УДК 517.5

Ю. Престін (Ін-т математики, Ун-т м. Любек, Німеччина),
В. В. Савчук, А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ НАБЛИЖЕННЯ 2π-ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРАМИ ТЕЙЛОРА – АБЕЛЯ – ПУАССОНА*

We obtain direct and inverse theorems on the approximation of 2π-periodic functions by Taylor – Abel – Poisson operators in the integral metric.

Получены прямые и обратные теоремы приближения 2π-периодических функций операторами Тейлора – Абеля – Пуассона в интегральной метрике.

Відомо, що довільну функцію $f \in L_p$, $f \not\equiv \mathrm{const}$, можна наблизити її середніми Абеля – Пуассона $f(\varrho, \cdot)$ з точністю, не кращою за $1-\varrho$. Це пов'язано з так званою властивістю насичення цього методу, з якої, зокрема, випливає, що для будь-якої функції $f \in L_p$ виконання співвідношення $\|f - f(\varrho, \cdot)\|_p = o(1-\varrho)$, $\varrho \to 1-$, можливе лише у тривіальному випадку, коли $f \equiv \mathrm{const}$. Тому жодними додатковими обмеженнями на гладкість функції досягнути порядку наближення, кращого за $1-\varrho$, не можна. У зв'язку з цим природним є питання про відшукання лінійного оператора, подібного за своїми властивостями до оператора Пуассона, який би при цьому враховував також гладкісні властивості функцій і був у певному сенсі для заданого функціонального класу найкращим. У роботі [1] для класів згорток з ядрами, що породжуються моментними послідовностями, було запропоновано загальний спосіб побудови таких операторів, що враховують властивості таких ядер, а отже, і властивості функцій із відповідних класів.

Один із прикладів таких операторів — оператори $A_{\varrho,r}$, які є основним предметом вивчення у даній роботі. Оператори $A_{\varrho,r}$ уперше вивчалися в [2], де в термінах цих операторів було сформульовано структурну характеристику класів Гарді – Ліпшиця $H^r_p \operatorname{Lip} \alpha$ функцій однієї змінної, голоморфних в одиничному крузі комплексної площини. В роботі [3] в термінах наближень такими операторами у просторах S^p соболєвського типу було сформульовано конструктивний опис класів функцій багатьох змінних, узагальнені похідні яких належать класам S^pH_ω. Подібні оператори поліноміального типу вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [4 – 7]). Зокрема, в [4] було знайдено порядок збіжності відомих середніх Ейлера та Тейлора до функцій із деяких підмножин класів Ліпшиця $\operatorname{Lip} \alpha$ в рівномірній метриці. В [6] отримано аналогічні результати для середніх Тейлора в інтегральній метриці.

У цій роботі ми продовжуємо вивчення апроксимативних властивостей операторів $A_{\varrho,r}$. Зокрема, встановлено зв'язок цих операторів із відомими операторами $L_{\varrho,r}$ та $B_{\varrho,r}$, які розглядались, відповідно, в роботах [8] та [9], а також отримано прямі та обернені теореми наближення операторами $A_{\varrho,r}$ у термінах K-функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними.

* Виконано за часткової підтримки програми FP7-People-2011-IRSES, номер проекту 295164 (EUMLS: EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

Нехай $L_p = L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty,$ — простір усіх функцій f, заданих на торі $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$, зі звичайною нормою

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Далі, нехай $f \in L_1$ і коефіцієнти Фур'є f задаються рівностями

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikt} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо через $f(\varrho, x),\ 0 \le \varrho < 1,$ інтеграл Пуассона (оператор Пуассона) функції f, тобто

$$f(\varrho, x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) P(\varrho, x - t) dt, \tag{1}$$

де $P(\varrho, t) = \dfrac{1 - \varrho^2}{|1 - \varrho e^{it}|^2}$ — ядро Пуассона.

Р. Лейс [8] розглянув перетворення вигляду

$$L_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{d^k f(x)}{dn^k} \frac{(1-\varrho)^k}{k!}, \quad r \in \mathbb{N},$$

де

$$\frac{df(x)}{dn} = - \left. \frac{\partial f(\varrho, x)}{\partial \varrho} \right|_{\varrho = 1}$$

— похідна по нормалі функції f, і показав, що коли справджується співвідношення

$$\|f(\varrho, \cdot) - L_{\varrho,r}(f)(\cdot)\|_p = O\left(\frac{(1-\varrho)^r}{r!} \right), \quad \varrho \to 1-,$$

то $d^r f / dn^r \in L_p,\ 1 < p < \infty$.

Згодом П. Л. Бутцер і Г. Суноучі [9] розглянули перетворення

$$B_{\varrho,r}(f)(x) := \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{\frac{k+1}{2}} f^{\{k\}}(x) \frac{(-\ln \varrho)^k}{k!},$$

де

$$f^{\{k\}}(x) = \begin{cases} f^{(k)}, & k \in 2\mathbb{Z}_+, \\ \widetilde{f}^{(k)}, & k - 1 \in 2\mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Ними доведено таке твердження.

Теорема A [9]. *Нехай* $f \in L_p,\ 1 \le p < \infty$. *Тоді:*

i) *якщо похідні* $f^{\{j\}},\ j = 0, 1, \ldots, r-1$, *є абсолютно неперервними і* $f^{\{r\}} \in L_p$, *то*

$$\|f(\varrho, \cdot) - B_{\varrho,r}(f)(\cdot)\|_p = O\left(\frac{(-\ln \varrho)^r}{r!}\right), \quad \varrho \to 1-; \tag{2}$$

ii) *якщо похідні* $f^{\{j\}},\ j = 0, 1, \ldots, r-2,\ r \ge 2$, *є абсолютно неперервними,* $f^{\{r-1\}} \in L_p$, $1 < p < \infty$, *і має місце* (2), *то* $\widetilde{f}^{\{r-1\}}$ *є абсолютно неперервною і* $\widetilde{f}^{\{r\}} \in L_p$.

Наведені результати — це апроксимаційні теореми наближення операторами $L_{\varrho,r}$ та $B_{\varrho,r}$ у просторі L_p. Зокрема, результат Р. Лейса і твердження ii) теореми A — це обернені теореми, а твердження i) — пряма теорема. Прямі та обернені теореми є центральними теоремами теорії наближень. Вони вивчалися багатьма авторами. Тут згадаємо лише монографії [10 – 12], в яких викладено основоположні результати з цієї тематики.

Наведені вище результати спираються на дослідження, проведені в [13, 14], прямих та обернених теорем наближення напівгруп обмежених лінійних однопараметричних перетворень $\{T(t)\}$ банахового простору X в самого себе за допомогою „многочленів Тейлора" $\sum_{k=0}^{r-1}(t^k/k!)A^k f$, де Af — деякий оператор напівгрупи $\{T(t)\}$.

Перетворення $A_{\varrho,r}$, розглянуті в даній роботі, подібні до перетворень $L_{\varrho,r}$ та $B_{\varrho,r}$, оскільки також будуються за принципом „многочленів Тейлора". Вони означаються таким чином.

Для довільних $\varrho \in [0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$ та $f \in L_1$ позначимо

$$A_{\varrho,r}(f)(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{|k|,r}(\varrho)\widehat{f}_k e^{ikt}, \tag{3}$$

де при $k = 0, 1, \ldots, r-1$ числа $\lambda_{k,r}(\varrho) \equiv 1$ і

$$\lambda_{k,r}(\varrho) := \sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j}, \quad k = r, r+1, \ldots, \quad \varrho \in [0, 1]. \tag{4}$$

Перетворення $A_{\varrho,r}$ можна розглядати як лінійний оператор простору L_1 в себе. Дійсно, $\lambda_{k,r}(0) = 0$ і при всіх $k = r, r+1, \ldots$ та $\varrho \in (0, 1)$ маємо

$$\sum_{j=0}^{r-1} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j} \le r q^k k^{r-1}, \quad \text{де} \quad 0 < q := \max\{1-\varrho, \varrho\} < 1.$$

Тому для довільної функції $f \in L_1$ при всіх $0 < \varrho < 1$ ряд у правій частині співвідношення (3) мажорується збіжним рядом $2r\|f\|_1 \sum_{k=r}^{\infty} q^k k^{r-1}$.

Зазначимо, що якщо функція f належить L_1 і має ряд Фур'є степеневого типу, тобто $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}$, то $f(\varrho, x) = f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$, $z = \varrho e^{ix}$.

Зв'язок операторів $A_{\varrho,r}$ та „многочленів Тейлора" видно з такого твердження.

Лема 1. *Нехай* f *належить* L_1. *Тоді для довільних чисел* $r \in \mathbb{N}$, $\varrho \in [0, 1)$ *та* $x \in \mathbb{T}$

$$A_{\varrho,r}(f)(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial^k f(\varrho, x)}{\partial \varrho^k} \frac{(1-\varrho)^k}{k!}. \tag{5}$$

Доведення. Поставимо у відповідність функції f дві функції

$$f_1(z) := \frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k z^k \qquad \text{та} \qquad f_2(z) := \frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_{-k} z^k, \tag{6}$$

голоморфні у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

З леми 4 роботи [2] випливає, що для довільних $z \in \overline{\mathbb{D}}$ виконуються рівності

$$\frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \widehat{f}_k z^k + \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_{k,r}(\varrho) \widehat{f}_k z^k = \frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} z^k f_1^{(k)}(\varrho z) \, \frac{(1-\varrho)^k}{k!} \tag{7}$$

та

$$\frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \widehat{f}_{-k} \overline{z}^k + \sum_{k=r}^{\infty} \lambda_{k,r}(\varrho) \widehat{f}_{-k} \overline{z}^k = \frac{\widehat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{r-1} \overline{z}^k f_2^{(k)}(\varrho \overline{z}) \, \frac{(1-\varrho)^k}{k!}, \tag{8}$$

де при $r = 1$ сума $\sum_{k=1}^{0}$ покладається рівною нулю. Насправді в [2] співвідношення вигляду (7) та (8) були встановлені для $z \in \mathbb{D}$, але дані обмеження не є важливими.

Додавши ці дві рівності при $z = e^{ix}$ з урахуванням співвідношення

$$e^{ikx} f_1^{(k)}\left(\varrho e^{ix}\right) + e^{-ikx} f_2^{(k)}\left(\varrho e^{-ix}\right) = \frac{\partial^k f(\varrho, x)}{\partial \varrho^k}, \tag{9}$$

отримаємо (5), що і доводить лему.

Сформулюємо тепер прямі та обернені теореми наближення операторами $A_{\varrho,r}$ у термінах K-функціоналів функцій, породжених їх радіальними похідними. Наведемо необхідні означення. Якщо для даної функції $f \in L_1$ і натурального n існує функція $g \in L_1$ така, що

$$\widehat{g}_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |k| < n, \\ \dfrac{|k|!}{(|k|-n)!} \, \widehat{f}_k & \text{при} \quad |k| \geq n, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z},$$

то будемо казати, що функція f має *радіальну похідну* g порядку n, яку позначатимемо через $f^{[n]}$.

Термін „радіальна похідна” ми вибрали з огляду на такий факт.

Якщо функція $f^{[r]}$ належить L_1, то її інтеграл Пуассона можна зобразити у вигляді співвідношення

$$f^{[r]}(\varrho, x) = (f(\varrho, \cdot))^{[r]}(x) = \varrho^r \frac{\partial^r f(\varrho, x)}{\partial \varrho^r} \quad \forall x \in \mathbb{T}, \quad \varrho \in [0,1). \tag{10}$$

Звідси за відомими теоремами про граничні значення інтеграла Пуассона (див., наприклад, [15, с. 27]) $f^{[r]}(x) = \lim_{\varrho \to 1-} f^{[r]}(\varrho, x)$ для майже всіх $x \in \mathbb{T}$.

У справедливості співвідношення (10) легко переконатися шляхом почленного диференціювання по змінній ϱ розкладу інтеграла Пуассона в рівномірно збіжний ряд

$$f(\varrho, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varrho^{|k|} \widehat{f}_k e^{ikx} \quad \forall \varrho \in [0,1), \quad x \in \mathbb{T}. \tag{11}$$

З означення радіальної похідної, зокрема, випливає таке правило диференціювання:

якщо $f(x) = \sum_{|k|\le m} \widehat{f}_k e^{ikx}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$f^{[n]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad m < n, \\ \sum_{n\le|k|\le m} \dfrac{|k|!}{(|k|-n)!} f_k e^{ikx}, & \text{якщо} \quad m \ge n. \end{cases} \tag{12}$$

У просторі L_p K-функціоналом функції f (див., наприклад, [11], гл. 6), породженим її радіальної похідною порядку n, називають величину

$$K_n(\delta, f)_p := \inf\left\{ \|f-h\|_p + \delta^n \left\|h^{[n]}\right\|_p : h^{[n]} \in L_p \right\}, \quad \delta > 0.$$

Нехай, далі, $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, — довільна невід'ємна функція, яка задовольняє такі умови:

1) $\omega(t)$ неперервна на $[0,1]$;

2) $\omega(t) \uparrow$;

3) $\omega(t) \ne 0$ для всіх $t \in (0,1]$;

4) $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$;

а також відомі умови Зигмунда – Барі – Стєчкіна (див., наприклад, [16])

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\, dt = O(\omega(\delta)), \quad \delta > 0, \tag{$\mathcal{Z}$}$$

$$\int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^{n+1}}\, dt = O\left(\frac{\omega(\delta)}{\delta^n}\right), \quad \delta > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{$\mathcal{Z}_n$}$$

Основними результатами даної роботи є дві наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай* $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$, *і функція* $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, *задовольняє умови* $1-4$ *та* $(\mathcal{Z})$. *Тоді якщо*

$$K_n\left(\delta, f^{[r-n]}\right)_p = O(\omega(\delta)), \quad \delta \to 0+, \tag{13}$$

то

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p = O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-. \tag{14}$$

Теорема 2. *Нехай* $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n \le r$, *і функція* $\omega(t)$, $t \in [0,1]$, *задовольняє умови* $1-4$, $(\mathcal{Z})$ *та* $(\mathcal{Z}_n)$. *Тоді якщо виконується співвідношення* (14), *то* $f^{[r-n]} \in$ $\in L_p$ *і співвідношення* (13) *також виконується.*

Зазначимо, що у випадку, коли функція $\omega(t)$ степенева: $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, теореми 1, 2 було анонсовано в [17].

***Зауваження* 1.** При даному $n \in \mathbb{N}$ умова $(\mathcal{Z}_n)$ забезпечує виконання співвідношення $\liminf_{\delta\to 0+}(\delta^{-n}\omega(\delta)) > 0$ або, що рівносильно, $(1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho) \gg (1-\varrho)^r$ при $\varrho \to 1-$. Тому за умови $(\mathcal{Z}_n)$ величина у правій частині (14) спадає до нуля при $\varrho \to 1-$ не швидше, ніж функція $(1-\varrho)^r$. Зазначимо, що виконання співвідношення $\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p = o\left((1-\varrho)^r\right)$, $\varrho \to 1-$, можливе лише у тривіальному випадку, коли $f(x) = \sum_{|k|\le r-1} \widehat{f}_k e^{ikx}$, для якого дані теореми виконуються. Цей факт пов'язаний з явищем насичення методу наближення, породженого оператором $A_{\varrho,r}$. Зокрема, в [2] показано, що оператор $A_{\varrho,r}$ породжує лінійний метод наближення голоморфних функцій, який є насиченим у просторі H_p з порядком насичення $(1-\varrho)^r$ та класом насичення $H_p^{r-1}\,\mathrm{Lip}\,1$.

Перед доведенням теорем 1 і 2 наведемо низку допоміжних тверджень. Для довільних $f \in L_1$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \varrho < 1$ та $r = 0, 1, 2, \ldots$ позначимо

$$M_p(\varrho, f, r) := \varrho^r \left\| \frac{\partial^r f(\varrho, \cdot)}{\partial \varrho^r} \right\|_p = \left\| (f(\varrho, \cdot))^{[r]}(\cdot) \right\|_p. \tag{15}$$

Лема 2. *Нехай $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$. Тоді для довільних чисел $n \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in [1/2, 1)$*

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p(\varrho, f, n) \le K_n(1-\varrho, f)_p \le$$

$$\le \|f - A_{\varrho,n}(f)\|_p + \frac{4^n - 1}{3}(1-\varrho)^n M_p(\sqrt{\varrho}, f, n).$$

Доведення. Насамперед зауважимо, що лема є тривіальною у випадку, коли f — тригонометричний поліном порядку не більше ніж $n-1$, тобто коли $f(x) = \sum_{|k| \le n-1} \widehat{f}_k e^{ikx}$, а також у випадку, коли $\varrho = 0$. Тому в доведенні ці два випадки не розглядаємо.

Нехай g — така довільна функція, що $g^{[n]} \in L_p$.

Оскільки

$$\frac{1-\varrho^2}{|1 - e^{i(x-t)}\varrho|^2} = \frac{1}{1 - e^{i(x-t)}\varrho} + \frac{1}{1 - e^{-i(x-t)}\varrho} - 1,$$

то на основі (1) для довільних чисел $\varrho \in [0, 1)$ та $x \in \mathbb{T}$ маємо

$$\frac{\partial^n f(\varrho, x)}{\partial \varrho^n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t) - g(t)) \frac{\partial^n}{\partial \varrho^n}\left(\frac{1-\varrho^2}{|1 - e^{i(x-t)}\varrho|^2}\right) dt + \frac{\partial^n g(\varrho, x)}{\partial \varrho^n} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t) - g(t)) \left(\frac{e^{ir(x-t)}}{(1 - e^{i(x-t)}\varrho)^{n+1}} + \frac{e^{-ir(x-t)}}{(1 - e^{-i(x-t)}\varrho)^{n+1}}\right) dt + \frac{\partial^n g(\varrho, x)}{\partial \varrho^n} =$$

$$= \frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(t) - g(t))\, \mathrm{Re}\, \frac{e^{ir(x-t)}}{(1 - e^{i(x-t)}\varrho)^{n+1}} dt + \frac{\partial^n g(\varrho, x)}{\partial \varrho^n}.$$

Звідси, виконавши заміну змінних інтегрування, за інтегральною нерівністю Мінковського отримаємо оцінку

$$\left\| \frac{\partial^n f(\varrho, \cdot)}{\partial \varrho^n} \right\|_p \le \frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1 - \varrho e^{it}|^{n+1}} \|f - g\|_p + \left\| \frac{\partial^n g(\varrho, \cdot)}{\partial \varrho^n} \right\|_p \le$$

$$\le \frac{2n!}{(1-\varrho)^n} \|f - g\|_p + \left\| \frac{\partial^n g(\varrho, \cdot)}{\partial \varrho^n} \right\|_p.$$

Враховуючи співвідношення (10), (15) та нерівність $\|g^{[n]}(\varrho, \cdot)\|_p \le \|g^{[n]}\|_p$, бачимо, що для будь-якого $\varrho \in (0, 1)$

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p(\varrho,f,n) \le \|f-g\|_p + (1-\varrho)^n \left\|g^{[n]}\right\|_p.$$

Беручи інфімум по всіх функціях g, для яких $g^{[n]} \in L_p$, робимо висновок, що

$$\frac{1}{2n!}\,(1-\varrho)^n M_p(\varrho,f,n) \le K_n(1-\varrho,f)_p.$$

З іншого боку, з означення K-функціонала випливає, що

$$K_n(1-\varrho,f)_p \le \|f-A_{\varrho,n}(f)\|_p + (1-\varrho)^n \left\|(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}\right\|_p. \qquad (16)$$

Внаслідок (5) та (10)

$$(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot)}{\varrho^k k!}\,(1-\varrho)^k\right)^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{((f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot))^{[n]}(x)}{\varrho^k k!}\,(1-\varrho)^k.$$

Оскільки для довільних натуральних чисел k та n

$$\left((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot)\right)^{[k]}(x) = \left((f(\varrho,\cdot))^{[k]}(\cdot)\right)^{[n]}(x), \qquad (17)$$

то

$$(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot)\right)^{[k]}(x)}{\varrho^k k!}\,(1-\varrho)^k.$$

Звідси отримуємо

$$\left\|(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}\right\|_p \le \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\left\|((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}\right\|_p}{\varrho^k k!}\,(1-\varrho)^k. \qquad (18)$$

Згідно з означенням інтеграла Пуассона для довільного $k = 0,1,\ldots,r-1$ маємо

$$\left((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot)\right)^{[k]}(x) = \left(\sum_{|j|\ge n} \frac{|j|!}{(|j|-n)!}\,\widehat{f}_j \varrho^{\frac{|j|}{2}} e^{ijx} \varrho^{\frac{|j|}{2}}\right)^{[k]}(x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(\sqrt{\varrho},\cdot)\right)^{[n]}(t) P(\sqrt{\varrho}, t-\cdot)dt\right)^{[k]}(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(\sqrt{\varrho},\cdot)\right)^{[n]}(t) \sum_{|\nu|\ge k} \frac{|\nu|!}{(|\nu|-k)!}\,\varrho^{\frac{|\nu|}{2}} e^{i\nu(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(\sqrt{\varrho},\cdot)\right)^{[n]}(t+x) \sum_{|\nu|\ge k} \frac{|\nu|!}{(|\nu|-k)!}\,\varrho^{\frac{|\nu|}{2}} e^{i\nu t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(\sqrt{\varrho},\cdot)\right)^{[n]}(t+x) \left(\tau^k \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} P(\tau,t)\right)\Bigg|_{\tau=\sqrt{\varrho}} dt.$$

При $k=0$ за інтегральною нерівністю Мінковського одержуємо

$$\left\|((f(\varrho,\cdot))^{[n]}(\cdot))^{[k]}\right\|_p = \left\|(f(\varrho,\cdot))^{[n]}\right\|_p \leq$$

$$\leq M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|P(\sqrt{\varrho},t)|dt = M_p(\sqrt{\varrho},f,n). \tag{19}$$

Якщо ж $k=1,2,\ldots,$ то

$$\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\,P(\tau,t)=\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\left(\frac{1}{1-\tau e^{it}}+\frac{\tau e^{-it}}{1-\tau e^{-it}}\right)=\frac{k!e^{ikt}}{(1-\tau e^{it})^{k+1}}+\frac{k!e^{-ikt}}{(1-\tau e^{-it})^{k+1}}.$$

Звідси аналогічно отримуємо

$$\left\|(f^{[n]}(\varrho,\cdot))^{[k]}\right\|_p \leq M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\left(\tau^k\,\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\,P(\tau,t)\right)\Big|_{\tau=\sqrt{\varrho}}\right|dt \leq$$

$$\leq 2k!M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-\sqrt{\varrho}e^{it}|^{k+1}} \leq M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\,\frac{2^k k!}{(1-\varrho)^k}. \tag{20}$$

Об’єднуючи співвідношення (18) – (20), бачимо, що для довільного $\varrho\in[1/2,1)$

$$\int\limits_\varrho^1\left\|(A_{\varrho,n}(f))^{[n]}\right\|_p \leq M_p(\sqrt{\varrho},f,n)+M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\sum_{k=1}^{n-1}4^k = M_p(\sqrt{\varrho},f,n)\,\frac{4^n-1}{3}. \tag{21}$$

З огляду на співвідношення (21) та (16) робимо висновок, що виконується нерівність

$$K_n(1-\varrho,f)_p \leq \|f-A_{\varrho,n}(f)\|_p+\frac{4^n-1}{3}(1-\varrho)^n M_p(\sqrt{\varrho},f,n),$$

яка доводить лему 2.

Лема 3. *Нехай $r\in\mathbb{N}$, $1\leq p\leq\infty$ і $\varrho\in[1/2,1)$. Тоді для довільної функції $f\in L_p$*

$$\|(A_{\varrho,r}(f))^{[r]}\|_p \leq C_r\,\frac{\|f\|_p}{(1-\varrho)^r}, \tag{22}$$

де стала C_r залежить лише від r.

Доведення. На підставі (10) для довільної функції $f\in L_p$ при всіх $x\in\mathbb{T}$ маємо

$$(f(\varrho,\cdot))^{[r]}(x)=\frac{\varrho^r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\frac{\partial^r}{\partial\varrho^r}\left(\frac{1-\varrho^2}{|1-e^{i(x-t)}\varrho|^2}\right)dt=$$

$$=\frac{r!\varrho^r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\left(\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{r+1}}+\frac{e^{-ir(x-t)}}{(1-e^{-i(x-t)}\varrho)^{r+1}}\right)dt=$$

$$=\frac{r!\varrho^r}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{ir(x-t)}}{(1-e^{i(x-t)}\varrho)^{r+1}}dt.$$

Виконуючи заміну змінних інтегрування, за інтегральною нерівністю Мінковського отримуємо

$$M_p\left(\varrho, f, r\right) \le \frac{r!}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-\varrho e^{it}|^{r+1}} \, \|f\|_p \le \frac{2r!}{(1-\varrho)^r} \, \|f\|_p. \tag{23}$$

Об'єднуючи останнє співвідношення та співвідношення (21) при $n = r$, робимо висновок, що

$$\|(A_{\varrho,r}(f))^{[r]}\|_p \le M_p(\sqrt{\varrho}, f, r) \, \frac{4^r-1}{3} \le \frac{2r!(4^r-1)}{3(1-\sqrt{\varrho})^r} \, \|f\|_p \le \frac{r!\left(2^{3r+1}-2^{r+1}\right)}{3} \, \frac{\|f\|_p}{(1-\varrho)^r}.$$

Лема 4. *Нехай $r \in \mathbb{N}$ і $0 \le \varrho < 1$. Тоді для довільної функції $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, такої, що*

$$\int\limits_{\varrho}^{1} \left\| \frac{\partial^r f(\zeta, \cdot)}{\partial \zeta^r} \right\|_p (1-\zeta)^{r-1} d\zeta < \infty, \tag{24}$$

при майже всіх $x \in \mathbb{T}$ справджується рівність

$$f(x) - A_{\varrho,r}(f)(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{\varrho}^{1} \frac{\partial^r f(\zeta, x)}{\partial \zeta^r} (1-\zeta)^{r-1} d\zeta. \tag{25}$$

Доведення. При фіксованих $r \in \mathbb{N}$ та $0 \le \varrho < 1$ інтеграл у правій частині (25) визначає деяку функцію $F(x)$. На підставі (24) та інтегральної нерівності Мінковського робимо висновок, що функція F належить простору L_p. Знайдемо коефіцієнти Фур'є функції F і порівняємо їх з коефіцієнтами Фур'є функції $G := f - A_{\varrho,r}(f)$. Оскільки при $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^r f(\zeta, x)}{\partial \zeta^r} = \sum_{|k| \ge r} \frac{|k|!}{(|k|-r)!} \, \widehat{f}_k \zeta^{|k|-r} e^{ikx},$$

то $\widehat{F}_k = 0$, якщо $|k| < r$. Якщо ж $|k| \ge r$, то, інтегруючи частинами, бачимо, що

$$\widehat{F}_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} dt = \widehat{f}_k \sum_{j=r}^{|k|} \binom{|k|}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{|k|-j}. \tag{26}$$

З іншого боку, якщо $|k| < r$, то коефіцієнти Фур'є $\widehat{G}_k$ функції G дорівнюють нулю. Якщо ж $|k| \ge r$, то з огляду на рівність

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{k-j} = ((1-\varrho)+\varrho)^k = 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

бачимо, що

$$\widehat{G}_k = (1 - \lambda_{|k|,r}(\varrho)) \widehat{f}_k = \widehat{f}_k \sum_{j=r}^{|k|} \binom{|k|}{j} (1-\varrho)^j \varrho^{|k|-j}.$$

Таким чином, при всіх $k \in \mathbb{Z}$ маємо $\widehat{F}_k = \widehat{G}_k$. Тому при майже всіх $x \in \mathbb{T}$ виконується рівність (25).

***Доведення теореми* 1.** Нехай функція f така, що $f^{[r-n]} \in L_p$ і виконується співвідношення (13). Застосуємо першу нерівність із леми 2 до функції $f^{[r-n]}$. З огляду на (10) та (15) отримаємо

$$\frac{1}{2n!}(1-\varrho)^n M_p\left(\varrho, f, r\right) \leq K_n\left(1-\varrho, f^{[r-n]}\right)_p.$$

Звідси

$$M_p\left(\varrho, f, r\right) \leq C\frac{\omega(1-\varrho)}{(1-\varrho)^n}, \quad \varrho \to 1- . \tag{27}$$

Використовуючи співвідношення (15), (27) та умову $(\mathscr{Z})$, а також інтегральну нерівність Мінковського, маємо

$$\int\limits_{\varrho}^{1}\left\|\frac{\partial^r f(\zeta,\cdot)}{\partial\zeta^r}\right\|_p (1-\zeta)^{r-1}\,d\zeta \leq \int\limits_{\varrho}^{1} M_p(\zeta, f, r)\frac{(1-\zeta)^{r-1}}{\zeta^r}\,d\zeta \leq$$

$$\leq 2^r C(1-\varrho)^{r-n}\int\limits_{\varrho}^{1}\frac{\omega(1-\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta = O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-, \tag{28}$$

тобто при майже всіх $x \in \mathbb{T}$ виконується співвідношення (25). Тоді на підставі (25), застосовуючи інтегральну нерівність Мінковського та (28), отримуємо оцінку (14):

$$\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p \leq \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{\varrho}^{1} M_p(\zeta, f, r)\,\frac{(1-\zeta)^{r-1}}{\zeta^r}\,d\zeta =$$

$$= O\left((1-\varrho)^{r-n}\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1- .$$

***Доведення теореми* 2.** Насамперед зазначимо, що для довільної функції $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \leq \infty$, при будь-яких фіксованих $s, r \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in (0,1)$

$$\left\|A^{[s]}_{\varrho,r}(f)\right\|_p = \left\|\sum_{|k|\geq s}\frac{|k|!}{(|k|-s)!}\,\omega_{|k|}(\varrho)\widehat{f}_k e^{ikt}\right\|_p \leq$$

$$\leq 2r\|f\|_p\left(C + \sum_{k\geq\max\{s,r\}} q^k k^{s+r-1}\right) < \infty,$$

де $0 < q = \max\{1-\varrho, \varrho\} < 1$.

Позначимо $\varrho_k := 1 - 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, і $A_k := A_k(f) := A_{\varrho_k,r}(f)$. Для будь-яких $x \in \mathbb{T}$ та $s \in \mathbb{N}$ розглянемо ряд

$$A^{[s]}_0(f)(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A^{[s]}_k(f)(x) - A^{[s]}_{k-1}(f)(x)\right). \tag{29}$$

З огляду на означення оператора $A_{\varrho,r}$ бачимо, що для довільних $\varrho_1, \varrho_2 \in [0,1)$ та $r \in \mathbb{N}$

$$A_{\varrho_1,r}\left(A_{\varrho_2,r}(f)\right) = A_{\varrho_2,r}\left(A_{\varrho_1,r}(f)\right).$$

За лемою 3 та співвідношенням (14) при всіх $k \in \mathbb{N}$ та $s \in \mathbb{N}$

$$\left\|A^{[s]}_k - A^{[s]}_{k-1}\right\|_p = \left\|A^{[s]}_k(f - A_{k-1}(f)) - A^{[s]}_{k-1}(f - A_k(f))\right\|_p \leq$$

$$\le \left\| A_k^{[s]}(f - A_{k-1}(f)) \right\|_p + \left\| A_{k-1}^{[s]}(f - A_k(f)) \right\|_p \le$$

$$\le C_s \frac{\|f - A_{k-1}(f)\|_p}{(1-\varrho_k)^s} + C_s \frac{\|f - A_k(f)\|_p}{(1-\varrho_{k-1})^s} =$$

$$= O\left(\frac{\omega(1-\varrho_{k-1})}{(1-\varrho_k)^{s-r+n}} \right) + O\left(\frac{\omega(1-\varrho_k)}{(1-\varrho_{k-1})^{s-r+n}} \right), \quad k \to +\infty. \tag{30}$$

Тому для будь-якого $s \le r - n$

$$\left\| A_k^{[s]} - A_{k-1}^{[s]} \right\|_p = O\left(\omega(1-\varrho_{k-1})\right) = O\left(\omega(2^{-(k-1)})\right), \quad k \to +\infty. \tag{31}$$

Розглянемо суму $\sum_{k=1}^N \omega(2^{-(k-1)})$, $N \in \mathbb{N}$. Враховуючи монотонність функції ω та умову $(\mathcal{Z})$, бачимо, що при всіх $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^N \omega(2^{-(k-1)}) \le \omega(1) + \int_1^N \omega(2^{-(t-1)})dt = \omega(1) + \frac{1}{\ln 2} \int_{2^{-N+1}}^1 \frac{\omega(\tau)}{\tau} d\tau \le C\omega(1) < \infty. \tag{32}$$

Об'єднуючи співвідношення (31) та (32), робимо висновок, що при всіх $1 \le p \le \infty$ ряд у (29) збігається за нормою простору L_p. Тому на підставі теореми Банаха – Алаоглу для довільного $s = 0, 1, \ldots, r-n$ існує підпослідовність

$$S_{N_j}^{[s]}(x) = A_0^{[s]}(f)(x) + \sum_{k=1}^{N_j} (A_k^{[s]}(f)(x) - A_{k-1}^{[s]}(f)(x)), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

частинних сум цього ряду, яка збігається до деякої функції $g \in L_p$ майже скрізь на $\mathbb{T}$ при $j \to +\infty$.

Переконаємось, що $g = f^{[s]}$. Для цього знайдемо коефіцієнти Фур'є функції g. Для довільного фіксованого $k \in \mathbb{Z}$ при всіх $j = 1, 2, \ldots$ маємо

$$\widehat{g}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{N_j}^{[s]}(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(t) - S_{N_j}^{[s]}(t)) e^{-ikt} dt.$$

Оскільки послідовність $\left\{ S_{N_j}^{[s]} \right\}_{j=1}^\infty$ збігається майже скрізь на $\mathbb{T}$ до функції g, то другий інтеграл у правій частині останнього співвідношення прямує до нуля при $j \to +\infty$. Внаслідок (33) та означення радіальної похідної при $|k| < s$ перший інтеграл дорівнює нулю, а при всіх $|k| \ge s$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{N_j}^{[s]}(t) e^{-ikt} dt = \lambda_{|k|,r} \left(1 - 2^{-N_j}\right) \frac{|k|!}{(|k|-s)!} \widehat{f}_k \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{|k|!}{(|k|-s)!} \widehat{f}_k.$$

Таким чином, дійсно має місце рівність $g = f^{[s]}$. Отже, для функції f та всіх $s = 0, 1, \ldots, r - n$ існують похідні $f^{[s]}$ і $f^{[s]} \in L_p$.

Встановимо тепер оцінку (27). Внаслідок (15) та (30) для довільних $k \in \mathbb{N}$ та $\varrho \in (0, 1)$

$$M_p(\varrho, A_k - A_{k-1}, r) \le \left\| A_k^{[r]} - A_{k-1}^{[r]} \right\|_p = O\left(\frac{\omega(1-\varrho_{k-1})}{(1-\varrho_k)^n} \right) + O\left(\frac{\omega(1-\varrho_k)}{(1-\varrho_{k-1})^n} \right) =$$

$$= O\left(2^{kn}\omega(2^{-k+1}) + 2^{(k-1)n}\omega(2^{-k})\right) = O\left(2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})\right), \quad k \to +\infty. \tag{34}$$

На підставі (23) та (14) для довільних $r \in \mathbb{N}$, $\varrho \in (0,1)$ та $x \in \mathbb{T}$ отримуємо

$$M_p\left(\varrho, f - A_{\varrho,r}(f), r\right) \leq 2r!\,\frac{\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_p}{(1-\varrho)^r} = O\left(\frac{\omega(1-\varrho)}{(1-\varrho)^n}\right), \quad \varrho \to 1-.$$

Тому для будь-якого натурального N

$$M_p\left(\varrho_N, f - A_N(f), r\right) = O\left(\frac{\omega(1-\varrho_N)}{(1-\varrho_N)^n}\right) = O\left(2^{Nn}\omega(2^{-N})\right), \quad N \to +\infty. \tag{35}$$

Розглянемо суму $\sum_{k=1}^{N} 2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})$, $N \in \mathbb{N}$. Оскільки функція ω задовольняє умову $(\mathcal{Z}_n)$, то функція $\omega(t)/t^n$ майже спадає на $(0,1]$ (див., наприклад, [16]). Тому

$$C_1\sum_{k=1}^{N} 2^{(k-1)n}\omega\left(2^{-(k-1)}\right) \leq 2^{(N-1)n}\omega\left(2^{-(N-1)}\right) + \int_1^N 2^{(t-1)n}\omega\left(2^{-(t-1)}\right)dt \leq$$

$$\leq 2^{(N-1)n}\omega\left(2^{-(N-1)}\right) + \frac{1}{\ln 2}\int_{2^{-N+1}}^{1} \omega(\tau)/\tau^{n+1}d\tau \leq C_2 2^{(N-1)n}\omega\left(2^{-(N-1)}\right). \tag{36}$$

Покладаючи $\varrho = \varrho_N$ і беручи до уваги співвідношення (34) – (36) та

$$A_0(x) = S_{r-1}(f)(x) = \sum_{|k|\leq r-1} \widehat{f}_k e^{ikx},$$

отримуємо

$$M_p\left(\varrho_N, f, r\right) = M_p\left(\varrho_N, f - S_{r-1}(f), r\right) = M_p\left(\varrho_N, f - A_{\varrho_N} + \sum_{k=1}^{N}(A_k - A_{k-1}), r\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{N} 2^{(k-1)n}\omega(2^{-(k-1)})\right) = O\left(2^{Nn}\omega(2^{-N})\right) = O\left(\frac{\omega(1-\varrho_N)}{(1-\varrho_N)^n}\right), \quad N \to +\infty. \tag{37}$$

Якщо функція ω задовольняє умову $(\mathcal{Z}_n)$, то при всіх $t \in [0,1]$ виконується нерівність $\omega(2t) \leq C\omega(t)$ (див., наприклад, [16]). Крім того, при всіх $\varrho \in [\varrho_{N-1}, \varrho_N]$ маємо $1 - \varrho_N \leq$ $\leq 1 - \varrho \leq 2(1-\varrho_N)$.

Таким чином, із співвідношення (37) отримуємо оцінку (27).

Застосовуючи тепер другу нерівність із леми 2 до функції $f^{[r-n]}$, одержуємо

$$K_n\left(1-\varrho, f^{[r-n]}\right)_p \leq \left\|f^{[r-n]} - A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})\right\|_p + \frac{4^n - 1}{3}(1-\varrho)^n M_p(\sqrt{\varrho}, f, r). \tag{38}$$

З огляду на (15) та (27) бачимо, що при $\varrho \in [1/2, 1)$ виконується співвідношення

$$\int_\varrho^1 \left\|\frac{\partial^n f^{[r-n]}(\zeta,\cdot)}{\partial\zeta^n}\right\|_p (1-\zeta)^{n-1}d\zeta = \int_\varrho^1 \left\|(f(\zeta,\cdot))^{[r]}(x)\right\|_p \frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}\,d\zeta =$$

$$= \int_\varrho^1 M_p(\zeta, f, r)\,\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}\,d\zeta \leq 2^n C\int_\varrho^1 \frac{\omega(1-\zeta)}{1-\zeta}\,d\zeta = O\left(\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho \to 1-. \tag{39}$$

Тому ми можемо застосувати лему 4 до функції $f^{[r-n]}$. Враховуючи (15), маємо

$$f^{[r-n]}(x) - A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\varrho}^{1}(f(\zeta,\cdot))^{[r]}(x)\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}d\zeta.$$

Використовуючи інтегральну нерівність Мінковського і (39), робимо висновок, що

$$\|f^{[r-n]} - A_{\varrho,n}(f^{[r-n]})\|_p \leq \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\varrho}^{1} M_p(\zeta,f,r)\,\frac{(1-\zeta)^{n-1}}{\zeta^n}\,d\zeta =$$

$$= O\left(\omega(1-\varrho)\right), \quad \varrho\to 1- . \tag{40}$$

Об'єднуючи співвідношення (27), (38) та (40), отримуємо (13).

Література

1. *Заставный В. П., Савчук В. В.* Приближение классов сверток линейными операторами специального вида // Мат. заметки. – 2011. – **90**, № 3. – С. 351 – 361.
2. *Савчук В. В.* Наближення голоморфних функцій середніми Тейлора – Абеля – Пуассона // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1253 – 1260.
3. *Savchuk V. V., Shidlich A. L.* Approximation of functions of several variables by linear methods in the space S^p // Acta Sci. Math. – 2014. – **80**, № 3 – 4. – P. 477 – 489.
4. *Chui C. K., Holland A. S. B.* On the order of approximation by Euler and Taylor means // J. Approxim. Theory. – 1983. – **39**, № 1. – P. 24 – 38.
5. *Holland A. S. B., Sahney B. N., Mohapatra R. N.* L_p approximation of functions by Euler means // Rend. mat. – 1983. – **3(7)**, № 2. – P. 341 – 355.
6. *Mohapatra R. N., Holland A. S. B., Sahney B. N.* Functions of class $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ and their Taylor mean // J. Approxim. Theory. – 1985. – **45**, № 4. – P. 363 – 374.
7. *Chandra P., Mohapatra R. N.* Approximation of functions by (J,q_n) means of Fourier series // Approxim. Theory and Appl. – 1988. – **4**, № 2. – P. 49 – 54.
8. *Leis R.* Approximationssätze für stetige Operatoren // Arch. Math. – 1963. – **14**. – P. 120 – 129.
9. *Butzer P. L., Sunouchi G.* Approximation theorems for the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem // Math. Ann. – 1964. – **155**. – P. 316 – 330.
10. *Butzer P., Nessel R.* Fourier analysis and approximation. One-dimentional theory. – Basel; New York, 1971. – 554 p.
11. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive approximation. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – 449 p.
12. *Trigub R. M., Bellinsky E. S.* Fourier analysis and approximation of functions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2004. – 585 p.
13. *Butzer P. L., Tillmann H. G.* Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations // Math. Ann. – 1960. – **140**. – P. 256 – 262.
14. *Butzer P. L.* Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen // Math. Ann. – 1961. – **144**. – P. 275 – 298.
15. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
16. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
17. *Prestin J., Savchuk V. V., Shidlich A. L.* Approximation of 2π-periodic functions by Taylor – Abel – Poisson operators in the integral metric // Dop. Nats. Akad. Nauk Ukrainy. – 2017. – № 1. – C. 17 – 20.

Одержано 17.09.16