(T)+\mathbf{\Gamma}\int\limits_0^T\mathbf{R}(t)\vec{V}_k(t)dt=\vec{\Phi}_k, \tag{17}$$

де $\vec{\Phi}_k=\mathrm{col}(\vec{\varphi}_{1k},\ldots,\vec{\varphi}_{nk}),\ k\in\mathbb{Z}^p$.

Лема 1. *Існує така стала C_1, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in\mathcal{M}$ виконується оцінка*

$$|\det\mathbf{L}(i\mu_k)|\geq C_1|\mu_k|^{2Nm}.$$

Доведення базується на еліптичності оператора $\mathbf{L}(\partial_x)$ і проводиться за схемою доведення леми 1 у [4].

***Зауваження* 1.** Якщо $\det\mathbf{L}(i\mu_k)=0$ для деякого вектора $\mu_k=\mu_{\bar{k}}$ (таких векторів, згідно з лемою 1, може бути лише скінченна кількість), то відповідна задача (16), (17) є перевизначеною, і для її однозначної розв'язності потрібно накладати додаткові умови на параметри задачі. Такі умови можна записати в явній формі, як це зроблено в роботі [9] для скалярного випадку.

Далі вважатимемо, що символ диференціального виразу $\mathbf{L}(\partial_x)$ справджує умову

$$\det\mathbf{L}(i\mu_k)\neq 0\quad\forall\mu_k\in\mathcal{M}. \tag{18}$$

За умови (18) для матриці $\mathcal{L}(i\mu_k)$ існує обернена матриця $\mathcal{L}(i\mu_k)^{-1}$ і загальний розв'язок системи (16) зображується формулою [11, с. 178]

$$\vec{V}_k(t)=\exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)t\right)\vec{B},\quad \mathcal{N}(i\mu_k)=\mathcal{L}(i\mu_k)^{-1}\mathcal{A}(i\mu_k), \tag{19}$$

де $\vec{B}=\mathrm{col}\left(B_1,\ldots,B_{mn}\right)$ — довільний сталий вектор. Введемо вектор-функції $\vec{F}_{qk}(t)$ та $\vec{f}_{qk}(t)$, $q\in\{1,\ldots,mn\}$, визначені таким чином:

$$\vec{F}_{qk}(t)=\mathrm{col}(F_{qk}^1(t),\ldots,F_{qk}^{mn}(t)):=\exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)t\right)\vec{e}_q,\quad \vec{e}_q=\mathrm{col}(\underbrace{\overbrace{0,\ldots,0}^{q-1},1,0,\ldots,0}_{mn}), \tag{20}$$

$$\vec{f}_{qk}(t)=\mathrm{col}\left(f_{qk}^1(t),\ldots,f_{qk}^m(t)\right):=\mathrm{col}\left(F_{qk}^1(t),\ldots,F_{qk}^m(t)\right), \tag{21}$$

$$|\vec{F}_{qk}(t)|:=\max_{1\leq j\leq mn}|F_{qk}^j(t)|,\quad |\vec{f}_{qk}(t)|:=\max_{1\leq j\leq m}|f_{qk}^j(t)|,\quad t\in[0,T].$$

Оскільки за побудовою розв'язок системи (4), (5) утворюють перші m компонент розв'язку системи (16), (17), то, враховуючи формули (19) і рівності (10), (20) та (21), переконуємося, що виконуються співвідношення

$$\vec{F}_{qk}(t)=\mathrm{col}\left(\vec{f}_{qk}(t),\vec{f}_{qk}^{\,\prime}(t),\vec{f}_{qk}^{\,\prime\prime}(t),\ldots,\vec{f}_{qk}^{\,(n-1)}(t)\right),\quad q\in\{1,\ldots,mn\}. \tag{22}$$

На підставі (19), (20) розв'язок задачі (16), (17) зображується формулою

$$\vec{V}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} B_{qk} \vec{F}_{qk}(t),$$

вектор коефіцієнтів якої $\vec{B}_k = \mathrm{col}(B_{1k}, \ldots, B_{mn,k})$ визначається із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} \exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)T\right) + \mathbf{\Gamma} \int_0^T \mathbf{R}(t) \exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)t\right) dt \right) \vec{B}_k = \vec{\Phi}_k. \tag{23}$$

Визначник $\Delta(\mu_k, T)$ системи рівнянь (23)

$$\Delta(\mu_k, T) = \det \left\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)T\right) + \mathbf{\Gamma} \int_0^T \mathbf{R}(t) \exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)t\right) dt \right\|, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \tag{24}$$

збігається з характеристичним визначником задачі (16), (17) (див. [18, с. 98]).

Отже, для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ задача (16), (17) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли, відповідно, $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$ (див. лему 1 в [18, с. 98]).

Теорема 1. *Для того щоб задача* (4), (5) *мала не більше одного майже періодичного по* x *зі спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у просторі* $C^n\left([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m}\right)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\Delta(\mu_k, T) \neq 0 \quad \forall \mu_k \in \mathcal{M}. \tag{25}$$

Доведення. За умови (25) єдиність розв'язку задачі (13), (14) доводиться за схемою доведення теореми 1 у [21]. Із (10) та еквівалентності задач (4), (5) та (13), (14) випливає твердження теореми.

6. Існування розв'язку задачі. Далі вважатимемо, що виконується умова (25). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $V_k(t)$ задачі (16), (17), який зображується формулою

$$\vec{V}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi^l_{jk} \right) \vec{F}_{qk}(t), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{26}$$

де $\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)$ — алгебраїчне доповнення елемента $(m(j-1)+l)$-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$. На підставі (10), (15), (22) та (26) формальний розв'язок задачі (4), (5) зображується векторним рядом

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \vec{u}_k(t) \exp(i\mu_k, x) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi^l_{jk} \right) \vec{f}_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \tag{27}$$

де $\vec{u}_k(t) = \mathrm{col}(V^1_k(t), \ldots, V^m_k(t))$. Ряд (27), взагалі, є розбіжним, бо вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Тому існування розв'язку задачі (4), (5) у шкалі просторів $C^n([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m})$ пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників.

6.1. Далі нам знадобляться деякі допоміжні твердження. Виясним поведінку λ-коренів характеристичного рівняння

$$\det \|\lambda \mathbf{I}_{mn} - \mathcal{N}(i\mu_k)\| = 0, \tag{28}$$

яке відповідає системі диференціальних рівнянь (16). Позначимо

$$\kappa_1 := \max_{\substack{|\vec{p}|=m \\ p_n \neq m}} \left\{ \frac{\sum_{q=0}^{n-1}(N_q - 2N)p_q}{mn - \sum_{q=1}^{n} q p_q} \right\}, \quad \vec{p} := (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \tag{29}$$

$$C_2 := \max_{\substack{1 \leq q,r \leq m \\ |s| \leq 2N}} \{|l_{qr,s}|\}, \quad C_3 := \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \max_{\substack{1 \leq q,r \leq m \\ |s| \leq N_j}} \{|a^j_{qr,s}|\} \right\},$$

$$C_4 = C_2/C_1, \quad C_5 = C_2 C_3/C_1, \quad C_6 = \max\{1, (C_2 C_3/C_1)^m\}.$$

Лема 2. *Для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *корені* $\lambda_{jk} := \lambda_j(\mu_k)$, $j \in \{1, \ldots, nm\}$, *рівняння* (28) *справджують оцінки*

$$|\lambda_{jk}| \leq C_6 \, (1 + |\mu_k|)^{\kappa_1}, \quad j \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{30}$$

Доведення. На підставі (11), (12) та умови (18) рівняння (28) запишемо у вигляді

$$\det \left\| \lambda^n \mathbf{I}_m + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{L}^{-1}(i\mu_k) \mathbf{A}_j(i\mu_k) \lambda^j \right\| = 0. \tag{31}$$

Із рівностей (6), (7) випливає, що елементи матриць $\mathbf{L}(i\mu_k)$ та $\mathbf{A}_j(i\mu_k)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, є многочленами за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$ степенів $2N$ та N_j, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, відповідно. На підставі (6), (18) та леми 1 отримуємо, що елементи $\tilde{l}_{qr}(i\mu_k)$, $q, r \in \{1, \ldots, m\}$, матриці $\mathbf{L}^{-1}(i\mu_k)$ є дробово-раціональними функціями за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$, причому для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$|\tilde{l}_{qr}(i\mu_k)| \leq C_4 (1 + |\mu_k|)^{-2N}, \quad q, r \in \{1, \ldots, m\}. \tag{32}$$

Із (7), (32) випливає, що елементи $L_{q,r,j}(i\mu_k) = \sum_{\zeta=1}^{m} \tilde{l}_{q\zeta}(i\mu_k) a^j_{\zeta r}(i\mu_k)$, $r, q \in \{1, \ldots, m\}$, матриць $\mathbf{L}^{-1}(i\mu_k)\mathbf{A}_j(i\mu_k)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, відповідно, є дробово-раціональними функціями за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$ і для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$|L_{q,r,j}(i\mu_k)| \leq C_5 (1 + |\mu_k|)^{N_j - 2N}, \quad q, r \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{33}$$

Рівняння (31) запишемо у розгорнутій формі

$$\sum_{\omega \in S_m} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{m} \left(\delta_{q,i_q} \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} L_{q,i_q,j}(i\mu_k) \lambda^j \right) = 0, \tag{34}$$

де δ_{q,i_q} — символ Кронекера. З (33) випливає, що порядок росту функцій $L_{q,i_q,j}(i\mu_k)$, $q \in \in \{1, \ldots, m\}$, по $|\mu_k|$ не залежить від q. Тому на підставі (31), (34) та відомої тотожності [1, с. 626]

$$(x_0 + x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\vec{z}|=m} \frac{m!}{z_0! z_1! \ldots z_n!} x_0^{z_0} x_1^{z_1} \ldots x_n^{z_n}, \quad \vec{z} := (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1},$$

рівняння (28) (після формальної заміни $x_n = \lambda^n$, $x_{n-1} = L_{1,i_1,n-1}(i\mu_k)\lambda^{n-1}, \ldots, x_1 =$

$= L_{1,i_1,1}(i\mu_k)\lambda,\ x_0 = L_{1,i_1,0}(i\mu_k))$ набере вигляду

$$\sum_{|\vec{p}|=m} \lambda^{np_n+(n-1)p_{n-1}+\ldots+p_1} Q_{\vec{p}}(i\mu_k) = 0, \quad \vec{p} := (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \tag{35}$$

де $Q_{\vec{p}}(i\mu_k)$ — дробово-раціональні функції за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$, які на підставі (33) справджують оцінки

$$Q_{(0,\ldots,0,m)}(i\mu_k) = 1, \quad Q_{\vec{p}}(i\mu_k)| \le C_6(1+|\mu_k|)^{\sum_{j=0}^{n-1} p_j(N_j-2N)}, \quad |\vec{p}| = m, \quad p_n \ne m, \tag{36}$$

для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Із (35), (36) та формул про оцінку модулів коренів многочлена через його коефіцієнти [17, с. 101] отримуємо

$$|\lambda_{jk}| \le 1 + \max_{\substack{|\vec{p}|=m \\ p_n \ne m}} \left| \frac{Q_{\vec{p}}(i\mu_k)}{Q_{(0,\ldots,0,m)}(i\mu_k)} \right|^{1/(mn - \sum_{q=1}^{n} qp_q)} = C_6\,(1+|\mu_k|)^{\kappa_1}, \quad j \in \{1, \ldots, mn\}.$$

Лему 2 доведено.

6.2. Далі, для спрощення викладок, будемо вважати, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ корені рівняння (28) є простими та відмінними від нуля.

Очевидно, що для деякого $\xi \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ справджується рівність

$$\max_{0 \le j \le n-1} \{N_j\} = N_\xi,$$

де N_j — порядки диференціальних виразів $a_{qr}^{j}(\partial_x),\ q, r \in \{1, \ldots, m\}$ (див. (7)). При дослідженні розв'язності задачі (4), (5) будемо розрізняти два випадки: $\mathbf{A})\ N_\xi < 2N$, $\mathbf{B})\ N_\xi \ge 2N$.

Випадок **A**. У цьому випадку $\kappa_1 < 0$ (див. (29)) і з оцінок (30) випливає, що $|\lambda_{jk}| \to 0$ при $|k| \to \infty$ для всіх $j \in \{1, \ldots, nm\}$.

Позначимо $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$,

$$\mathbf{E}_0(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & t\mathbf{I}_m & \ldots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{I}_m & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \ldots & \dfrac{t^{n-3}}{(n-3)!}\mathbf{I}_m & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{I}_m & t\mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\vec{G}_q(t) = \mathrm{col}(G_q^1(t), \ldots, G_q^{mn}(t)) := \mathbf{E}_0(t)\vec{e}_q, \quad \vec{g}_q(t) = \mathrm{col}\left(G_q^1(t), \ldots, G_q^m(t)\right), \tag{38}$$

де $\vec{e}_q,\ q \in \{1, \ldots, mn\}$, визначені в (20). Із (37), (38) випливає, що

$$\vec{G}_q(t) = \mathrm{col}\left(\vec{g}_q(t), \vec{g}_q{}'(t), \vec{g}_q{}''(t), \ldots, \vec{g}_q^{\,(n-1)}(t)\right), \quad q \in \{1, \ldots, mn\}. \tag{39}$$

Лема 3. *Нехай $N_\xi < 2N$. Тоді для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ та для кожного $q \in \{1, \ldots, mn\}$ виконуються нерівності*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\vec{f}_{qk}(t)\right| \leq \exp(C_5T), \quad j\in\{0,1,\ldots,n\}, \tag{40}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\vec{f}_{qk}(t)-\frac{d^j}{dt^j}\vec{g}_q(t)\right| \leq \exp(C_5|\mu_k|^{-(2N-N_\xi)}T), \quad j\in\{0,1,\ldots,n-1\}. \tag{41}$$

Доведення. На підставі (11), (12), (19) та (33) отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$|\mathcal{N}(i\mu_k)| \leq C_5(1+|\mu_k|)^{N_\xi-2N}. \tag{42}$$

Із (22) випливають такі нерівності:

$$\left|\frac{d^n\vec{f}_{qk}(t)}{dt^n}\right| \leq \left|\frac{d\vec{F}_{qk}(t)}{dt}\right|, \quad \left|\frac{d^j\vec{f}_{qk}(t)}{dt^j}\right| \leq |\vec{F}_{qk}(t)|, \quad j\in\{0,1,\ldots,n-1\}. \tag{43}$$

На підставі (20), (21), (42) та (43) отримуємо оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\vec{f}_{qk}(t)\right| \leq \max_{t\in[0,T]}\left\{|\vec{F}_{qk}(t)|, |\vec{F}'_{qk}(t)|\right\} \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}\{|\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)|, |\mathcal{N}(i\mu_k)\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)|\} \leq$$

$$\leq \exp(|\mathcal{N}(i\mu_k)|T) \leq \exp(C_5(1+|\mu_k|)^{-(2N-N_\xi)}T) \leq \exp(C_5T), \tag{44}$$

де $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, $q\in\{1,\ldots,mn\}$.

Подібним чином, враховуючи (37)–(39), отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\vec{f}_{qk}(t)-\frac{d^j}{dt^j}\vec{g}_q(t)\right| = \max_{t\in[0,T]}\left|\vec{F}_{qk}(t)-\vec{G}_q(t)\right| \leq \max_{t\in[0,T]}|\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)-\mathbf{E}_0(t)| \leq$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}|\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)| \leq \exp(C_5|\mu_k|^{-(2N-N_\xi)}T), \tag{45}$$

де $j\in\{0,1,\ldots,n-1\}, q\in\{1,\ldots,mn\}$. Із нерівностей (44), (45) випливає доведення леми.

Позначимо

$$\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T) := \det\|U_j[\vec{g}_q]\|_{j=1,\ldots,n}^{q=1,\ldots,mn} =$$

$$= \det\left\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{E}_0(T)+\mathbf{\Gamma}\int\limits_0^T\mathbf{R}(t)\mathbf{E}_0(t)dt\right\| = \det\|g_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,T)\mathbf{I}_m\|_{j,q=1}^n\,, \tag{46}$$

де

$$g_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,T) = \begin{cases} \alpha_j\delta_{jq}+\beta_j\dfrac{\tau^{q-j}}{(q-j-1)!}+\gamma_j\dfrac{\tau^{r_j+q}}{(r_j+q)(q-1)!}, & q-j\geq 0,\\ \gamma_j\dfrac{\tau^{r_j+q}}{(r_j+q)(q-1)!}, & q-j<0. \end{cases} \tag{47}$$

Припустимо, що для коефіцієнтів умов (5) виконуються такі співвідношення:

$$\alpha_j = \beta_j = 0, \quad j \in \{j_1, \ldots, j_l\}, \quad 0 \le l \le n, \tag{48}$$

$$\alpha_q \neq -\beta_q, \quad q \in \{q_1, \ldots, q_{n-l}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_l\}. \tag{49}$$

Вважаємо, що при $l = 0$ в умові (48) $\{j_1, \ldots, j_l\} = \varnothing$. За умов (48), (49), враховуючи (47) та елементарні властивості визначників, із (46) отримуємо

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, T) = \prod_{s=1}^{n-l} (\alpha_{q_s} + \beta_{q_s})^m \det \left\| \frac{T^{r_y+z}}{(r_y+z)(z-1)!} \mathbf{I}_m \right\|_{y,z \in \{j_1,\ldots,j_l\}} =$$

$$= \prod_{s=1}^{n-l} (\alpha_{q_s} + \beta_{q_s})^m \det \left(\mathbf{D}(T) \otimes \mathbf{I}_m \right), \tag{50}$$

де

$$\mathbf{D}(T) := \left\| \frac{T^{r_y+z}}{(r_y+z)(z-1)!} \right\|_{y,z \in \{j_1,\ldots,j_l\}}. \tag{51}$$

Із (50), враховуючи властивості тензорного добутку двох матриць, одержуємо

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, T) = \prod_{s=1}^{n-l} (\alpha_{q_s} + \beta_{q_s})^m \left(\det \mathbf{D}(T) \right)^m. \tag{52}$$

Обчисливши визначник матриці (51) (див. [13, с. 110]), отримаємо

$$\det \mathbf{D}(T) = T^{\eta_0(\vec{j})} \prod_{s=1}^{l} \frac{\gamma_{j_s}}{(j_s - 1)!} \prod_{\substack{y,z \in \{j_1,\ldots,j_l\} \\ z<y}} ((r_y - r_z)(y - z)) \prod_{y,z \in \{j_1,\ldots,j_l\}} (r_y + z)^{-1} := B_1 T^{\eta_0(\vec{j})}, \tag{53}$$

де

$$\eta_0(\vec{j}) = r_{j_1} + \ldots + r_{j_l} + j_1 + \ldots + j_l, \quad \vec{j} = (j_1, \ldots, j_l). \tag{54}$$

На підставі (52), (53) маємо

$$\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, T) = B_2 T^{m\eta_0(\vec{j})}, \quad B_2 = (B_1)^m \prod_{s=1}^{n-l} (\alpha_{q_s} + \beta_{q_s})^m. \tag{55}$$

Із формул (20), (21) і (24) випливає, що

$$\Delta(\mu_k, T) = \det \| U_j[\vec{f}_q] \|_{j=1,\ldots,n}^{q=1,\ldots,mn}. \tag{56}$$

Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $N_\xi < 2N$ *та виконуються умови* (48), (49). *Тоді існує таке число* $K := K(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, T) > 0$, *що для всіх векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, $|\mu_k| > K$, *виконується оцінка*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \ge C_7 T^{m\eta_0(\vec{j})},$$

де величина $\eta_0(\vec{j})$ *визначена формулою* (54), C_7 — *деяка стала, що залежить від* m, n, T *та* α_j, β_j, γ_j, r_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. На підставі формул (46), (56) та леми 3 із [21] отримуємо

$$|\Delta(\mu_k,T)-\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T)|\leq mn\cdot(mn)!\max_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq q\leq nm}}|U_j[\vec{f}_{qk}]-U_j[\vec{g}_q]|\times$$

$$\times\left(\max_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq q\leq nm}}\{|U_j[\vec{f}_{qk}]|,|U_j[\vec{g}_q]|\}\right)^{mn-1}. \tag{57}$$

Із (46), (47) випливає, що для довільного $T>0$ виконуються нерівності

$$|U_j[\vec{g}_q]|\leq\max_{1\leq j\leq n}\left\{|\alpha_j|+|\beta_j|T^n+|\gamma_j|T^{r_j+n}\right\},\quad j\in\{1,\ldots,n\},\quad q\in\{1,\ldots,mn\}. \tag{58}$$

З огляду на (40) одержуємо, що для довільного $T>0$ виконуються оцінки

$$|U_j[\vec{f}_{qk}]|\leq\exp(C_5T)\max_{1\leq j\leq n}\{|\alpha_j|+|\beta_j|+|\gamma_j|T^{r_j+1}\},\ \ j\in\{1,\ldots,n\},\ \ q\in\{1,\ldots,mn\}. \tag{59}$$

На підставі оцінок (58), (59) справджуються нерівності

$$\max_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq q\leq nm}}\{|U_j[\vec{f}_{qk}]|,|U_j[\vec{g}_q]|\}\leq C_8, \tag{60}$$

де $C_8=\exp(C_5T)\max_{1\leq j\leq n}\left\{|\alpha_j|+|\beta_j|T^n+|\gamma_j|T^{r_j+n},|\alpha_j|+|\beta_j|+|\gamma_j|T^{r_j+1}\right\}$. Із (5) та (41) випливають оцінки

$$|U_j[f_{qk}]-U_j[g_q]|\leq C_9\exp(C_5|\mu_k|^{-(2N-N_\xi)}T),\quad j,q\in\{1,\ldots,n\}, \tag{61}$$

де $C_9=\max_{1\leq j\leq n}\{|\alpha_j|+|\beta_j|+|\gamma_j|T^{r_j+1}\}$.

Із формули (57) на підставі (60) і (61) отримуємо

$$|\Delta(\mu_k,T)-\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T)|\leq mn\cdot(mn)!(C_8)^{mn-1}C_9\exp(C_5|\mu_k|^{-(2N-N_\xi)}T). \tag{62}$$

Позначимо

$$K(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T):=\left(\frac{1}{C_5T}\ln\left(\frac{|B_2|T^{m\eta_0(\vec{j})}}{2mn\cdot(mn)!(C_8)^{mn-1}C_9}\right)\right)^{-\frac{1}{2N-N_\xi}}.$$

За умов (48), (49), враховуючи (55), із нерівностей (62) отримуємо, що для всіх $\mu_k\in\mathcal{M}$, $|\mu_k|>K(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T)$, виконується нерівність

$$|\Delta(\mu_k,T)-\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T)|\leq\frac{1}{2}|\Delta_0(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},T)|\leq\frac{1}{2}|B_2|T^{m\eta_0(\vec{j})},$$

з якої випливає твердження теореми, причому $C_7=|B_2|/2$. Зауважимо, що за умов теореми 2 в задачі (4), (5) відсутня проблема малих знаменників.

На підставі леми 3 та теореми 2 отримуємо наступне твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 4 у [9].

Теорема 3. *Нехай* $N_\xi<2N$ *і справджуються умови* (25), (48), (49). *Якщо* $\vec{\varphi}_j\in\overline{W}^{\alpha,0,0}_{\mathcal{M},m}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4), (5) *із простору* $C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,0,0}_{\mathcal{M},m}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (27) *і справджує оцінку*

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,0,0}_{\mathcal{M},m}\right)\right\|\leq C_{10}\sum_{j=1}^{n}\left\|\vec{\varphi}_j;\overline{W}^{\alpha,0,0}_{\mathcal{M},m}\right\|,\quad C_{10}=C_{10}(n,m,C_5,C_7,C_9).$$

Випадок **B.** Якщо $N_\xi\geq 2N$, то з (29) випливає, що

$$\kappa_1 \geq \left. \frac{\sum_{q=0}^{n-1}(N_q - 2N)p_q}{mn - \sum_{q=1}^{n} qp_q} \right|_{\substack{p_\xi = m \\ p_j = 0, j \neq \xi}} = \frac{(N_\xi - 2N)m}{mn - \xi m} = \frac{N_\xi - 2N}{n - \xi} \geq 0. \tag{63}$$

На підставі леми 2 знайдеться така стала $C_\lambda \in \mathbb{R}$, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується нерівність

$$\max_{1 \leq j \leq mn} \mathrm{Re}\lambda_{jk} \leq C_\lambda |\mu_k|^\varrho, \quad 0 \leq \varrho \leq \kappa_1. \tag{64}$$

Позначимо $C_{11} = (2^{mn} - 1)T^{mn-1}(C_5)^{mn-1}$, $C_{12} = C_{11} \max\{1, C_5\}$.

Лема 4. *Нехай* $N_\xi \geq 2N$. *Тоді для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *компоненти вектор-функцій* $\vec{f}_{qk}(t)$, $q \in \{1, \ldots, mn\}$ (*див.* (21)), *справджують оцінки*

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} f_{qk}^l(t) \right| \leq \begin{cases} C_{12}\,(1 + |\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi - 2N)} \exp\left(C_\lambda\, |\mu_k|^\varrho\, t\right), & 0 \leq j \leq n-1, \\ C_{12}\,(1 + |\mu_k|)^{mn(N_\xi - 2N)} \exp\left(C_\lambda\, |\mu_k|^\varrho\, t\right), & j = n, \end{cases} \tag{65}$$

де $l \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in [0, T]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Доведення. Зауважимо, що при всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ для норми матриці $\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)$ виконується оцінка [6] (глава II, § 6)

$$|\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)| \leq (2^{mn} - 1)T^{mn-1} |\mathcal{N}(i\mu_k)|^{mn-1} \exp\left(t \max_{1 \leq j \leq mn} \mathrm{Re}\lambda_{jk}\right), \quad t \in [0, T]. \tag{66}$$

Із (42), (64) і (66) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$|\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)| \leq C_{11}\,(1 + |\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi - 2N)} \exp\left(C_\lambda\, |\mu_k|^\varrho\, t\right). \tag{67}$$

На підставі (20) та (67) отримуємо

$$\left| \frac{d^r \vec{F}_{qk}(t)}{dt^r} \right| \leq |\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)| |\mathcal{N}(i\mu_k)|^r \leq$$

$$\leq C_{12}\,(1 + |\mu_k|)^{(mn-1+r)(N_\xi - 2N)} \exp\left(C_\lambda\, |\mu_k|^\varrho\, t\right), \quad r \in \{0, 1\}. \tag{68}$$

З нерівностей (43) одержуємо

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} f_{qk}^l(t) \right| \leq \begin{cases} |\vec{F}_{qk}(t)|, & 0 \leq j \leq n-1, \\ |\vec{F}'_{qk}(t)|, & j = n, \end{cases} \qquad l \in \{1, \ldots, m\}. \tag{69}$$

Із (68) та (69) випливають оцінки (65).

Лему 4 доведено.

Розглянемо величини $\psi_j(\gamma_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, визначені таким чином:

$$\psi_j(\gamma_j) := \begin{cases} \max\left\{0, (mn-1)(N_\xi - 2N) - \varrho r_j\right\}, & \text{якщо } \gamma_j \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \gamma_j = 0, \end{cases} \qquad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Позначимо

$$C_{13} = \begin{cases} C_{12}\max\{1, T^{r_n}\}, & C_\lambda \geq 0, \\ C_{12}\max\{1, (r_n/(2|C_\lambda|))^{r_n} T\}, & C_\lambda < 0, \end{cases}$$

$$C_{14} = 3 \max_{1\leq j\leq n}\{\max\{|\alpha_j|, |\beta_j|, |\gamma_j|\}\} C_{13}, \quad C_{15} = (mn-1)!(C_{14})^{mn-1}.$$

Лема 5. *Нехай $N_\xi \geq 2N$. Тоді для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$ алгебраїчні доповнення елементів визначника $\Delta(\mu_k, T)$ справджують такі оцінки*:

$$\left|\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)\right| \leq \begin{cases} C_{15}(1+|\mu_k|)^{(mn-1)^2(N_\xi-2N)} \exp\left((mn-1)C_\lambda |\mu_k|^\varrho T\right), & C_\lambda \geq 0, \\ C_{15}\,(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)-\psi_j(\gamma_j)+m\sum_{g=1}^n \psi_g(\gamma_g)}, & C_\lambda < 0, \end{cases}$$

де $l \in \{1,\ldots,m\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $q \in \{1,\ldots,mn\}$.

Доведення. Проведемо спочатку допоміжні оцінки. На підставі леми 4 отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, $K_1 = (r_n/(|C_\lambda| T D_1))^{1/(\theta_1 h)}$, виконуються оцінки

$$\left|\int_0^T t^{r_j} f_{qk}^l(t)dt\right| \leq T \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|t^{r_j} f_{qk}^l(t)\right|\right\} \leq$$

$$\leq C_{12}\,(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)} \max_{t\in[0,T]}\{t^{r_j}\exp\left(C_\lambda |\mu_k|^\varrho t\right)\} \leq$$

$$\leq \begin{cases} C_{13}(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)} \exp\left(C_\lambda |\mu_k|^\varrho T\right), & C_\lambda \geq 0, \\ C_{13}\,(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)-\varrho r_j}, & C_\lambda < 0, \end{cases} \tag{70}$$

де $j \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,m\}$, $q \in \{1,\ldots,mn\}$.

Позначимо через $d_{rq}(\mu_k) := \alpha_j\delta_{rq} + \beta_j f_{qk}^l(T) + \gamma_j \int_0^T t^{r_j} f_{qk}^l(t)\,dt$ елемент визначника $\Delta(\mu_k, T)$, який стоїть на перетині r-го рядка, $r = m(j-1)+l$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,m\}$, та q-го стовпця, $q \in \{1,\ldots,mn\}$, де δ_{rq} — символ Кронекера. З (70) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, виконуються оцінки

$$|d_{rq}(\mu_k)| \leq \begin{cases} C_{14}\,(1+|\mu_k|)^{\psi_j(\gamma_j)}, & r = q, \\ C_{14}\,(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)-\varrho r_j}, & r \neq q, \end{cases} \quad r, q \in \{1,\ldots,mn\}, \quad \text{якщо} \quad C_\lambda < 0, \tag{71}$$

$$|d_{rq}(\mu_k)| \leq C_{14}(1+|\mu_k|)^{(mn-1)(N_\xi-2N)} \exp\left(C_\lambda |\mu_k|^\varrho T\right), \ r, q \in \{1,\ldots,mn\}, \quad \text{якщо} \quad C_\lambda \geq 0. \tag{72}$$

На підставі оцінок (71), (72) та структури алгебраїчних доповнень визначника $\Delta(\mu_k, T)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, виконуються нерівності

$$\left|\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)\right| \leq C_{15}\,(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N-\psi_j(\gamma_j)+m\sum_{g=1}^n \psi_g(\gamma_g)}, \quad \text{якщо} \quad C_\lambda < 0,$$

$$\left|\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k, T)\right| \leq C_{15}(1+|\mu_k|)^{(mn-1)^2(N_\xi-2N)} \exp\left((mn-1)C_\lambda |\mu_k|^\varrho T\right), \quad \text{якщо} \quad C_\lambda \geq 0.$$

Лему 5 доведено.

Встановимо умови існування розв'язку задачі (4), (5) у шкалі просторів $C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)$ у випадку, коли $N_\xi \geq 2N$. Ці умови залежать від знаку сталої C_λ у нерівності (64).

Теорема 4. *Нехай* $N_\xi \geq 2N$, $C_\lambda \geq 0$, *справджується умова* (25) *та існують сталі* $\eta > 0$, $\sigma > 0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\mu_k,T)| \geq (1+|\mu_k|)^{-\eta}\exp\left(-\sigma\,|\mu_k|^{\kappa_1}\right). \tag{73}$$

Якщо $\vec{\varphi}_j \in \overline{W}^{q_1,q_2,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $q_1 = \alpha+\eta+(m^2n^2-mn+1)(N_\xi-2N)$, $q_2 = mnC_\lambda T+\sigma+\beta$, *то існує розв'язок задачі* (4), (5) *із простору* $C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (27) *і справджує оцінку*

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)\right\| \leq C_{16}\sum_{j=1}^{n}\left\|\vec{\varphi}_j;\overline{W}^{q_1,q_2,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right\|, \quad C_{16}=C_{16}(n,m,C_{12},C_{15}). \tag{74}$$

Доведення. Оцінимо норму функції $\vec{u}(t,x)$, яка зображується рядом (27), у просторі $C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)$. На підставі (27) отримуємо оцінку

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)\right\| = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left|\frac{d^j}{dt^j}V_k^r(t)\right|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\mu_k|^{\kappa_1})\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}V_k^r(t)\right|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\mu_k|^{\kappa_1})\right)^{1/2}, \tag{75}$$

де функції $V_k^r(t)$ визначені формулами

$$V_k^r(t) = \sum_{q=1}^{mn}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{m(j-1)+l,q}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}\varphi_{jk}^l\right)f_{qk}^r(t), \quad r\in\{1,\ldots,m\}, \quad \mu_k\in\mathcal{M}. \tag{76}$$

На підставі лем 3, 4, нерівності (73) та формули (76) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}V_k^r(t)\right| \leq C_{17}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}|\varphi_{sk}^l|\,(1+|\mu_k|)^{(m^2n^2-mn+1)(N_\xi-2N)+\eta}\exp((mnC_\lambda T+\sigma)|\mu_k|^{\kappa_1}), \tag{77}$$

де $C_{17}=mnC_{12}C_{15}$, $j\in\{0,1,\ldots,2n\}$, $r\in\{1,\ldots,m\}$.

З (75), (77) випливає оцінка

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)\right\| \leq C_{17}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\left|\varphi_{jk}^l\right|^2(1+|\mu_k|)^{2q_1}\exp(2q_2|\mu_k|^{\kappa_1})\right)^{1/2} =$$

$$= mC_{17}\sum_{j=1}^{n}\left\|\vec{\varphi}_j;\overline{W}^{q_1,q_2,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right\|,$$

що й завершує доведення теореми 4.

Теорема 5. *Нехай* $N_\xi \geq 2N$, $C_\lambda < 0$, *виконуються умови* (25) *та* (73). *Якщо* $\vec{\varphi}_j \in \in \overline{W}^{q_1,q_2,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $q_1 = \alpha + \eta + (2mn+1)(N_\xi - 2N) - \psi_j(\gamma_j) + m\sum_{g=1}^{n} \psi_g(\gamma_g)$, $q_2 = \sigma + \beta$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (4), (5) *із простору* $C^n\left([0,T], \overline{W}^{\alpha,\beta,\kappa_1}_{\mathcal{M},m}\right)$. *Цей розв'язок зображується формулою* (27) *і справджує оцінку вигляду* (74) *з відповідними значеннями* q_1 *і* q_2.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.

7. Метричні оцінки малих знаменників. З'ясуємо можливість виконання нерівності (73). Позначимо $r = r_1 + \ldots + r_n$, $\Lambda_k = (\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{mn,k})$, $(J, \Lambda_k) = j_1\lambda_1 + \ldots + j_{mn}\lambda_{mn,k}$, $J \in \mathcal{J}_{mn}$, $\vec{h}_{jk}$, $j \in \{1,\ldots,mn\}$, — деякий ненульовий стовпець матриці $\mathbf{N}^*(\lambda_{jk}, i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $\mathbf{N}(\lambda_{jk}, i\mu_k)$ (див. (4)), $H(\mu_k) := \det\left\| \lambda_{jk}^{q-1}\vec{h}_{jk}\right\|_{q=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,mn}$, де індекс j нумерує стовпці, а q — рядки,

$$\Delta_1(\mu_k, T) := \det\left\| \vec{h}_{jk}\left(\alpha_q\lambda_{jk}^{q-1} + \beta_q\lambda_{jk}^{q-1}\exp(\lambda_{jk}T) + \gamma_q I_q(\lambda_{jk})\right)\right\|_{q=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,mn}, \tag{78}$$

$$I_q(z) := \int_0^T t^{r_q}\exp(zt)dt = Q_q(z,T)\exp(zT) - Q_q(z,0), \quad q \in \{1,\ldots,n\}, \tag{79}$$

$$Q_q(z,T) := \sum_{l=1}^{r_q+1} \frac{(-1)^{l+1}r_q!}{(r_q - l + 1)!}\frac{T^{r_q-l+1}}{z^l}, \quad q \in \{1,\ldots,n\}. \tag{80}$$

Зауважимо, що визначники $\Delta(\mu_k, T)$ і $\Delta_1(\mu_k, T)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\Delta_1(\mu_k, T) = H(\mu_k)\Delta(\mu_k, T). \tag{81}$$

Як і в п. 4 з [21], на підставі (78)–(81) показуємо, що $\Delta(\mu_k, T)$ є квазімногочленом відносно змінної T і зображується формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{1}{H(\mu_k)}\sum_{J\in\mathcal{J}_{nm}} F_J(T)\exp((J,\Lambda_k)T), \tag{82}$$

де $F_J(T)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N_J, $N_J \leq mr$, $J \in \mathcal{J}_{mn}$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 2^{mn}. Для кожного $\mu_k \in \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ розглянемо функцію $D(\mu_k, \tau) := \Delta(\mu_k, \tau)$. Для квазімногочлена $D(\mu_k, \tau)$ введемо такі позначення:

$$E(D(\mu_k,\tau), \varepsilon, [0,T_0]) := \{\tau \in [0,T_0] \colon |D(\mu_k,\tau)| < \varepsilon\}, \quad T_0 > 0,$$

$$R := \sum_{J\in\Im_{mn}} (1 + N_J) \leq 2^{mn}(1 + mr), \tag{83}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\mathcal{J}_{mn}} |(J,\Lambda_k)|, \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}, \tag{84}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau\in[0,T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J\in\mathcal{J}_{mn}} \operatorname{Re}(J,\Lambda_k)\right)\tau\right), \quad \mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}, \tag{85}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1\le j\le R}\left\{|(\partial/\partial\tau)^{j-1}D(\mu_k,\tau)|_{\tau=0}(B(\mu_k))^{-j}\right\}, \quad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\vec{0}\}. \tag{86}$$

На підставі (84) та леми 2 отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in\mathcal{M}$ справджується оцінка

$$B(\mu_k)\le 1+\sum_{j=1}^{mn}|\lambda_{jk}|\le C_{18}\,(1+|\mu_k|)^{\kappa_1}, \quad C_{18}=mnC_6. \tag{87}$$

З леми 2 та нерівності (9) випливає оцінка

$$\min_{1\le j\le mn}\mathrm{Re}\lambda_{jk}\ge -C_6(1+|\mu_k|)^{\kappa_1} > -2^{\kappa_1}C_6|\mu_k|^{\kappa_1}, \tag{88}$$

яка справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in\mathcal{M},\ |\mu_k|\ge 1$. На підставі (85) та (88) отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in\mathcal{M},\ |\mu_k|\ge 1$,

$$\Psi(\mu_k)=\exp\left(2^{\kappa_1}mnC_6T_0\,|\mu_k|^{\kappa_1}\right). \tag{89}$$

Оцінимо тепер величину $G(\mu_k)$ із (86). В околі точки $t=0$ правильними є розвинення [11, с. 173]

$$\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)=\mathbf{I}_{mn}+\mathcal{N}(i\mu_k)t+\ldots+(\mathcal{N}(i\mu_k))^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+t^n\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,t), \tag{90}$$

де

$$\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mathcal{N}(i\mu_k))^{n+j}t^j}{(n+j)!}. \tag{91}$$

На підставі (10) – (12), (19) безпосередніми обчисленнями знаходимо

$$\exp(\mathcal{N}(i\mu_k)t)=\begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & t\mathbf{I}_m & \dfrac{t^2}{2}\mathbf{I}_m & \ldots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & t\mathbf{I}_m & \ldots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}+t^n\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,t)=$$

$$=\mathbf{E}_0(t)+t^n\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,t), \tag{92}$$

де матриця $\mathbf{E}_0(t)$ визначена формулою (37).

За допомогою формул (46), (47), (91) та (92) отримуємо

$$D(\mu_k,\tau)=\det\left\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)\tau\right)+\mathbf{\Gamma}\int_0^{\tau}\mathbf{R}(t)\exp\left(\mathcal{N}(i\mu_k)t\right)dt\right\|=$$

$$=\det\left(\|g_{jq}(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\tau)\mathbf{I}_m\|_{j,q=1}^{n}+\tau^n\mathbf{B}\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,\tau)+\mathbf{\Gamma}\int_0^{\tau}t^n\mathbf{R}(t)\widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k,t)dt\right)=$$

$$= \det \left(\| g_{jq}(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \tau) \mathbf{I}_m \|_{j,q=1}^n + \widehat{\mathcal{N}}(i\mu_k, \tau) \right), \tag{93}$$

де $\widehat{\mathcal{N}}(i\mu_k, \tau) = \tau^n \mathbf{B} \widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k, \tau) + \mathbf{\Gamma} \int\limits_0^\tau t^n \mathbf{R}(t) \widetilde{\mathcal{N}}(i\mu_k, t) dt$. З (91) випливає, що

$$\widehat{\mathcal{N}}(i\mu_k, \tau) = \left\| (\beta_j \tau^n \nu_{jq}(\tau) + \gamma_j \tau^{r_j+n} \omega_{jq}(\tau)) \mathbf{I}_m \right\|_{j,q=1}^n, \tag{94}$$

де $\nu_{jq}(\tau)$, $\omega_{jq}(\tau)$ — деякі функції, аналітичні в околі точки $\tau = 0$.

З (46), (93) та (94) випливає розвинення

$$D(\mu_k, \tau) = \Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \tau) + \overline{D}(\mu_k, \tau), \tag{95}$$

де $\overline{D}(\mu_k, \tau)$ — аналітична в околі точки $\tau = 0$ функція, яка має в цій точці нуль вищого порядку, ніж $\Delta_0(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \tau)$. З (55) та (95) випливає, що за умов (48), (49) виконуються рівності

$$\left. \frac{d^q D(\mu_k, \tau)}{d\tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < m\eta_0(\vec{j}), \\ (m\eta_0(\vec{j}))! B_2, & q = m\eta_0(\vec{j}). \end{cases} \tag{96}$$

З (84), (87) та (96) одержуємо, що для кожного $\mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\vec{0}\}$ справджується оцінка

$$G(\mu_k) \geq \frac{|B_2|(m\eta_0(\vec{j}))!}{(B(\mu_k))^{m\eta_0(\vec{j})+1}} \geq C_{19} (1 + |\mu_k|)^{-(m\eta_0(\vec{j})+1)\kappa_1}, \quad C_{19} = \frac{|B_2|(m\eta_0(\vec{j}))!}{(C_{18})^{m\eta_0(\vec{j})+1}}. \tag{97}$$

Теорема 6. *Якщо* $N_\xi \geq 2N$ *і виконуються умови* (48), (49), *то для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T \in [0, T_0]$, $T_0 > 0$, *нерівність* (73) *справджується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *якщо*

$$\sigma = 2^{\kappa_1} mnC_6T_0, \quad \eta > (m\eta_0(\vec{j}) + 1)\kappa_1 + (p/\theta_1 + 1)\left(2^{mn}(1 + mr) - 1\right), \tag{98}$$

де величина $\eta_0(\vec{j})$ *визначена формулою* (54), *а* θ_1 — *стала з формули* (2).

Доведення. Зафіксуємо вектор $\mu_k = \mu_{\bar{k}} \in \mathcal{M}$. Нехай $\varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_{\bar{k}}) := (1 + |\mu_{\bar{k}}|)^{-\eta} \exp(-\sigma |\mu_{\bar{k}}|^{\kappa_1})$. Згідно з лемою 2 з [7] виконується оцінка

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}(\mu_{\bar{k}}, \tau), \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_{\bar{k}}), [0, T_0]) \leq C_{20} B(\mu_{\bar{k}}) \left(\frac{4\varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_{\bar{k}}) \Psi(\mu_{\bar{k}})}{G(\mu_{\bar{k}})} \right)^{\frac{1}{R-1}}, \quad C_{20} = C_{17}(R, T_0). \tag{99}$$

На підставі (99), враховуючи (2), (9), (87), (89) та (97), отримуємо

$$\operatorname*{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathcal{D}(\mu_{\bar{k}}, \tau), \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0]) \leq$$

$$\leq C_{20} C_{18} (1 + |\mu_{\bar{k}}|)^{\kappa_1} \left(\frac{4(1 + |\mu_{\bar{k}}|)^{-\eta} \exp(nmC_1T_0|\mu_{\bar{k}}|^{\kappa_1})}{C_{19}(1 + |\mu_{\bar{k}}|)^{-(m\eta_0(\vec{j})+1)\kappa_1} \exp(\sigma|\mu_{\bar{k}}|^{\kappa_1})} \right)^{\frac{1}{R-1}} =$$

$$= 4^{1/(R-1)} C_{21} (1 + |\mu_{\bar{k}}|)^{\frac{(m\eta_0(\vec{j})+1)\kappa_1 - \eta}{R-1} + 1} \leq 4^{1/(R-1)+p} C_{21} D_1 |\bar{k}|^{\left(\frac{(m\eta_0(\vec{j})+1)\kappa_1 - \eta}{R-1} + 1 \right)\theta_1} =$$

$$= C_{22} |\bar{k}|^{-\left(\frac{\eta - (m\eta_0(\vec{j})+1)\kappa_1}{R-1} - 1 \right)\theta_1}. \tag{100}$$

Позначимо $z := \left(\dfrac{\eta - (m\eta_0(\vec{j}) + 1)\kappa_1}{R-1} - 1\right)\theta_1$. Підсумовуючи нерівність (100) за всіма $\mu_k \in \mathcal{M}$, отримуємо

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname*{mes}_{\mathbb{R}} E\Big(\mathcal{D}(\mu_k, \tau), \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0]\Big) \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} C_{22}|k|^{-z}, \tag{101}$$

де $z > ((p/\theta_1 + 1) - 1)\theta_1 > p$. Оскільки ряди в нерівності (101) є збіжними, то, згідно з лемою Бореля – Кантеллі [15], міра тих $\tau \in (0, T_0]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $E(\mathcal{D}(\mu_k, \tau), \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k), [0, T_0])$, дорівнює нулеві. Тобто нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| > \varepsilon_{\eta,\sigma}(\mu_k)$ виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in (0, T_0]$ та всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Оскільки $\mathcal{D}(\mu_k, T) = \Delta(\mu_k, T)$, то нерівність $|\Delta(\mu_k, T)| > (1 + |\mu_k|)^{-\eta} \exp(-\sigma|\mu_k|)$, де σ і η визначені у (98), виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$ та всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Теорему 6 доведено.

Зауваження 2. Якщо для λ-коренів рівняння (28) виконується умова

$$\mathrm{Re}\lambda_{jk} = 0, \quad j = \{1, \ldots, mn\}, \tag{102}$$

то теорема 6 є правильною при $\sigma = 0$. Цей факт доводиться аналогічно доведенню теореми 6 з урахуванням того, що за умови (102) $\Psi(\mu_k) = 1$, $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Зауваження 3. Теорему 6 можна поширити на деякі випадки, коли не виконується умова (49), зокрема коли коефіцієнти умов (5) є такими:

$$\alpha_j + \beta_j = 0, \quad \alpha_j^2 + \beta_j^2 \ne 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{103}$$

Покажемо це. За умов (103) на підставі (78), (81) та розвинень $\exp(\lambda_{jk}\tau) = 1 + \lambda_{jk}\tau + o(\tau)$, $j \in \{1, \ldots, mn\}$, отримуємо

$$\Delta(\mu_k, \tau) = \frac{1}{H(\mu_k)} \det \left\| \vec{h}_{jk} \left(\alpha_q \lambda_{jk}^{q-1} + \beta_q \lambda_{jk}^{q-1} + \beta_q \lambda_{jk}^{q}\tau + o(\tau)\right) \right\|_{q=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,mn} =$$

$$= \frac{1}{H(\mu_k)} \det \left\| \vec{h}_{jk} \left(\beta_q \lambda_{jk}^{q}\tau + \beta_q o(\tau)\right) \right\|_{q=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,mn} = \tau^{mn} \prod_{q=1}^{n} \beta_q^m \prod_{j=1}^{mn} \lambda_{jk} + o(\tau^{mn}). \tag{104}$$

Якщо в (64) $C_\lambda < 0$, то виконуються оцінки

$$|\lambda_{jk}| \ge |\mathrm{Re}\lambda_{jk}| \ge |C_\lambda||\mu_k|^{\varrho}, \quad j \in \{1, \ldots, mn\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{105}$$

З'ясуємо можливість виконання оцінки вигляду (105), коли в (64) $C_\lambda \ge 0$. Очевидно, що вільний член рівняння (28) має вигляд $\det \mathbf{A}_0(i\mu_k)/\det \mathbf{L}(i\mu_k)$, а з (7) випливає, що $\det \mathbf{A}_0(i\mu_k)$ є многочленом відносно змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$. Позначимо через $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_{\zeta_1}) \in \mathbb{R}^{\zeta_1}$ та $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_{\zeta_1}) \in \mathbb{R}^{\zeta_1}$ вектори, складені відповідно із дійсних та уявних частин коефіцієнтів полінома $\det \mathbf{A}_0(i\mu_k)$, де $\zeta_1 = \sum_{l=1}^{mN_0} C_{p+l+1}^{p}$ — кількість коефіцієнтів цього полінома.

Твердження 1. *Для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{\zeta_1}$) векторів $\vec{w}$ та довільного фіксованого $\vec{v}$ (або для майже всіх векторів $\vec{v}$ та довільного фіксованого $\vec{w}$) нерівність*

$$|\lambda_{jk}| \ge C_{23}|\mu_k|^{-2Nm - \kappa_1(mn-1) - p/\theta_1 - \varepsilon}, \quad C_{23} = 2^{-\kappa_1(mn-1)}C_2, \quad \varepsilon > 0,$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5 із [3] з урахуванням леми 1 та оцінок (2), (9) і (30).

Якщо $C_\lambda < 0$, то з (86), (104) і (105) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$

$$G(\mu_k) \geq C_{24}(mn)! \prod_{j=1}^{mn} |\lambda_{jk}| \left(B(\mu_k)\right)^{-mn-1} \geq C_{25} \left(1+|\mu_k|\right)^{mn\varrho-(mn+1)\kappa_1}, \qquad (106)$$

де $C_{24} = |C_\lambda|^{mn} \prod_{q=1}^{n} |\beta_q|^m$, $C_{25} = C_{24}(mn)!(C_{18})^{-mn-1}$. Якщо $C_\lambda \geq 0$, то на підставі твердження 1 та формул (86), (104) отримуємо, що для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}^{\zeta_1}$) векторів $\vec{w}$ та довільного фіксованого $\vec{v}$ (або для майже всіх векторів $\vec{v}$ та довільного фіксованого $\vec{w}$) оцінка

$$G(\mu_k) \geq C_{26} \left(1+|\mu_k|\right)^{-2Nm^2n-(m^2n^2+1)\kappa_1-mnp/\theta_1-\varepsilon}, \quad C_{26} = (mn)!(C_{18})^{-mn-1}(C_{23})^{mn}, \qquad (107)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$. Із викладеного вище випливає наступне твердження, яке доводиться за схемою доведення теореми 6 із урахуванням нерівностей (106), (107).

Твердження 2. *Нехай виконуються умови* (103). *Якщо в* (64) $C_\lambda < 0$, *то для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, *нерівність* (73) *справджується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *при*

$$\sigma = 2^{\kappa_1} mnC_6T_0, \quad \eta > (mn+1)\kappa_1 - mn\varrho + (p/\theta_1+1)\left(2^{mn}(1+mr)-1\right).$$

Якщо в (64) $C_\lambda \geq 0$, *то для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T \in (0, T_0]$, $T_0 > 0$, *та майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^{\zeta_1}$) *векторів* $\vec{w}$ *та довільного фіксованого* $\vec{v}$ (*або для майже всіх векторів* $\vec{v}$ *та довільного фіксованого* $\vec{w}$) *нерівність* (73) *справджується при*

$$\sigma = 2^{\kappa_1} mnC_6T_0, \quad \eta > 2Nm^2n + (m^2n^2+1)\kappa_1 + mnp/\theta_1 + (p/\theta_1+1)\left(2^{mn}(1+mr)-1\right)$$

для всіх (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Зауваження **4.** Нехай система рівнянь (4) є розв'язаною відносно старшої похідної за часовою змінною, тобто $\mathbf{L} = \mathbf{I}_m$ в системі рівнянь (4). Якщо при цьому система (4) є гіперболічною за Гордінгом [6, с. 148], то нерівність (64) виконується для деякого $C_\lambda \in \mathbb{R}$ при $\varrho = 0$, а якщо система (4) є параболічною за Шиловим [6, с. 130], то нерівність (64) виконується для деякого $C_\lambda < 0$ при $\varrho > 0$. Всі отримані вище результати у випадку $N_\xi > 2N$ безпосередньо переносяться, відповідно, на гіперболічні за Гордінгом та параболічні за Шиловим системи рівнянь і є новими.

8. Висновки. Отримані результати можна поширити на задачі для систем вигляду (4) з умовами

$$\alpha_j \vec{u}(t_j, x) + \beta_j \int_0^T t^{r_j} \vec{u}(t,x)dt = \vec{\varphi}_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n \leq T.$$

Література

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основних представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. механика и математика. – 1960. – **24**, № 5. – С. 58 – 73.
3. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592 – 1602.
4. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для систем рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 4. – С. 501 – 517.
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированной жидкости. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
7. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74 – 85.
8. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604 – 1613.
9. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 2. – С. 200 – 224.
10. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197 – 1208.
11. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
12. *Мегралиев Я. Т.* Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска – Лява с дополнительным интегральным условием // Сиб. журн. индустр. математики. – 2013. – **16**, № 1. – С. 75 – 83.
13. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с.
14. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1954. – **18**, № 1. – С. 3 – 50.
15. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
16. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 2. – С. 3 – 47.
17. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
18. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+xiv с.
19. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publ., Inc., 1954. – 180 p.
20. *Bouziani A., Merazga N.* Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral conditions // Electron. J. Different. Equat. – 2006. – № 115. – P. 1 – 18.
21. *Kuz A. M., Ptashnyk B. Yo.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable // Carpath. Math. Publ. – 2014. – **6**, № 2. – P. 282 – 299.
22. *Oskolkov A. P.* Nonlocal problems for the equations of Kelvin – Voight fluids and their e-approximations // J. Math. Sci. – 1997. – **87**, № 2. – P. 3393 – 3408.
23. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. – Utrecht etc.: VSP, 2003. – 224 p.
24. *Shruti A. Dubey.* Numerical solution for nonlocal Sobolev-type differential equations // Electron. J. Different. Equat. – 2010. – **19**. – P. 75 – 83.

Одержано 22.04.16